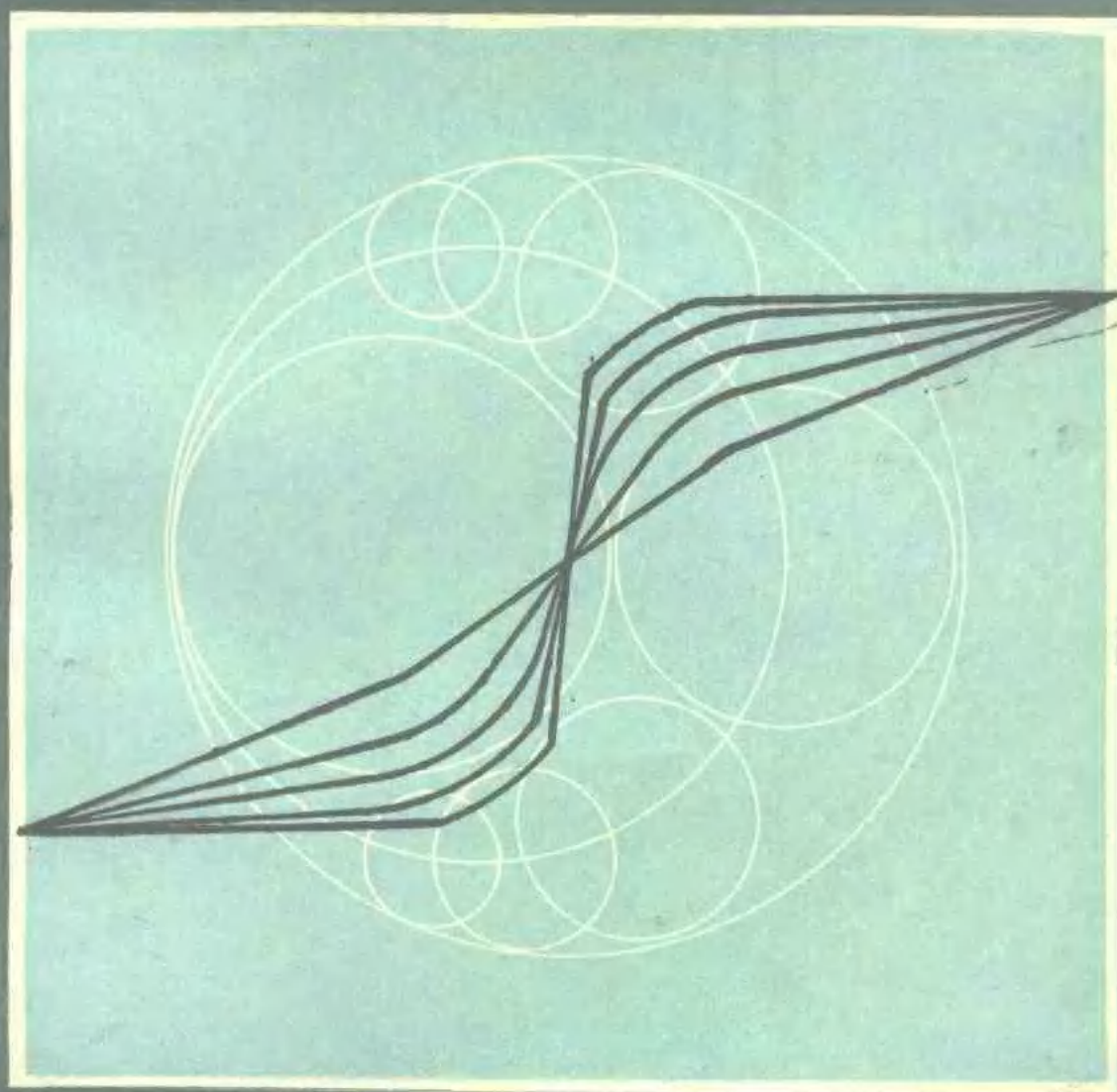


生产过程动态数学模型 及其在线应用

袁璞 著



中国石化出版社

生产过程动态数学模型 及其在线应用

袁 璞 著



中国石化出版社

(京)新登字048号

内 容 提 要

本书在介绍生产过程动态数学模型基础知识及其近20年来最新成果的基础上,着重讲述动态的数学模型在线应用中遇到的问题及解决途径。全书分两部分,第一部分是关于控制论的研究对象——系统的基本知识,包括系统特性及其描述方法、系统的运动、可控性、可观性、稳定性及采用计算机计算后系统的数学模型,第二部分讲述在线应用的有关问题和解决方法,包括反馈与控制、解耦、预估控制等方面的控制策略和控制技术。

本书可供从事工艺、自动控制、计算机方面的工程技术人员、研究人员以及高等学校有关专业的教师、本科生和研究生参考之用。

2003/05

生产过程动态数学模型及其在线应用

贾 璞 著

中国石化出版社出版发行

(北京朝阳区太阳宫路甲1号 邮政编码:100029)

海丰印刷厂排版印刷

新华书店北京发行所经销

787×1092毫米 16开本 21¹/₄印张 542千字 印1—2000

1994年12月北京第1版 1994年12月北京第1次印刷

ISBN 7-80043-519-9/TP·011 定价:23.00元

前 言

20世纪40年代开始形成的控制论被称为“20世纪上半叶三大伟绩之一”[●]，在人类社会的各方面有着深远的影响，许多技术革命，如电子计算机、航天和核能技术，都直接与控制论联系在一起。50年代末现代控制论的形成，70年代以来大系统和人工智能的发展，大规模集成电路和微处理器的发展，为控制论在各方面的实际应用提供了各种现代方法和功能越来越丰富、价格越来越便宜的计算机系统，使控制论的应用迅猛发展；进入80年代以来，在生产过程中应用控制论已有了很多成功的实例，它不但使生产过程的控制得到明显改善，并将生产过程的管理与控制结合起来，提高了生产管理的科学性，从局部到全局都实现优化，带来了明显的经济效益；不但促进了控制论和计算机技术的发展，也使生产技术得到不断提高，成为当前生产过程技术发展的一个趋势。

