梁文沛　黄午阳　编

初等概率论

上海科学技术文献出版社

初　等　概　率　论

梁文沛　黄午阳　编

上海科学技术文献出版社

初等概率论

梁文沛　黄午阳 编

*

上海科学技术文献出版社出版
（上海市武康路二号）
新华书店上海发行所发行
宜兴南漕印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 6　字数 141.000
1982 年 9 月第 1 版　1984 年 7 月第 3 次印刷
印数：46,001—66,600

书号：13192·43　　定价：0.75 元

《科技新书目》75-201

出 版 说 明

本书是为大专班工程数学'概率论课程编写的教材。

对于初学这门课的同志来说，往往感到习题演算相当困难。为了帮助初学者较快地渡过这一关，我们主要是以一些典型问题的分析，介绍初等概率论的基本概念和基本方法。

在编写时，我们还兼顾了自学者的要求，所以教学时请根据大纲、学时数以及学员特点，对讲授的内容有所选择。例如，对少学时的概率论课程，讲授第一章时，以将多数例题及习题留作课外阅读材料为宜。古典概型问题使许多初学者感到困难，第一章的材料如能对读者解算一般问题有所裨益，这是我们所盼望的。

我们在编写过程中，得到了周旦明同志的帮助，在此表示感谢。

书中如有不当之处，敬请读者批评指正。

编 者

1981.10.

目　录

预 备 知 识

§1 集合与集合运算

1. 集合

人们的认识与实践活动离不开集合的概念，尽管可能并没有明确意识到，实际上每个人都在和集合打交道．譬如，一个班级集体是一些学生的集合，太阳系是太阳和它的行星等的集合，第三世界是发展中国家的集合，如此等等．

集合是数学的最基本的概念，因此我们并不能满足于有上述直观的印象，还需要熟悉与集合有关的符号、术语、运算法则．在预篇里，我们并不打算对集合论进行深入的讨论，我们将用直观的方法，辅以必要的演绎，来介绍初等概率论中用得到的集合论知识．

我们认定集合由一些可鉴定的、可区别的对象所组成，这些对象称为集合的元素．譬如说木星这一对象，我们可以鉴定得出，它是太阳系的一个元素，而不是组成"第三世界"这个集合的元素．又譬如说，1，2，1，2，5 一组五个数字并不组成集合，因为上下文中并没有给出两个数字"1"的区别，换句话说，集合里不允许元素重复．

集合通常用大写字母 $A, B, C, \cdots, \Omega$ 表示，集合里的元素通常用小写字母 $a, b, c, \cdots, \omega$ 表示．有时需要把集合本身也作为另一集合的元素，譬如说十个篮球运动员组成一个篮球队，队是队员的集合．十个篮球队又组成一个协会，那么球队就是协会中的元素，协会是球队的集合．集合为元素所组成的集合

一般称为类，为了区别集与类，常用大写花体字母 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 表示类.

对象 a 是 A 的元素，如用符号表示，可写成 $a \in A$，读作 a 属于 A，或 A 含 a.

若对象 a 不是 A 的元素，如用符号表示可写成 $a \overline{\in} A$，读作 a 不属于 A 或 A 不含 a.

对于任何给定的对象 a 和确定的集合 A，$a \in A$ 或 $a \overline{\in} A$，两者必居其一.

事实上，我们所讨论的集合都是由具体的、满足某些共性条件的对象所组成的. 判断一个对象 a 是不是某一集合 A 的元素，在集合 A 中的元素全部罗列出来的情况下，是很方便的. 因为此时只要在这些罗列出来的元素里，看看是否能找到和对象 a 相同的元素，或者在给出 A 中元素的共性条件下，鉴定 a 是否适合这个条件，如果适合条件，则 $a \in A$，反之，$a \overline{\in} A$.

因此，为了认识一个集合，就有必要把集合表示出来，集合的表示方法有两种，一种是罗列法，另一种是描述法.

