概率与数理统计教学指导

●华南理工大学
工程数学教研组编
●华南理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率与数理统计教学指导/华南理工大学工程数学教研组编.—广州:华南理工大学出版社,1996.9

ISBN 7-5623-1026-2

Ⅰ.概…

Ⅱ.华…

Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.O21

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山·邮编 510641)

责任编辑:李彩英

广东省新华书店经销

广东封开县人民印刷厂印装

1996 年 9 月第 1 版　1997 年 6 月第 2 次印刷

开本:787×1092　1/32　印张:10.5　字数:238 千

印数:5001—8000

定价:13.50 元

前 言

随着国民经济和科学技术的发展,“概率与数理统计”在工农业生产及科学技术中的应用日益广泛.因此,它是工科学生必修的工程数学课程之一,由于“概率与数理统计”的概念和方法有其独特之处,读者在解答“概率统计”的习题时往往感到一定的困难.为此,华南理工大学工程数学教研组的老师经过多次的讨论,结合十多年来对该课程的教学实践经验编写本书,目的在于从解答“概率与数理统计”习题的思路及方法上给读者以指导和帮助,以弥补教材因篇幅所限,有些概念及技巧不便于详细叙述的不足,从而提高学生应用“概率与数理统计”的知识解决各种实际问题的能力.

本书共有 11 章,第 1～7 章为概率论方面的内容,第 8～11 章为数理统计方面的内容,书中每一章分四部分编写:一、内容提要(把该章有关的定义定理公式作简要的叙述),二、基本要求,三、例题分析,四、练习题.

例题及练习题尽量选取与“概率与数理统计”习题库中类似的题目.书后还附有该课程统考的几份考题,供读者参考.

本书可作为工科院校学生学习“概率与数理统计”课程的指导书,也可作为“概率与数理统计”课程自学者的辅导、参考书.

出版本书得到华南理工大学教务处及应用数学系的关怀

与支持，贺德化教授主审本书并提出宝贵意见，还有一些同志对本书也提出一些很好的意见，在此一一表示谢意．

本书由孙爱霞、庄楚强任主编，孙爱霞编写 1，2，3 章、陈小莹编写 4，5 章、陈树英编写 6，7 章、庄楚强编写 8，9，10，11 章．

本书虽经多次修改，但由于编者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，希望读者批评指正．

目　　录

第一章　随机事件与基本空间

一、内 容 提 要

(一) 随机试验

具有下面三个特性的试验称为随机试验(简称试验)：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但试验的一切可能结果是预先可以明确的；

(3) 每次试验之前不能预先判断哪一个结果会发生.

(二) 随机事件与基本事件

在随机试验中，对一次试验可能发生也可能不发生而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情，称为此随机试验的随机事件，简称事件. 通常用字母 $A, B, C\cdots$ 表示事件.

对于某个随机试验，它的每一个可能发生的结果都是一随机事件，且它们是这个试验的最简单的随机事件，称这些最简单的随机事件为这一随机试验中的基本事件.

可以由基本事件组合而成的事件称为复合事件. 只要复合事件中有一个基本事件出现，则说这个复合事件出现.

(三) 基本空间

设有某个随机试验 E, E 的所有基本事件为 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$,则由 E 的所有基本事件所组成的集合称为 E 的基本空间,记为 U,即 $U=\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$. 基本空间也称为样本空间,而基本事件也称为样本点.弄清楚一个随机试验的基本事件及基本空间对于计算事件的概率是很重要的.

(四) 必然事件与不可能事件

在一定条件下(在某一试验中)必定出现的事情称为必然事件,记为 U;而在一定条件下(在某一试验中)必定不出现的事情称为不可能事件,记为 Φ. 必然事件是由试验的所有可能的结果构成的事件,不可能事件是不包含任何试验结果的事件,即每一次试验都不会出现.把基本空间 U 也看作一必然事件,因为在每一次试验中,必须出现 U 中的某一基本事件.