用控制论和现代技术武装传统产业，取得经济效益的关键是对生产过程实施先进过程控制(Advanced Process Control)。当前不少生产装置已安装了微处理器为基础的分散控制系统(DCS)，但在生产过程控制上，常常停留在用DCS代替常规的PID控制，迫切需要用先进过程控制方法武装。

何为先进控制系统？有各种不同看法。作者认为，当前先进过程控制的基本特点是：

1. 是一种适应生产过程各种情况和要求，从全局考虑采用各种现代方法，基于生产模型、尤其是动态数学模型的控制策略；
2. 由于控制作用的复杂性和实时性，需用生产过程控制计算机系统实现(典型的为DCS系统)；
3. 能给生产带来明显的经济效益。

为了开发和应用先进过程控制系统，需要一批兼有控制论、生产工艺知识、会使用计算机的，有生产经验的科技人员。作者多年来从事先进过程控制的教学、科研和生产应用工作，对此感触尤深。这是作者编写此书的基本原因。希望通过这本书，对已有生产工艺知识和已有控制论知识的工程师、大学生和研究生们，在了解控制的基本知识及其工程应用方面有所帮助。为此，本书的编写以迫切需要先进控制，且可能带来巨大经济效益的石油化工生产过程为背景，以现代控制论、过程动态数学模型及其在线应用为中心，尽量做到深入浅出，理论与实际相结合。

本书的主要内容有两大部分：第一部分(前五章)是关于控制论的研究对象——系统的基本知识，包括系统的特性、描述方法(数学模型)、系统的运动、可控性、可观性、稳定性、采用计算机计算后系统的描述方法(离散时间系统)和特性以及石油化工过程中常见的有时间纯滞后的系统。第二部分(后五章)是关于动态数学模型在线应用的有关问题和方法，包括反馈与控制、状态反馈与不可测变量的观测、多变量系统的相互关联和解耦、以预估控制(Predictive Control)为主的基于模型的控制策略、动态模型在线应用中的实际问题，包括数据的采集与处理，模型的建立与简化，动态模型的在线计算(在线仿真预报与验证)等。每一章都有石油化工过程的实例。本书内容也反映了作者的一部分科研成果。为深入了解

●钱学森，宋健《工程控制论》序，科学出版社，1980年。

本书内容，需一定的数学基础和实际经验，但本书注重数学描述所反映的实际物理概念的分析，希望对数学基础不够充分的读者也能有所帮助。

本书的许多内容是作者与同事和研究生们共同努力的结果。郑远扬、高少立、王超默、江青茵、黄德先、丛松波、吴峰、左信、郑海涛等对本书的写成都是有贡献的。编写过程中还得到其他人的支持和帮助，在此一并表示感谢。

作者水平和学识有限，时间仓促，错误和不当之处在所难免，敬请读者指正。

1993.3.2

目 录

第一章 系统与模型	1
第1-1节 系统	1
第1-2节 数学模型	2
第1-3节 实例	5
第1-4节 状态空间模型	8
第1-5节 传递函数	12
第1-6节 线性变换与标准型	16
第1-7节 麦克米兰标准型	20
第1-8节 具有时间滞后的系统	25
第二章 系统的运动	29
第2-1节 线性定常系统的输出响应	29
第2-2节 频率特性	39
第2-3节 系统的自由运动	44
第2-4节 系统运动的全解	48
第2-5节 脉冲响应与卷积模型	53
第三章 能控性与能观性	56
第3-1节 能控性	56
第3-2节 时变系统的能控性判据	58
第3-3节 线性定常系统的能控性	62
第3-4节 能观性及其判据	66
第3-5节 系统按能控性与能观性的分解	69
第3-6节 结构可控性与可观性	74
第四章 系统运动的稳定性	80
第4-1节 稳定性及其定义	80
第4-2节 李亚普诺夫渐近稳定性定理	83
第4-3节 李亚普诺夫函数	88
第4-4节 线性系统的稳定性	91
第4-5节 输出的稳定性	95
第五章 离散时间系统	97
第5-1节 连续时间系统的离散化	97
第5-2节 离散系统的运动	101
第5-3节 离散系统的稳定性	110
第5-4节 能控性与能观性	115
第5-5节 纯滞后系统的离散化	118
第5-6节 时间序列模型	122

第六章 控制与反馈	124
第6-1节 闭环与开环	125
第6-2节 奈魁斯特稳定判据	132
第6-3节 多入多出系统的稳定性	137
第6-4节 闭环系统分析设计的经典方法	143
第6-5节 PID控制	155
第6-6节 复杂控制系统	165
第七章 状态反馈与状态观测	169
第7-1节 反馈形式及其特点	169
第7-2节 极点配置	172
第7-3节 二次型指标最优控制	184
第7-4节 状态观测器	193
第7-5节 用观测状态进行的状态反馈系统	197
第7-6节 鲁棒控制器	200
第7-7节 有不可测输入时的观测器	205
第7-8节 一个实例——再生器的观测	212
第八章 关联与解耦	218
第8-1节 关联程度的衡量	218
第8-2节 状态反馈解耦	224
第8-3节 最小设计问题及其在解耦中的应用	234
第8-4节 对角优势化	247
第九章 预估控制	252
第9-1节 Smith预估	253
第9-2节 自整定控制器	254
第9-3节 基于卷积模型的预估控制	258
第9-4节 基于CARMA模型的预估控制	266
第9-5节 基于状态空间模型的预估控制	270
第9-6节 稳定性与鲁棒性	279
第9-7节 应用及实例	289
第十章 动态模型在线应用中的一些问题	295
第10-1节 过程变量的采集	295
第10-2节 采集数据的处理	298
第10-3节 动态数学模型的数值计算	303
第10-4节 动态模型的建立与简化处理	313
第10-5节 生产过程控制计算机系统	322
参考文献	327

