工科研究生入学试题与解答

GONGKE YANJIUSHENGRUXUE SHITIYUJIEDA

高等数学

天津科学技术出版社

工科研究生入学试题与解答

高 等 数 学

天津大学数学系　钱锡山　邱忠文　张乃一　杨则燊　汇编

天津科学技术出版社

内容简介

本书汇编了全国数十所工科高等院校1983年、1984年以及1985年度招收研究生的高等数学（包括工程数学）入学试卷70余份，每题均给出解答。

在汇编中保持了每份试卷的完整性，并注明了各题得分标准，供报考研究生的读者了解各校对高等数学的要求，亦便于兄弟院校之间的交流。

本书可供报考研究生的读者、高等院校的学生参考，还可作为高等数学教师命题及辅导学生的参考资料。

工科研究生入学试题与解答

高 等 数 学

天津大学 钱锡山 邱忠文 汇编
数 学 系 张乃一 杨则燊

责任编辑：苏飞

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米 1/16 印张26 字数637,000

一九八六年十月第一版

一九八六年十月第一次印刷

印数：1－7,500

书号：13212·120 定价：6.25元

前　　言

为了满足大专院校的广大师生，特别是工科院校的学生和有关教师的需要，我们汇编了这本工科硕士研究生高等数学（包括工程数学）入学试题与解答。

本书汇集了全国几十所工科高等院校1983年、1984年和1985年招收硕士研究生的高等数学(包括工程数学)试题共70多套，并且给出了全部解答。这些试题不但内容新颖，理论与应用兼备，而且还具有典型性、灵活性和综合性，有的题目有一定的难度，全书具有一定的广泛性和代表性。纵览全书，既可以了解到各院校对考生高等数学和工程数学的要求，又可以从各院校的试题中得到新的信息。因此，本书除对报考研究生的考生有较大的帮助之外，对教师及广大的工科学生和在职的青年技术人员亦不失为一本有用的参考书。

本书在编排顺序上按各大区排列，以校名的第一个字的笔画为序。由于1985年的试题中有两份统一试题：天津大学等八所重点工科院校的统一试题和上海市（八所高等院校）的统一试题，因此，我们把1985年度的试题和解答全部放入书后的附录中。

在汇编本书的过程中，我们参考了部分兄弟院校的试题和解答。叶宗泽副教授对本书的部分试题和解答进行了审校，在此谨表示谢意。

编　　者

1985年5月天津大学

目　　录

天 津 大 学

（1983年）

一、（12分）求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$

（2）$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\overset{\frac{“0”}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x}=0$$

（2）$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1}}=-1$$

二、（12分）

（1）设$z=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，又$u=x$，$v=\dfrac{x}{y}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

（2）若$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中$f(u)$具有连续的二阶导数，求函数$z$。

解：（1）由$u=x, v=\dfrac{x}{y}$

因此 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y^2}$$

（2）设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$，$z=f(r)$

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(r)\cdot\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(r)\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^2+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

同样有 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(r)\left(\frac{y}{r}\right)^2+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(r)+f'(r)\frac{1}{r}$$

由题设有 $$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0$$

∴ $$f'(r)=\frac{C_1}{r},f(r)=C_1\ln r+C_2$$

故 $$z=C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2$$

三、（15分）

（1）若$f'(\sin^2x)=\cos^2x$，且$f(0)=-\frac{1}{2}$，求方程$f(x)=0$的根。

（2）求微分方程$y''-2y'+2y=e^x\cos2x\cos x$的通解。

解：（1）∵$f'(\sin^2x)=\cos^2x=1-\sin^2x$

∴ $$f'(x)=1-x$$

$$f(x)=\int(1-x)\mathrm{d}x=-\frac{(1-x)^2}{2}+C$$

又 $$f(0)=-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}\qquad\therefore C=0$$

故 $$f(x)=-\frac{(1-x)^2}{2}$$

而方程$f(x)=0$的根为$x=1$。

（2）对应的齐次方程$y''-2y'+2y=0$的特征方程为$r^2-2r+2=0$
解得两个根为$r=1\pm i$

因此对应的齐次方程通解为

$$\overline{y}=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

因为 $$f(x)=\mathrm{e}^x\cos2x\cos x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos3x+\cos x)$$