(五) 事件之间的相互关系

1. 包含关系

设 A, B 为二事件,如果事件 A 出现必然导致 B 出现,则称事件 B 包含事件 A,记作 $B \supset A$(或 $A \subset B$),或称 A 包含在 B 中,此时称 A 是 B 的子事件.

2. 相等关系

若事件 A 包含事件 B,而事件 B 又包含事件 A,则称 A, B 两事件相等,即若 $A \supset B$ 且 $B \subset A$ 则 $A=B$.

3. 互不相容事件

若 A, B 两事件不能同时出现,则称 A, B 为互不相容事

件(或称 A 与 B 互斥).

4. 对立事件

A,B 为二事件,若 A,B 互不相容,而且在任何一次试验中 A,B 必然有一个出现,则称 A,B 互为对立事件(或称 A,B 互逆).把 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

(六) 事件的运算

1. 事件的和(并)

"事件 A,B 中至少有一个出现"的事件,称为 A 与 B 的和,或称 A 与 B 的并,记作 $A\cup B$.若 A,B 互不相容,则 $A\cup B$ 可记作 $A+B$.

"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件出现"的事件,称为这 n 个事件的和(并)记作:$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 而"可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 中至少有一个事件出现"的事件称为可列多个事件的和,记作:$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$

2. 事件的积(交)

"事件 A 与事件 B 同时出现"的事件,称为事件 A 与 B 的积或称 A 与 B 的交,记作:$A\cap B$ 或 AB.

"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时出现"的事件称为这 n 个事件的积(交)记作:$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$

"可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时出现"的事件称为这可列多个事件的积,记作:$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 事件的差

"事件 A 出现而 B 不出现"的事件称为 A 与 B 之差，记作：$A-B$(由所有包含在 A 中而不包含在 B 中的试验结果构成).

(七) 事件的运算法则

对于任意三个事件 A,B,C，满足下列运算律：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$;

$AB=BA$.

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(AB)C=A(BC)$.

(3)分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC$.

(4)对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$;

$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

推广：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;　$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

二、基 本 要 求

1. 理解随机试验的特征.

2. 会表达简单的随机试验的有关随机事件.

3. 理解一个随机试验的基本空间及基本事件.

4. 理解事件之间的关系，并掌握事件的"和"、"积"、"对立事件"的运算.

5. 掌握事件的运算律.

三、例 题 分 析

例 1 盒中装有红、黄、白、黑四个不同颜色的球，现从盒中任取一球后，不放回盒中，再从盒中任取一球，问这样两次取球的试验结果有多少个？具体写出这个随机试验的基本空间.

解 盒中装有的四个球，颜色不相同，由于第一次取出的球不再放回作第二次取出，因此两次取出的球的颜色不会相同.第一次取球，盒中任一个都可能被取到；第二次取球，只能从盒中剩下的三个球中来取.这样的试验应该考虑取到的两个球的先后顺序，因此试验的结果包括 $P_4^2=4\times3=12$ 个.设(红,白)表示第一次取到红球，第二次取到白球，则其基本空间为：$U=\{$(红、黄),(红、白),(红、黑),(黄、红),(黄、白),(黄、黑),(白、红),(白、黄),(白、黑),(黑、红),(黑、黄),(黑、白)$\}$.

说明 例 1 是属于不放回抽样的试验.这一类试验要考虑抽取到的球的先后次序.如果同是例 1 的盒中四个球，但第一次取出一个球后放回盒中再作第二次取球，这样的两次取球，属于有放回的抽样的试验.因为，第一次取出再放回去，所以每一次取球，盒中四个球中任一个都可能被取到，所以包括有 $4\times4=4^2=16$ 个试验结果.相同颜色的球第二次也有可能取到.即 n 个不同的球作有放回的抽取 r 次($r\geqslant2$)的试验结果包括 n^r 个.而作不放回抽样抽取，r 次的试验结果包括 A_n^r(即 P_n^r)个.