第一章 系统与模型

系统是我们的研究对象。建立系统的模型，特别是系统的数学模型，是研究系统的基本方法。本章第1-1节给出了系统的特点与定义；第1-2节着重分析了系统数学模型及其运动的特征及建立模型的一般方法；第1-3节以实例说明实际系统的复杂性及其处理方法；第1-4、1-5节给出数学模型的两种基本形式——状态空间描述和输入输出描述；最后给出了这两种模型的关系及各自的优缺点，说明状态变量的非唯一性，引入极为重要的线性变换的概念和各种标准型。

第1-1节 系 统

什么是系统？简单地说，系统是事物或过程的集合体；详细地说，系统是由若干事物或过程借物质流、能量流、信息流在空间、时间上互相联系，具有某种功能的集合体。

系统是相对于其“环境”而独立存在的；一个系统尽管会受到环境的影响，但它具有自己特性而独立存在，并且对环境产生影响，系统与环境间的互相影响可用图1-1表示，环境对系统的影响表现为系统的输入，系统对环境的影响表现为系统的输出，系统输入与输出之间的关系是由系统本身特性决定的。随着时间变化的系统的输入输出称为输入输出变量。如果输入和输出变量都只有一个，这样的系统称为单入单出（SISO）系统；如果输入输出是多个互相独立的变量，则称为多入多出（MIMO）系统。

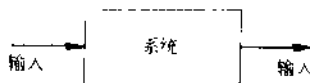


图 1-1

系统的边界是由系统的功能和研究分析的目的决定的，因此，系统与其组成部分（称为子系统）是相对的，例如对一个大的石油公司的管理来说，每个炼油厂是一个独立的系统，它包含炼油厂中各生产装置；对一个炼油厂的管理来说，各生产装置都是一个相对独立的系统；而每个生产装置中的各组成部分，例如化学反应器，它是生产装置的子系统；但在研究反应器时，又常常把反应器看作是一个独立的系统。

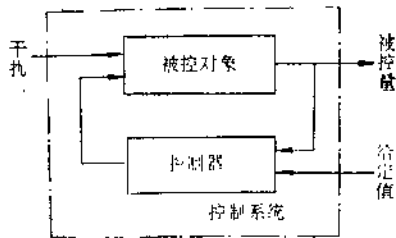


图 1-2 控制系统

在研究系统时，为了更清晰地表示其组成的各子系统之间的关系，常常用单向信息流方式表示。如图1-2所示的控制系统，由被控对象和控制器两部分组成，被控对象的输出是控制器的一个输入，常常称为被控变量；被控变量的期望值（称为设定值或给定值）是控制器的另一个输入变量，这是控制系统以外的环境对系统的作用，控制器的输出作用到被控对象，是被控对象的一个输入变量，外界的干扰是被控对象的另外的输入变量，各输入输出变量均标有箭头，表明其作用方向，使各子系统和环境间的互相作用一目了然。

需要注意的是，由于系统的边界不同，同一个实物可以有不同的输入输出变量。以化学

反应器为例，若考查反应器的能量（热）平衡关系，送入反应器的热量常常是系统（反应器）的输入，从反应器带出或取走的热量，则是系统的输出。但是，当反应器作为上述控制系统中的被控对象时，若用自反应器取出的热量作为调节的手段，以维持反应温度为所期望的数值，则反应温度为反应器的输出，自反应器带出或取走的热量则是反应器的输入。

对于一个特定的系统，如果确定了其各组成部分及每部分的输入输出变量，形成类似图1-2所示的框图（注意，图1-2中，被控对象和控制器也分别是由它们的子系统组成的，确定了这些子系统和它们的输入输出变量，就可以得到更细致的框图），即可简单明瞭地说明了各子系统间的关系。

第1-2节 数 学 模 型

为了分析研究系统，常常要建立系统的模型。模型可分为两类，一类是物理模型（如小型试验装置）或模拟模型（如利用相似规律，用电路或网络来模拟实际物理过程）；另一类是数学模型，即用一定的数学方程式来描述系统。由于科学技术的发展，利用数学模型来分析研究系统的方法得到了越来越广泛的应用；数学模型已从分析研究的工具，进一步发展成为直接应用于实际，解决实际问题的手段。

实际系统是五花八门的，情况也比较复杂，加上研究分析系统的目的不同，数学模型的形式也是很多的，从建立数学模型的方法来说大体上有以下两种。

(1) 按照系统运动的机理和规律建立数学模型。例如对于生产过程，通常可按照物质守恒、能量守恒和其它有关规律给出的关系式建立数学模型，其结果不但给出系统输入输出变量之间的关系，也给出系统状态和输入输出之间的关系，使人们对系统有一个比较清晰的了解，故有时称为“白箱模型”。

(2) 假设系统符合某种形式的数学方程式，测取系统的输入和输出变量，以一定数学方法确定模型中有关参数，并可对模型的结构作某些修改，从而得到系统输入与输出之间的数学模型，但系统的状态，即系统内部如何运动不得而知，故又称为“黑箱模型”。