令 $$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

其中 $$f_1(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos3x,\ f_2(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x$$

则$f_1(x)$，$f_2(x)$都属于

$$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

型。原方程的一个特解y^*就是

$$y''-2y'+2y=f_1(x) \tag{1}$$

的特解y_1^*和

$$y''-2y'+2y=f_2(x) \tag{2}$$

的特解y_2^*之和，即

$$y = y_1^* + y_2^*$$

令 $$y^* = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

则 $$(y_1^*)' = e^x[(A+3B)\cos 3x + (B-3A)\sin 3x]$$

$$(y_1^*)'' = e^x[-(6A+8B)\sin 3x - (8A-6A)\cos 3x]$$

将y_1^*，$(y_1^*)'$，$(y_1^*)''$分别代入（1），并比较等式两边同类项的系数得：

$$A = -\frac{1}{16},\ B = 0$$

即 $$y_1^* = -\frac{1}{16}e^x\cos 3x$$

令 $$y_2^* = xe^x(C\cos x + D\sin x)$$

用同样方法可求得：

$$C = 0, D = \frac{1}{4}$$

故 $$y_2^* = \frac{1}{4}xe^x\sin x$$

所以原方程的通解为：

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) - \frac{1}{16}e^x\cos 3x + \frac{1}{4}xe^x\sin x$$

四、(15分)

（1）设

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{123} & -\sin\frac{\pi}{123} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{123} & \cos\frac{\pi}{123} \end{pmatrix}$$

问：①x取何值时，A为可逆矩阵；

②x取何值时，A为正交矩阵.

（2）设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是n阶可逆矩阵，A^*表示A的伴随矩阵，即

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}表示A的元素a_{ij}的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$，试证明：A^*是可逆矩阵，并且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

解：（1）①因为$|A|=2x$，故当$x\neq 0$时，A为可逆矩阵.

②为使A为正交矩阵，只须使A的各行所有元素的平方和的开方为1，即$|2x|=1$，故当$x=\pm\frac{1}{2}$时A为正交矩阵.

证明：（2）由题设A可逆，记$|A|=d$，则$d\neq 0$，

又 $$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d \end{pmatrix}$$

故 $$|A||A^*| = |AA^*| = d^n$$

$$|A^*| = \frac{d^n}{|A|} = d^{n-1} \neq 0$$

即A^*是可逆矩阵.

又 $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

等式两端取逆得:

$$(A^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1} = |A|(A^*)^{-1}$$

∴ $$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

又在$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$中用$A^{-1}$代$A$得:

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*$$

∴ $$(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

故证得 $$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

五、(14分)

(1)求力场$\vec{F} = (yz, -2xz, 2xy)$沿曲线$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a>0)$,与平面$y - z = 0$的交点自$A(a, 0, 0)$到点$B(-a,, 0, 0)$所作的功.

(2)已给向量场$\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$及由曲面$z = 1 - 2x^2 - y^2$和平面$z = 2y$所围的空间域$\Omega$,试求向量场$\vec{F}$在$\Omega$域外侧的通量.

解:(1)记l为曲面与平面的交线自点$A(a,0,0)$到$B(-a,0,0)$的一段,l即为

$$y = z = \sqrt{a^2 - x^2} \quad -a \leqslant x \leqslant a$$

$$W = \int_l \vec{F}\cdot dl = \int_l yz dx - 2xz dy + 2xy dz$$

$$= \int_a^{-a}(a^2 - x^2)dx = -\frac{4}{3}a^3$$

(2)记由曲面$z = 1 - 2x^2 - y^2$和平面$z = 2y$所围的空间域为Ω,其边界为Σ,则所求通量为:

$$H = \oiint_\Sigma \vec{F}\cdot \vec{d\sigma} = \oiint_\Sigma x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

$$= 3\iiint_\Omega dx dy dz$$

Ω在xoy平面内的投影域D为:

$$1 - 2x^2 - y^2 = 2y$$

即

$$x^2+\frac{(y+1)^2}{2}=1$$

这是椭圆方程。引用极坐标：

$$x=r\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),\quad y+1=\sqrt{2}\,r\sin\theta(0\leqslant r\leqslant 1),\ z=z$$