如果取球的方式改为一次从盒中任取两个球，这样抽取的两个球没有先后顺序问题.所以，从盒中 4 个不同颜色的球

中任取 2 个球，这个试验结果包括 $C_4^2=\frac{4\times 3}{2!}=6$ 个，即基本空间中包含六个基本事件.

例 2 在图书馆中按书号任选一本书，设 A 表示"选的是数学书"，B 表示"选的是中文版的"，C 表示"选的是 1990 年以后出版的"，问(1) $\overline{C}\subset B$ 表示什么意思？(2) $\overline{A}=B$ 表示什么意思？

分析 $\overline{C}$ 是 C 的对立事件，故 $\overline{C}$ 表示"选的是 1990 年以前出版的书"，同样，$\overline{A}$ 是 A 的对立事件，故 $\overline{A}$ 表示"选的不是数学书". $\overline{C}\subset B$ 表示 $\overline{C}$ 发生必推出 B 发生，而 $\overline{A}=B$ 即 $\overline{A}\subset B$ 且 $B\subset\overline{A}$.

解 (1) $\overline{C}\subset B$ 表示"馆中 1990 年以前出版的书都是中文版的".

(2) $\overline{A}=B$ 表示"馆中的非数学书都是中文版，且中文版的书都不是数学书"，即馆中所有数学书都不是中文版.

例 3 证明：(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；(2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

证明：(1) 事件 $\overline{A\cup B}$ 是事件 $A\cup B$ 的逆事件，而 $A\cup B$ 表示事件 A,B 中至少有一事件发生，它的逆事件就是 A,B 两事件都不发生，即 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生，故由 $\overline{A\cup B}$ 发生推出 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生，即 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$；再由 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生，意味着 A,B 两事件都不发生，也就是说 A,B 中至少有一个事件发生是不可能的，即 $\overline{A\cup B}$ 发生，即 $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. 故有

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

(2) 设 $\overline{A}=A_1,\overline{B}=B_1$，则

$$\overline{A}_1=\overline{\overline{A}}=A;\overline{B}_1=\overline{\overline{B}}=B;$$

由上面已证明的(1)有

$$\overline{A_1\cup B_1}=\overline{A}_1\cap\overline{B}_1\Rightarrow\overline{\overline{A}_1\cap\overline{B}_1}=\overline{\overline{A_1\cup B_1}}=A_1\cup B_1$$

即 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ （$\because$ 设 $A_1=\bar{A}, B_1=\bar{B}$）

说明 ①由条件 A 可推出条件 B，记 $A\Rightarrow B$. ②证明两个事件 A,B 相等，通常是由 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$. 即

$$\left.\begin{array}{l}\text{由 } x\in A\Rightarrow x\in B\text{，则 } A\subset B\\ \text{由 } x\in B\Rightarrow x\in A\text{，则 } B\subset A\end{array}\right\}\Rightarrow A=B$$

例 4 同时抛掷两颗骰子，以 (x,y) 表示第一，第二颗骰子出现的点数，以 A 表示事件“两颗骰子出现点数之和为奇数”，B 表示“两颗骰子出现点数之差为零”，C 表示“两颗骰子出现点数之积不超过 20”. 问：(1) $B-A$；(2) BC；(3) $B\cup\bar{C}$ 表示什么事件？

分析 (1) $B-A$ 表示 B 出现而 A 不出现的事件，即两颗骰子出现点数之差为零，即这两个骰子出现点数相同，其和必为偶数（$\because A$ 不出现）. (2) BC 表示事件 B,C 同时出现，即两颗骰子出现点数之差为零且这两骰子出现的点数之积不超过 20. (3) $B\cup\bar{C}$ 表示 B 与 $\bar{C}$ 至少有一个出现，即两个骰子出现的点数之差为零或两个骰子出现点数之积超过 20.