这两种建立数学模型的方法可以说都是一大门类的学科体系，第一种方法可以得到有关系统的详细描述，但必须对系统或过程作深入的研究分析，成为“过程动态学”这一分支学科。第二种方法已发展成为“系统辨识”这一分支学科。尽管第一种方法对系统有详细的描述，在系统的设计阶段就可以发挥作用，但要得到一个满意的结果（尤其是对比较复杂的系统），常常是很困难的，这是后一种方法应运而生的主要原因。对这两种方法的详细讨论超出了本书的范围，有兴趣的读者可参阅有关文献。本书只对数学模型的一般特性加以讨论，并着重于机理分析。

对大多数工业生产过程来说，可用下述一般规律来描述：

$$C \frac{dx}{dt} = Q_1(x, u, t) - Q_2(x, u, t) + S(x, u, t) \quad (1-1)$$

式中 x ——称为系统或过程的状态变量，如温度、压力等；

u ——输入变量；

C ——容量，表示系统状态变量变化一个单位时，系统内部贮存物质质量或能量的变化量；

S ——源或流，单位时间内由系统（或过程）本身产生或吸收的物质质量或能量；

Q_1 ——单位时间内流入系统的物质质量或能量；

Q_2 ——单位时间内流出系统的物质质量或能量；

t ——时间。

式 (1-1) 是物质守恒或能量守恒的具体表现, 流入系统的物质流或能量流 Q_1 , 加系统本身产生的物质流或能量流 S , 减去流出系统的物质流或能量流 Q_2 , 成为单位时间内贮存于系统中的物质质量或能量, 它使系统的状态变量 x 发生变化, x 的变化速率 $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 与贮存于系统中的物质或能量流成正比, 其比例系数即为容量 C 。

系统中温度 (状态变量) 的变化, 说明系统中贮存的热能发生了变化, 它是由于流入和流出系统的能量不同而引起的, 其中包括系统本身的源或流, 例如一个进行放热反应的化学反应器, 反应过程中单位时间内放出的热量形成源。当流入流出热量不相等时, 系统的状态——温度就会发生变化, 其变化速率是单位时间内积蓄的热量, 也就是单位时间内流入流出热量差除以热容 C (温度变化一个单位所需的热量)。

容器中贮存物质质量的变化, 对液体或固体表现为液位或固体料位的变化, 对气体表现为容器压力的变化, 液位、料位、压力是系统的状态变量, 它们的变化是因为流入流出容器的物质质量变化所引起的; 容器的截面积越大, 即容量越大, 在同样的条件下, 状态变量的变化速率 $\frac{dx}{dt}$ 越小。

运动着的物体当其速度 (状态变量) 发生变化时, 意味着物体中贮存动能的变化, 这是由于作用于物体的力或力矩变化 (做功) 而引起的, 物体的质量或转动惯量就是它的容量, 容量越大, 同样的速度变化 (加速度或角加速度) 所需的力 (功) 越大。

在电路中, 电容上电压的变化说明电容中贮存的电场能量发生了变化, 这是由于电容上积蓄或释放电流而引起的。电容的大小就是其容量, 电容越大, 电容上同样的电压变化率所需的电流越大。电感中电流的变化则说明电感中贮存的磁场能量的变化, 电感的大小反映了容量的大小, 电感越大, 流过电感的同样电流的变化率所需的电压越大。

一般地说, 流入流出系统的物质流或能量流 Q_1 和 Q_2 , 以及源或流不仅是输入变量的函数, 常常还是系统状态变量的函数, 例如化学反应器中温度的变化, 使反应物料带入或带出的热量流发生变化, 同时也因反应速度的变化, 使反应过程中放出或需要的反应热发生变化。容器中液位的变化使液位形成的压头变化, 常常会使流出容器的流量发生变化, 气体容器中的压力增高, 使流入的量因压差减小而减小, 流出量因压差增大而增大。运动着的物体的速度增加后, 常常使运动的阻力增大。电容上电压的增加, 使电压差减小, 因而使流入电流减小; 电感中电流的增大, 使电路上压降增大, 电感两端电压减小。因此在式 (1-1) 中, 一般的说, Q_1 , Q_2 , S 均为输入变量 u 、状态变量 x 和时间的函数。在某些特定的情况下, Q_1 , Q_2 和 S 可与状态变量无关。

实际系统常常不像式 (1-1) 那样简单, 主要有以下几种情况:

(1) 一个系统中往往有多个储能元件, 相应地有多个状态变量, 因此要用一组式 (1-1) 那样的微分方程描述; 系统的输入输出变量也往往有多个互相独立的量, 形成多入多出的高阶 (维) 系统;

(2) 在很多实际情况下, 状态变量不仅是时间的函数, 也是空间位置的函数, 如管式化学反应器, 其温度是沿着管长而不同的; 这时式 (1-1) 只适用于管长的一个微元体内, 系统的完整描述要用偏微分方程, 这种系统称为分布参数系统, 亦称为无限维系统 (因为系统

是由无穷多个微元体构成的，每个微元体都有其相应的状态变量)；

(3) 实际系统中常常包含有一些随机变化或不确定的因素，受各种随机干扰的影响，使系统的状态变量，输入输出变量都是随机变化的，成为随机性系统。

无论怎样复杂的系统，都可以用式 (1-1) 作为其基本的描述，这一描述也反映了系统的两个基本特性。

1. 储存性

储存性的一个含义是说系统内部有储能或物质的元件，系统状态的变化是系统内部储能或物质发生变化的反映，系统的输入输出变量，是影响流入或流出系统的物质质量或能量变化的一个因素。