则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

故

$$H=3\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{2y}^{1-2x^2-y^2}\mathrm{d}z=3\iint(1-2x^2-y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{2}(2-2r^2)r\mathrm{d}r=3\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=3\sqrt{2}\pi$$

六、（12分）

（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=C\quad(0<C<+\infty)$，求证此二级数必同时收敛，或同时发散。

（2）判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln(1+n)}$ 的敛散性。

解：（1）由题设 $u_n>0$，$v_n>0$，及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=C(0<C<+\infty)$，故对 $\varepsilon=\frac{C}{2}>0$，存在充分大的$N$，使得只要当 $n>N$ 后，就有 $\left|\frac{u_n}{v_n}-C\right|<\frac{C}{2}$即

$$\frac{C}{2}<\frac{u_n}{v_n}<\frac{3}{2}C$$

或

$$\frac{C}{2}v_n<u_n<\frac{3C}{2}v_n$$

由左侧不等式可知：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，必 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 亦收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，必 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦发散。

由右侧不等式可知：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，必 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，必 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$亦发散。

所以，这二级数必同时发散或同时收敛。

（2）由级数收敛性的积分判别法易见 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$与$\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$同时发散．

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\ln(1+n)}}{\dfrac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\ln n}{\ln(1+n)}=1$$

故由（1）题可知$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\ln(1+n)}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$应同时发散。

七、（14分）设 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

（1）求作函数的图形。

（2）设K为任意实数，试讨论方程

$$(x+2)e^{\frac{1}{x}}-K=0$$

的实根个数，并指出其根的大致范围.

解：（1）定义域为（$-\infty$，0），（0，$+\infty$）

$$y'=e^{\frac{1}{x}}\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$$

令$y'=0$，得$x_1=-1$，$x_2=2$.

$$y''=e^{\frac{1}{x}}\frac{5x+2}{x^4}$$

令$y''=0$，得$x_3=-\dfrac{2}{5}$.

渐近线：$\because\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty$

所以$x=0$是一条铅直渐近线。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x]=\lim_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)+2e^{\frac{1}{x}}]$$

令$t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

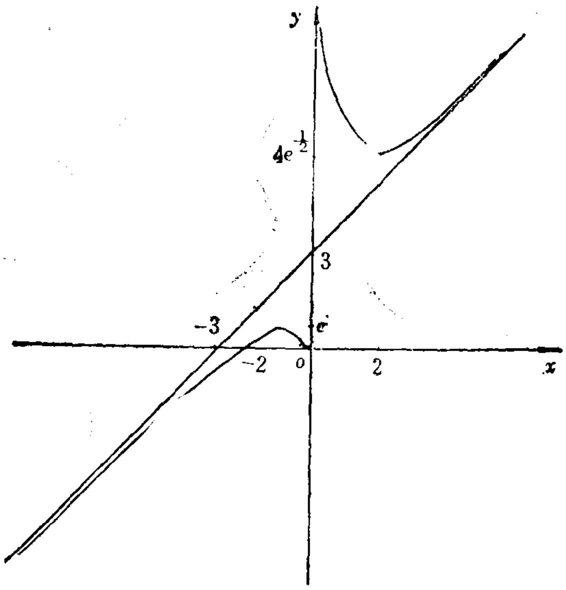
$$\lim_{x\to\infty}2e^{\frac{1}{x}}=2$$

因此 $$\lim_{x\to\infty}(y-x)=3$$

故函数的斜渐近线为$y=x+3$

易知$y|_{x=-1}=e^{-1}$为极大值，$f(2)=4e^{\frac{1}{2}}$为极小值。$x_3=-\dfrac{2}{5}$为拐点。$\lim\limits_{x\to0^-}y=0$。

所以得到以下草图：



（2）由图可知，当$k\leqslant 0$时，方程有一根x，$x\leqslant -2$；当 $0<k<\frac{1}{e}$时，方程有两个根：$-2<x_1<-1$，$-1<x_2<0$；当 $k=\frac{1}{e}$时，方程有一个根$x=-1$；当$\frac{1}{e}<k<2e^{\frac{1}{2}}$时，方程无根；当 $k=2e^{\frac{1}{2}}$时，方程有一根$x=2$；当$2e^{\frac{1}{2}}<k$时，方程有二根：$0<x_1<2$，$2<x_2<+\infty$。