解 (1) $B-A$ 表示事件：满足 $x=y$ 因而必满足 $x+y=2x$ 为偶数的数对 (x,y) 的集合. 因为 x,y 取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6. 故 $B-A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

(2) BC 表示事件：满足 $x=y$ 及 $xy\leqslant 20$ 的点 (x,y) 的集合即 $BC=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(3) $B\cup\bar{C}$ 表示事件：满足 $x=y$ 或者 $xy>20$ 的点 (x,y) 的集合 即

$$B\cup\bar{C}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,6),(5,6)\}.$$

例 5 任取一自然数 m，设事件 $A=\{m$ 为偶数$\}$，

$B=\{m$ 为 5 的倍数$\}$，$C=\{m\leqslant 20\}$. 具体写出下列各式表示的集合：(1)$A\cap B$；(2)$B\cap C$.

分析 A 表示 m 为偶数的集合，B 表示 m 是 5 的倍数的集合，故 AB 表示既是偶数又是 5 的倍数同时出现的事件；同理 BC 应是 5 的倍数且不超过 20 同时出现的事件.

解 (1) $A\cap B=\{10,20,30,40,\cdots\}$

$=\{10n\mid n\in N\}$ N 为自然数集合.

(2) $B\cap C=\{5,10,15,20\}$.

例 6 设 A, B, C 为任意三个事件，写出下列事件的表达式：(1)恰有一个事件发生；(2)三个事件都不发生.

分析 恰有一个事件发生，即三个事件中有一个发生，其余两个事件不发生，如 A 发生，B, C 不发生，以 $A\bar{B}\bar{C}$ 表示；若 B 发生，A, C 不发生以 $B\bar{A}\bar{C}$ 表示. 而这一个事件的发生可能是 A 或 B 或 C.

若三个事件都不发生，即 A, B, C 的对立事件同时发生.

解 (1) 事件 A, B, C 中恰有一事件发生，表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(2) 三个事件都不发生表达式为：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

例 7 在实轴上随机地取一点 x，设事件 $A=\{x\leqslant 8\}$，$B=\{1<x\leqslant 10\}$，具体写出 $A\cup B$ 所表示的集合.

解 $A\cup B=\{x\leqslant 8\}\cup\{1<x\leqslant 10\}$

$=\{x\leqslant 10\}$

例 8 同时投掷两颗骰子，用 A_k 表示事件“出现点数之和为 k”$(2\leqslant k\leqslant 12)$；用 B_n 表示事件“出现点数之差为 n”，试用 A_k, B_n 表事件 $A=\{$两颗骰子出现的点数最小者为 3$\}$.

分析 投一颗骰子，出现的点数为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 而投两颗骰子出现的点数最小者为 3. 设投掷两个骰子出现的点数

分别为 x, 3, 则以 A_k, B_n 表示事件 A, 按题意要满足 $x+3=k$, $x-3=n(3\leqslant x\leqslant 6)$, 故当 x 分别取 3,4,5 时, k, n 对应的分别取 6,0;7,1;8,2;9,3.

解 $A=A_6B_0\cup A_7B_1\cup A_8B_2\cup A_9B_3$

例 9 用摸球模型造一例,指出基本空间及各种运算.

解 设袋中有三个球,编号为 1, 2, 3, 每次从袋中摸一球,则基本空间有三个基本事件,摸到 1 号球或 2 号球或 3 号球,若以编号表示该编号的球,则基本空间 $U=\{1,2,3\}$. 设事件 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{3\}$, 则 $\bar{A}=\{3\}$, $A\cup B=\{1,2,3\}$, $A\cap B=\{1\}$, $A-B=\{2\}$, $A+C=\{1,2,3\}$.

例 10 化简 $(A\cup B)(A\cup C)$

解 $(A\cup B)(A\cup C)=AA\cup AC\cup BA\cup BC$

$\because$ $AA=A,\ AC\cup BA\subset A$

$\therefore$ $AA\cup AC\cup BA=A$

$(A\cup B)(A\cup C)=A\cup BC.$

四、练　习　题

1-1 抽查 10 件产品,设 A 表示“至少有一件次品”, B 表示“次品不少于两件”,问 $\bar{A}$, $\bar{B}$ 分别表示什么事件?