储存性的另一个含义是系统当前时刻的状态变量或输出变量，保存了过去时刻的信息，这是因为系统具有贮能或物质质量的特点，而流入流出能量或物质质量的大小是有限的，物质质量或能量的流动具有一定的“阻力”，使系统的状态变量不可能有阶跃跳动，因而输出变量对系统输入的变化有一个响应的过程，或者说在输入不变以后，状态变量仍会有所变化，好象是储存了历史的输入信息，或者说，状态或输出变量对输入的变化有“滞后”现象。系统的储存性对分析实际问题是有指导意义的，例如图 1-3 所示多侧线分馏塔，常常提出这样的问题：

为什么 $\sum_{i=1}^5 Q_i$ (流出量之和) 不等于 Q_0 (流入量)？是否仪表不准确？而常见仪表维护人员

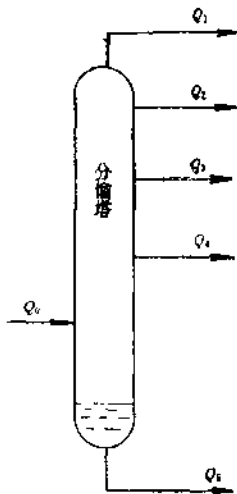


图 1-3

说：“表都校对过了，是准的”。对此，我们必须分析分馏塔内是否有积蓄量的变化（是否稳定），也就是分馏塔的状态（温度，压力，液位，组分等）是否有变化，而不能认为 Q_0 不变就是稳定了，因为，在塔内积蓄量或状态有变化时，自然不会满足 $\sum Q_i = Q_0$ 。显然，这种储存作用与系统的容量有关，容量越大，在其它条件相同时，储存作用越大。

2. 因果性

因果性也有两种含义，其一是说系统状态或输出变化是有原因的，它是由系统的输入，或者说流入和流出系统的物质流或能量流的变化而引起的，这一点是很明显的。

因果性的另一个含义指未来的输入不会影响现在的输出或现在的状态变量，只有现在的状态 $X(t_0)$ 和现在与未来的输入 $U(t_0, \infty)$ 才会影响现在和未来的状态和输出。

储存性和因果性都是客观存在的事实。由于这两个特性，在研究系统输入输出和状态变量之间的关系时，需要注意以下事实：对所研究的系统，若只知当前时刻 t_0 及其以后（未来）的输入 $U(t_0, \infty)$ 是不能唯一确定 t_0 以后的状态 $X(t_0, \infty)$ 和输出 $Y(t_0, \infty)$ 的。这是因为系统具有储存性，即使在 t_0 以后输入作用不变，即 $U(t_0, \infty)$ 等于零，系统的状态和输出仍会有所变化，其变化的大小是由系统过去的输入 $U(-\infty, t_0)$ 或当前的状态 $X(t_0)$ 所决定的，在 t_0 以后的变化，由于系统状态具有存储性，不仅与 $U(t_0, \infty)$ 有关，而且与历史的输入 $U(-\infty, t_0)$ 亦有关，或者说不仅与 $U(t_0, \infty)$ 有关，与系统在 t_0 时刻的状态 $X(t_0)$ （在数学

上常常称为初始状态)亦有关。

例如图1-3所示塔底液位,当塔底抽出量增大以后,液位是否下降?由于抽出量 Q_3 只是一个输入变量,即使在其他流量都不变的情况下,液位的变化还取决于 Q_3 增大时的初始状态,若此刻液位是上升的,而 Q_3 增大的作用不足抵消初值的影响,液位将继续上升,只是上升的速度降低而已。

如果系统在 t_0 后的状态 $X(t_0, \infty)$ 或输出 $Y(t_0, \infty)$ 只与 t_0 时刻以后的输入 $U(t_0, \infty)$ 有关,而与 $X(-\infty, t_0)$ 无关,则称系统是松弛的。显然,若历史的输入作用对系统的影响已经消失(且系统的输入在 t_0 时刻以前不再变化),即系统处于稳态或平衡状态,则系统是松弛的。如以平衡状态为系统状态变量的坐标原点,则此时(t_0 时刻)系统的初始状态 $X(t_0)=0$ 。也就是说,若初始状态为零,则系统必是松弛的。但系统松弛,未必初始状态为零。

第1-3节 实 例

例1-1 热水混合罐(图1-4)及其控制系统

控制系统的功能是维持罐内水温一定,水位高度也应在给定的范围内。为此设置了温度调节器TC和水位调节器LC,由热偶和液位变送器测得的温度和水位信号,送给相应的调节器,并与给定值 T_s 和 H_s 比较后,按一定规律去调节阀门 U_1 和 U_2 ,以维持温度和水位一定。由于冷水和热水的温度 T_1 和 T_2 是变化的,阀门 U_3 的开度也因用水量要求不同而变化,设置温度和水位调节器是很必要的。

将系统划分为调节器和热水罐两部分,可得图1-4(b)所示的框图;对热水罐来说,我们要研究的是 U_1, U_2, U_3, T_1 和 T_2 (输入)对水位高度 H 和水温 T 的关系。

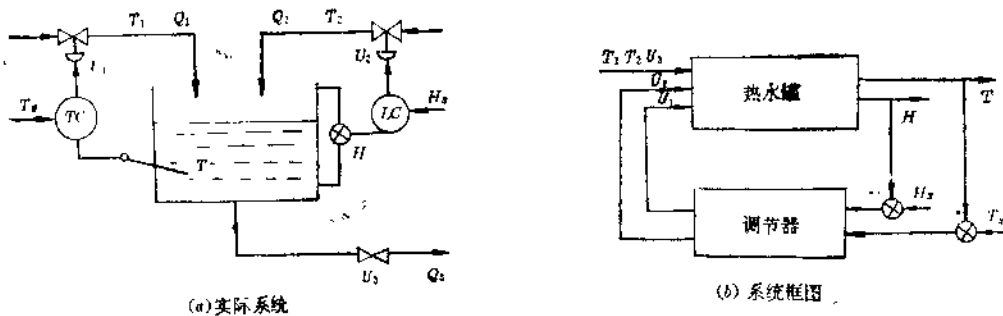


图 1-4 热水混合罐

罐内水位的变化是罐内储水量变化的反映,按物料平衡可列出下式:

$$F \frac{dH}{dt} = Q_1 + Q_2 - Q_3 \quad (1-2)$$

其中: F 是罐的截面积(容量),设为常数;