八、（6分）设函数$f(x)$在$[a, b]$上具有连续的一阶导数，$f(a)=0$，且存在这样的1实数A，使$|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。

试证：在$[a, b]$上$f(x)\equiv 0$

证明：（反证法）

令$f(x)$在$[a, b]$上不恒为0，由$f(x)$的连续性可知，存在$[a_1, b_1]\subset[a, b]$，使$f(a_1)=0$，而在(a_1, b_1)上$f(x)\neq 0$。以下在(a_1, b_1)内讨论：令$h(x)=\ln|f(x)|$，则一方面 $|h'(x)|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\leqslant A$，而另一方面，由于$\lim\limits_{x\to a_1} h(x)=-\infty$，取定$x_0\in(a_1, b_1)$，当$x_1<x_0$，且$x\to a_1$时，可使$h'(\xi)=\frac{h(x_0)-h(x)}{x_0-x}$任意增大(分母为正，且小于$x_0-a_1$，$\lim\limits_{x_1\to a}[h(x_0)-h(x_1)]=+\infty$)。

这两方面是矛盾的，故本题得证。

（1984年）

一、（9分）设$\omega=f(x, 2y, z)$，而 $z=\varphi(xy+y)$，其中f具有连续的二阶偏导数，φ二阶可微，求$\frac{\partial\omega}{\partial x}$，$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$。

解：
$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot\varphi'\cdot y$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=f''_{xy}\cdot 2+f''_{xz}\cdot\varphi'\cdot(x+1)+f'_z\cdot\varphi'+y\varphi''(x+1)\cdot f'_z+$$
$$+y\cdot\varphi'[f''_{zy}\cdot 2+f''_{zz}\cdot\varphi'\cdot(x+1)]$$
$$=2f''_{xy}+(x+1)(\varphi'f''_{xz}+y\varphi''\cdot f'_z+y\varphi'^2\cdot f''_{zz})+$$
$$+f'_z\cdot\varphi'+2y\varphi'f''_{zy}$$

二、（9分）计算$\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$，其中$N$为正整数．

解：
$$\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=N\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\ \mathrm{d}x$$

$$=N\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\ (\sin x-\cos x)\ \mathrm{d}x\ +\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\ \mathrm{d}x\right]$$

$$=2\sqrt{2}N$$

三、（9分）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{2}{n}\right)+\left(x+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{2n}{n}\right)\right]$

解：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{2}{n}\right)+\left(x+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{2n}{n}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(x+t)\mathrm{d}t=x+1$$

四、（9分）设有空间流速场$\vec{v}(x,\ y,\ z)=xy\vec{i}$，要$\vec{v}$通过曲面$z=x^2+y^2$位于平面$z=1$以下部分的下侧的通量（流量）．

解：曲面S为$z=x^2+y^2\quad(z\leqslant 1)$

$$I=\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}y\sqrt{z-y^2}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{yz}}y\,(-\sqrt{z-y^2})(-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$$

$$=2\int_{-1}^{1}y\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}\sqrt{z-y^2}\mathrm{d}z=2\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}y\mathrm{d}y$$

$$=0$$

五、（12分）

（1）设向量组a_1，a_2，a_3，a_4线性无关。问向量组a_1+a_2、a_2+a_3、a_3+a_4是线性无关还是线性相关，并给出证明．

（2）设i，j，k是向量空间R^3上的一个基，求向量$a=i-j-k$在R^3的另一个基i，$i+j$，$i+j+k$下的坐标．

（3）设σ是R^3上的一个线性变换，并且$\sigma(i)=i$，$\sigma(j)=i-j$，$\sigma(k)=i+j$．求σ在基i，j，k下的矩阵；并求R^3的子空间$W=\{X\in R^3|\sigma(X)=0\}$．