答案: $\bar{A}=\{$一件次品也没有$\}$, $\bar{B}=\{$次品不多于一件$\}$.

1-2 从自然数 1 至 10 中任取一数,设 A 表示“取得的数是偶数”, B 表示“取得的数小于 5”,问 $\overline{AB}$ 表示的事件是什么?

答案: $\overline{AB}=\{$取的数是 1,3,5,6,7,8,9,10 中的一个$\}$.

1-3 设 A, B, C 为任意三个事件,写出下列事件的表达式:(1)恰有两个事件发生;(2)三个事件同时发生;(3)至少有一个事件发生.

答案:(1) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC$;(2) ABC;(3) $A\cup B\cup C$.

1-4 在实轴上随机地取一点,设事件 $A=\{x\leqslant 5\}$, $B=\{x>3\}$,

$C=\{2\leqslant x<10\}$具体写出下列各式表示的集合:(1)$A\cap B$;(2)$A\cup C$;(3)$A\cap\bar{B}$.

答案:(1)$3<x\leqslant5$;(2)$\{x<10\}$;(3)$\{x\leqslant3\}$.

1-5 在实轴上随机地取一点 x,设事件 $A=\{x\leqslant10\}$,$B=\{x\geqslant2.5\}$,$C=\{1<x\leqslant20\}$问:$(A\cap C)\cup B$ 及$(A\cup B)\cap(C\cup B)$表示什么事件?

答案:表示事件$\{x>1\}$.

1-6 如果 $A\subset B$ 则$AB=$?;$A\cup B=$? 又当 A,B 满足什么关系时有 $A\cup B=A$ 且 $AB=A$.

答案:$AB=A$;$A\cup B=B$;当 $A=B$ 时.

1-7 在纸牌游戏中,分别以 $N_k,E_k,S_k,W_k(k=1,2,3,4)$表示北家,东家,南家,西家至少有 k 个"A"(已知一副牌中共有 4 个 A),问下列事件中西家有几个"A":(1)$\overline{W}_1$;(2)N_2S_2;(3)$\overline{N}_1\overline{S}_1\overline{E}_1$.

答案:(1)0;(2)0;(3)4.

第二章　随机事件的概率

一、内 容 提 要

(一) 概率的三种定义

(1)概率的统计定义　设事件 A 在 n 次试验中出现了 r 次，则比值 $\frac{r}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中出现的频率. 而在同一组条件下所作的大量重复试验中，事件 A 出现的频率总是在区间 $[0,1]$ 上的一个确定的常数 p 附近摆动，并且稳定于 p，则 p 称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

(2)古典概率定义　设随机试验的基本事件总数为 n(n 为有限数)，且每个基本事件发生的可能性相同，事件 A 所包含的基本事件个数为 r($r\leqslant n$)，则事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为 $\frac{r}{n}$.

(3) 几何概率定义　设随机试验的基本事件总数是无限的，且可用某一区域 G 上的点表示(如直线上的区间，平面区域或空间的区域)，而导致事件 A 发生的区域为 g($g\subset G$)，$\mu(G)$ 及 $\mu(g)$ 分别表示区域 G，g 大小的度量值(可以表示 G、g 的长度、面积或体积)，则事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\mu(g)}{\mu(G)}.$$

（二）概率的基本性质

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$　不可能事件 Φ 的概率为零，即 $P(\Phi)=0$；而必然事件 U 的概率为 1 即 $P(U)=1$.

(2) 设 A 的对立事件为 $\bar{A}$，则 $P(A)=1-P(\bar{A})$；若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

(3) 若 A,B 为两个互不相容的事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

对于任意两个事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推广：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件，则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k=n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(\sum_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

（三）排列、组合的有关知识

由于本章学习需要用到有关排列、组合的知识，因此在这里把这方面的知识概括如下：

1.排列

(1) 选排列：从 n 个不同的元素中，每次取 $r(r<n)$ 个元素按一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中每次取出 r 个元素的选排列.所有不同排列的总数用 A_n^r 表示，则有

$$A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$