设 Q_1, Q_2 只与阀门的开度有关,即

$$Q_1 = Q_1(U_1) \quad (1-3a)$$

$$Q_2 = Q_2(U_2) \quad (1-3b)$$

Q_3 则不仅与阀门开度有关,且与水位高度 H 形成的压头有关,设水的重度不(随温度)变,则按水力学关系式,可导出下式:

$$Q_3 = k_0 U_3 \sqrt{H} \quad , \quad k_0 \text{是常数} \quad (1-3c)$$

对于罐内温度的变化，可按热量守恒关系写出相应的关系式，为简单起见，假设罐内各处温度是均匀的，且 $T = T_2$ ，忽略散热损失，则有：

$$\frac{d(C_T T)}{dt} = S_w \cdot Q_1 \cdot T_1 + S_w \cdot Q_2 \cdot T_2 - S_w Q_3 T \quad (1-4)$$

其中： S_w 是水的比热容，设为常数；

C_T 是罐的热容量，即罐中所有的水温度升高 1°C 所需的热量；由于罐中水位的变化，热容量也是变化的，可用下式：

$$C_T = S_w \cdot F \cdot H \quad (1-5)$$

$$\therefore \frac{d(C_T T)}{dt} = S_w \cdot F \cdot T \frac{dH}{dt} - S_w \cdot F \cdot H \frac{dT}{dt} \quad (1-6)$$

将式 (1-2) 和式 (1-5) 代入式 (1-6)，得：

$$FH \frac{dT}{dt} = Q_1(T_1 - T) + Q_2(T_2 - T) \quad (1-7)$$

写成状态方程形式：（令 $X_1 = H$ ， $X_2 = T$ ）

$$\begin{pmatrix} \dot{H} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, U_1, U_2, U_3, T_1, T_2) \\ f_2(X_1, X_2, U_1, U_2, U_3, T_1, T_2) \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

$$\text{其中：} \quad f_1 = \frac{1}{F} [Q_1(U_1) + Q_2(U_2) - Q_3(U_3, X_1)]$$

$$f_2 = \frac{1}{FX_1} [Q_1(U_1)(T_1 - X_2) + Q_2(U_2)(T_2 - X_2)]$$

$$\dot{H} = dH/dt, \quad \dot{T} = dT/dt, \quad \dot{X} = dX/dt$$

尽管热水混合罐不是一个很复杂的系统，并且在推导数学模型的过程中作了一定的假设，其结果还是一个不易求解的非线性微分方程组。

这一系统的储存性是很明显的，由于储存性和因果性，温度和水位一般不会有阶跃式的变化，且其变化不仅与输入有关，也与其初始状态有关。例如，若在某瞬间将 U_1 开大，其它均不变，罐中水位是否一定升高？水温是否一定下降？答案都是否定的，请读者自行考虑。

例1-2 分馏塔

分馏塔主要部分是各层塔板，对各层塔板可以写出相似的数学模型，这里仅以无进出料的塔板为例（图1-5）。 n 表示塔板序号， L_{n+1}

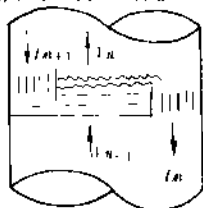


图 1-5 分馏塔板

是上一层塔板流到本层的液体流量， L_n 是本层流到下一层的液体流量， V_n 和 V_{n-1} 分别表示本层和下一层往上层的汽相流量，假设汽液两相只在塔板上进行传质与传热，可写出下述数学模型。

按物料平衡有：

$$\frac{dM_n}{dt} = L_{n+1} - L_n + V_{n-1} - V_n \quad (1-9)$$

按焓平衡有,

$$\frac{d(M_n h_n)}{dt} = L_{n+1} h_{n+1} - L_n h_n + V_{n-1} H_{n-1} - V_n H_n \quad (1-10)$$

按组份平衡有:

$$\frac{d(M_n X_{n,j})}{dt} = L_{n+1} X_{n+1,j} - L_n X_{n,j} + V_{n-1} Y_{n-1,j} - V_n Y_{n,j} \quad (1-11)$$

式中 M_n ——第 n 层塔板上的液相滞留量;

H ——汽相热焓;

h ——液相热焓;

$X_{n,j}$ ——第 n 层塔板, 第 j 个液相组分浓度;

$Y_{n,j}$ ——第 n 层塔板, 第 j 个汽相组分浓度。

$L_n, L_{n+1}, V_n, V_{n-1}$ (一般地说) 都是状态变量 M_n , 温度 (焓) 和组分的函数; 同时还要满足有关的规律, 例如:

$$(1) \text{ 相平衡规律: } Y_{n,j} = k_{n,j} X_{n,j} \quad (1-12)$$

其中 k 为相平衡常数

$$(2) \text{ 归一化方程: } \sum_{j=1}^{C_n} X_{n,j} = 1 \quad (1-13a)$$

$$(\text{露点与泡点方程}): \sum_{j=1}^{C_n} Y_{n,j} = 1 \quad (1-13b)$$

$$(3) \text{ 塔板水力学方程: } M_n = M_{n0} + k L_n^{3/2} \quad (1-14)$$

可以看到, 塔板数学模型不仅是非线性的, 随着组分数 C_n 的增加, 所需的方程数也增加, 再考虑到一个分馏塔往往有几十层塔板, 对一个分馏塔来说, 其方程个数常常在100个以上, 这些都为方程的求解带来不少困难。