证明：（1）设有k_1，k_2，k_3，k_4，作如下线性组合

$$k_1(a_1+a_2)+k_2(a_2+a_3)+k_3(a_3+a_4)+k_4(a_4+a_1)=0$$

即有
$$(k_1+k_4)a_1+(k_1+k_2)a_2+(k_2+k_3)a_3+(k_3+k_4)a_4=0$$

因a_1，a_2，a_3，a_4线性无关，则有

$$\begin{cases} k_1 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

以上齐次线性方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

则k_1，k_2，k_3，k_4有非零解，即有不全为零的k_1，k_2，k_3，k_4使

$k_1(a_1+a_2)+k_2(a_2+a_3)+k_3(a_3+a_4)+k_4(a_4+a_1)=0$成立。

所以向量组a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_4，a_4+a_1线性相关。

（2）设$a=i-j-k$在基i，$i+j$，$i+j+k$下的坐标为a，b，c，则

$$\begin{aligned} a &= i-j-k \\ &= ai+b(i+j)+c(i+j+k) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b+c=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$

（3）σ在基i，j，k下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任取$x=ai+bj+ck\in W$

则 $$\begin{aligned} \sigma(x) &= a\sigma(i)+b\sigma(j)+c\sigma(k) \\ &= ai+b(i-j)+c(i+j) \\ &= (a+b+c)i+(-b+c)j=0 \end{aligned}$$

∴ $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -b+c=0 \end{cases}$

解得 $a=-2c$

$b=c$

则有 $x=-2ci+cj+ck=-c(2i-j-k)$

所以 $W=L(2i-j-k)$

六、（9分）计算$\iiint\limits_{\Omega} y^2 dv$，其中$\Omega$为由平面$z=0$及曲面$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$（常数$a>0$，$b>0$）所围的区域

解：参照球坐标可设

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y = br\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\varphi$$

分别代入 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 中，经化简后得：

$$r = 1, dv = abr^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$\iiint_\Omega y^2 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 b^2r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta abr^2 drd\varphi d\theta$$

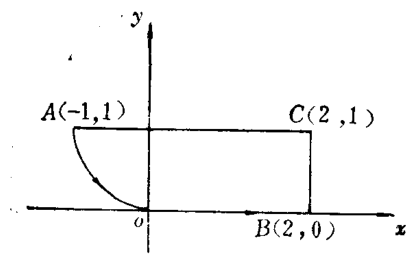
$$= ab^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^4\, dr$$

$$= \frac{2ab^3\pi}{15}$$

七、（9分）计算 $\int_{\widehat{AOB}} (12xy + e^y)dx - (\cos y - xe^y)dy$，其中 $\widehat{AOB}$ 为由点 $A(-1, 1)$ 沿曲线 $y = x^2$ 到点 $O(0, 0)$，再沿直线 $y = 0$ 到点 $B(2, 0)$ 的路径。

解：从 A，B 两点分别作 x 轴，y 轴平行线，得到一个闭曲线围成的平面域 D。

$$\int_{\widehat{AOB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CA}} = \oint_C = \iint_D [e^y - (12x + e^y)]dxdy \text{（格林公式）}$$



$$= \iint_D -12x dxdy = -12\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2} x dx$$

$$= -12\int_0^1 \left(2 - \frac{y}{2}\right)dy = -21$$

而 $$\int = \int_0^1 (-\cos y + 2e^y)\, dy = (-\sin y + 2e^y)\Big|_0^1 = -\sin 1 + 2e - 2$$

$$\int_{\overline{CA}} = \int_2^{-1} (12x + e)\, dx = 6x + ex\Big|_2^{-1} = -18 - 3e$$

∴ $$\int_{\widehat{AOB}} = \oint_C - \int_{\overline{BC}} - \int_{\overline{CA}} = -21 - (-\sin 1 + 2e - 2) - (-18 - 3e)$$

$$= \sin 1 + e - 1$$

八、（9分）设二阶可微函数 $f(x)$ 满足方程

$$\int_0^x (x + 1 - t)f'(t)dt = x^2 + e^x - f(x)$$

求 $f(x)$。

解：用分部积分法，方程可化为

$$(x+1)\int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt = x^2 + e^x - f(x) \qquad (1)$$

对上式求导

$$\int_0^x f'(t)dt + (x+1)f'(x) - xf'(x) = 2x + e^x - f'(x) \qquad (2)$$