例1-3 催化裂化装置提升管式反应器 (图1-6)

反应物料进入提升管后, 由于催化剂具有较高的温度而全部汽化, 在催化剂的作用下产生以裂化为主的吸热反应, 同时产生焦炭沉积在催化剂上, 使催化剂的活性降低, 沿提升管的高度, 活性逐渐降低, 反应速度逐渐降低, 反应温度也逐渐降低, 反应物的重度因不断裂化, 也沿着高度而降低, 因此, 这是一个典型的分布参数系统, 式 (1-1) 所示的关系式只能在沿高度的一个微元体内适用。

用 z 表示提升管的高度, 在微元体 dz 内的热平衡关系式可用下式描述: (见图1-6)

在 Δt 时间内, Δz 微元体内积蓄的热量是:

$$C \rho_0 \cdot \Omega \cdot \Delta z \cdot \Delta T_{ra} = Q_c$$

式中 C ——微元体的比热容;

ρ_0 ——微元体内物料的密度;

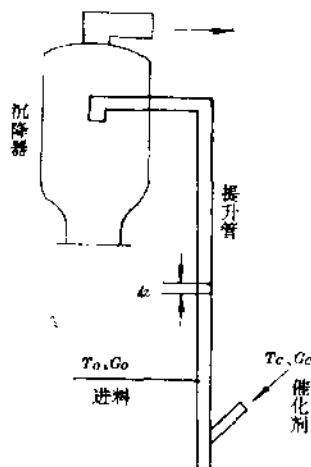


图 1-6 管式反应器

Ω ——提升管的截面积 (常数);

ΔT_{ra} ——微元体的温升。

流入的热量是:

$$Q_1 = (S_c G_o + S_o G_o) \cdot T_{ra} \cdot \Delta t$$

流出的热量是:

$$Q_2 = (S_c G_o + S_o G_o) (T_{ra} + \Delta T_{ra}) \cdot \Delta t$$

反应吸收的热量是:

$$Q_3 = G_o \cdot \Delta t \cdot H_r \cdot \Delta z$$

其中: S_c , S_o 分别是油气和催化剂的比热容;

H_r 是单位进料单位长度上反应所需热量。

微元体热平衡,

$$Q_o = Q_1 - Q_2 - Q_3$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ 得下述偏微分方程:

$$C \rho_o \Omega \frac{\partial T_{ra}}{\partial t} + (S_o G_o + S_c G_o) \frac{\partial T_{ra}}{\partial z} + G_o H_r = 0 \quad (1-15)$$

其边界条件是: $z=0 \quad T_{ra} = T_{ra0}$

$$z=L \quad T_{ra} = T_{ra1}$$

T_{ra0} 、 T_{ra1} 分别是提升管入口和出口处的温度。

实际上, C , ρ_o , H_r , S_o 等都是高度和温度的函数, 使方程 (1-15) 的求解变得很复杂。

如果将提升管按高度分为 n 段, 每段内的温度、重度等等都假设为常数, 则式 (1-15) 可简化为下述 n 个常微分方程:

$$\begin{aligned} C_i \rho_{oi} \Omega_i \frac{dT_{rai}}{dt} \\ = -(S_o G_o + S_c G_i) T_{rai} + (S_o G_o + S_c G_i) T_{rai+1} - G_o H_{ri} \end{aligned} \quad (1-16)$$

$$i=1, 2, 3, \dots, n$$

关于偏微分方程的求解方法可参阅有关文献, 上面给出的只是一种方法, 在不少实际情况下是可行的, 它将无穷维系统变成有限维系统, 但仍是一个非线性方程。

从以上三个实例可以看出, 很多实例都可以用常微分方程组来描述, 尽管它们已经作了不少假设和近似, 得到的仍是一个非线性方程组, 仍无一般的解析解。

第1-4节 状态空间模型

从机理上分析一个系统, 其输出 (可以是系统的状态, 也可以是系统状态变量的函数) 是由系统状态变化引起的, 有时也直接受系统输入的影响; 而系统的状态变量, 是由系统的输入变化引起的, 上述三例都说明了这一情况, 为了突出状态变量的变化, 在式 (1-1) 的基础上, 一般地说, 系统的数学模型也可表示为:

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad (1-17a)$$

$$Y = g(X, U, t) \quad (1-17b)$$

其中: X 是状态变量 Y 是输出变量; U 是输入变量; t 是时间; $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ 。

一般地说, X, Y, U 都是一组变量, 可用向量表示:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

X_i 表示系统第 i 个状态变量。若系统有 n 个状态变量, 它们之间一定是线性无关的, 以这 n 个线性无关的量为坐标, 就构成了一个 n 维线性空间, 称为状态空间。对一个确定的系统, 状态变量的个数, 也就是状态空间的维数是一定的; 它就是通过 $U(t_0, \infty)$ 和 $X(t_0)$ 可唯一确定系统在 $t \geq t_0$ 以后运动状态所需的初始状态 $X(t_0)$ 的个数。因此, 若有 n 个线性无关的状态, 系统的维数就不能是 $n+i$ 或少于 n 个, 否则系统的状态就不能唯一确定了, 由于 n 个状态变量是互相独立的, 由此 n 个变量可张成 n 维向量空间, 称为状态空间。

系统的 r 个输出 (通常是指可以直接测量得到的) 和 m 个输入也应分别是互相独立的。因此以它们为坐标, 也可以组成相应的 r 维输出空间和 m 维输入空间。

由于 X, U, Y 分别属于 n 维状态空间, m 维输入空间和 r 维输出空间, 系统可用图 1-7 所示的空间关系来表示, 并且写成:

$$X \in R^n, Y \in R^r, U \in R^m$$

式 (1-17) 表示的就是各空间之间变换关系, 其中 t 是时间, 表示这种变换关系是随着时间变化的, 称为时变的。

若式 (1-17) 有解存在, 则可一般地表示为:

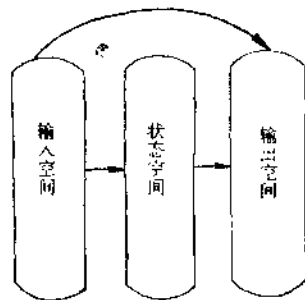


图 1-7

$$X(t) = \phi[t, t_0, X(t_0), U(t)] \quad (1-19a)$$

$$Y(t) = \psi[t, t_0, X(t_0), U(t)] \quad (1-19b)$$

若系统在 t_0 时刻是松弛的, 则有:

$$X(t) = \phi[t, t_0, U(t)] \quad (1-20a)$$

$$Y(t) = \psi[t, t_0, U(t)] \quad (1-20b)$$

若系统特性不随时间变化, 即对任意大小的常数 a 有:

$$\phi[(t-a), (t_0-a), U(t)] = \phi[t, t_0, U(t)] \quad (1-21a)$$

$$\psi[(t-a), (t_0-a), U(t)] = \psi[t, t_0, U(t)] \quad (1-21b)$$

则称系统是定常的或时不变的, 这时, 可以 t_0 为时间坐标原点, 则系统的解只与 $t, X(0)$ 和 $U(t)$ 有关, 而不失一般性。这时系统的状态空间模型可表示为:

$$\dot{X}(t) = f(X, U) \quad (1-22a)$$

$$Y(t) = g(X, U) \quad (1-22b)$$

若系统的解具有如下特性:

$$\begin{aligned} \text{设} \quad & \phi_1[t, t_0, U_1(t)] \text{ 和 } \phi_2[t, t_0, U_2(t)] \\ & \psi_1[t, t_0, U_1(t)] \text{ 和 } \psi_2[t, t_0, U_2(t)] \end{aligned}$$

分别为 $U_1(t)$ 和 $U_2(t)$ 引起的系统的运动,当 U_1 和 U_2 同时作用于系统时,即由 $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2)$ 引起的运动为:

$$\phi[t, t_0, (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2)] = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \quad (1-23a)$$

$$\psi[t, t_0, (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2)] = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \quad (1-23b)$$

其中: α_1 和 α_2 为任意常数(向量)。

则称系统是线性的,它满足式(1-23)所示的叠加原理。

从式(1-23)可看出,对于线性系统,若系统不是松弛的,由初始状态 $X(t_0)$ 引起的运动,也可以用叠加原理加到系统松弛时的运动轨线上去。

满足叠加原理的线性系统给运算带来很多方便,因为这时各空间的变换关系都是线性的,可用相应维数的矩阵来表示,系统的模型为:

$$\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (1-24a)$$

$$Y = C(t)X(t) + D(t)U(t) \quad (1-24b)$$

其中: $X \in R^n, Y \in R^r, U \in R^m$,

$A(t), B(t), C(t), D(t)$ 相应地是 $n \times n, n \times m, r \times n$ 和 $r \times m$ 矩阵。

如果线性系统是非时变的(定常的),则有下列数学描述:

$$\dot{X} = AX(t) + BU(t) \quad (1-25a)$$

$$Y = CX(t) + DU(t) \quad (1-25b)$$

其中: A, B, C, D 均为相应维数的常数矩阵。

对于式(1-24)和式(1-25)描述的线性系统,常常用图1-8来表示其各变量之间的关系。其中“ $\int$ ”是积分符号,用来描述 X 和 $\dot{X}$ 的关系。这里所以用积分而不用微分直接描述 $\dot{X}$,是因为微分在实际实现时,将对输入的高频噪声放大,是一种不合适的实现方法,而图1-8所示的积分,则比较适合于实现,它实际上就是用模拟计算机模拟系统的框图,故亦称为系统的实现。

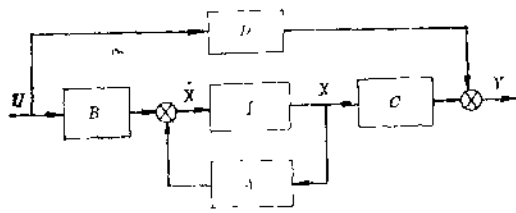


图 1-8

由于线性系统满足叠加原理,使得数学运算方便的多,并且可以有一般的解析解存在,在系统的分析研究和模型的应用中,只有线性系统有比较完整的理论。但是,实际系统往往都是非线性的,如1-3节各例所示。因此,如何将非线性系统线性化,并利用线性化以后的

运算结果来分析设计系统,成为一个十分重要的问题。

线性化的基本思路是:一个实际工作的系统,通常是在其平衡状态(稳定状态)附近因受各种干扰而运动的,运动的幅度并不很大,在这样一个较小的运动范围内,各变量之间的关系可以用线性关系近似。

从数学上说,系统处于平衡状态时,其状态变量 X 是不随时间变化的,即 $\dot{X}=0$,故由(1-17)式有:

$$f(X_e, U_e, t) = 0 \quad (1-26a)$$

$$Y_e = g(X_e, U_e, t) \quad (1-26b)$$

其中:下标 e 表示平衡状态