罗列表示法：把集合的所有元素排成一行，外加花括弧号用以表示这个集合，例如 $\{2, 4, 6, 8\}$ 用以表示由 2, 4, 6, 8 四个数字组成的集合. $\{6, 4, 8, 2\}$ 也表示这个集合，所以用集合的元素表示集合时，元素出现的次序可以随意. 这种表示方法对仅含有限几个元素的集合是有效的. 有时，罗列表示法还用上简略号'……'. 例如 $\{1, 2, \cdots\cdots, 10000\}$ 可用来表示不小于 1 及不大于 10000 的所有正整数的集合. 在不致引起误会的场合下，带简略号的罗列表示还是有效的，但通常要有上下文解释以防止误会. 譬如说，$\{1, 2, \cdots\cdots, 10000\}$ 就可以理解为别的集合. 这种罗列法，有时显得非常费时费纸，有时则难以办到，例如所有素数的集合，你怎么将它的元素罗列出来呢？最常用的还是

描述表示法．先从例子说起，$\{\omega: \omega$ 是素数$\}$可用来表示由所有的素数组成的集合．“:”前的字母 ω 表示对象，“:”后的语句是一个条件，即集合中所有元素的共性条件．一般地，$\{\omega: \omega$ 的某一共性条件$\}$，应理解为适合该共性条件的那些对象的全体．譬如说，如果联合国是指某些国家的集合的话，那么，$\{\omega: \omega$ 是加入联合国的国家$\}$与联合国理所当然的是同一事物．

例 1 平面上有两定点 P, Q，该平面上的集合$\{M: PM=QM\}$表示什么？

这个集合的描述表示是有上文解释的，即 P, Q, M 都是平面上的点，P, Q 是定点．按平面几何的定理，动点与两定点等距，则动点的轨迹是两定点连线的垂直平分线．如果直线理解为点的集合的话，那么，$\{M: PM=QM\}$ 表示线段 PQ 的垂直平分线．

例 2 如果球面理解为点的集合的话，三维空间中的点集$\{M: O$ 为定点，r 为常数，$OM=r\}$表示球心在 0，半径为 r 的球面．

例 3

$\{x: x$ 是实数，且 $3 \leqslant x < 5\}$就是通常的半开闭区间$[3, 5)$．

下文中为叙述简便起见，常常省去“:”及“:”前的字母符号．例如用$\{x$ 是正整数，且 $3 \leqslant x < 5\}$来代替$\{x: x$ 是正整数，且 $3 \leqslant x < 5\}$，而且本书用 N, M, n, m 代表非负整数．在不致引起误会的场合，以后不再加以说明．譬如说 $\{3 \leqslant n < 5\}$ 和 $\{x$ 是正整数，且 $3 \leqslant x < 5\}$是同一集合．

例 4 $\{2n\}$表示包括 0 在内的所有偶数的集合，

$\{2n+1\}$表示奇数集合．

细心的读者也许会发现，上述几个例子里已经用到了集合相等的概念，例如$\{2n+1\}=\{$奇数$\}$，那么两个集合相等究竟是

什么含义？

等式 $A=B$，就是指 A 中任一元素均属于 B，且 B 中任一元素均属于 A.

若 A 中的任一元素都是 B 中的元素，可知 A 是 B 的一部分（B 包含 A），反之，B 中的任一元素都是 A 的元素，即可知 B 是 A 的一部分（即 A 包含 B），这样一来两集合 A，B 互相包含，直观上已非常清楚地得出，A，B 两集合一定全同.

若 A 包含 B，则记作 $A\supset B$，此时 B 称为 A 的子集. 因此，$A=B$ 的必要充分条件是 $A\supset B$ 同时 $A\subset B$.

在我们讨论集合间的包含关系时，有一个特殊的集合 Ω 非常重要，在某一类型具体问题里，所有的集合 A 都是这种特殊集合 Ω 的子集：$A\subset\Omega$. Ω 就称为这一类具体问题中的全空间，例如讨论马的问题，就可以把马族或全体动物当作 Ω，凡马的集合，如蒙古马，牝马等集合都是 Ω 的子集，集合论里，这种集合又称为万有集.

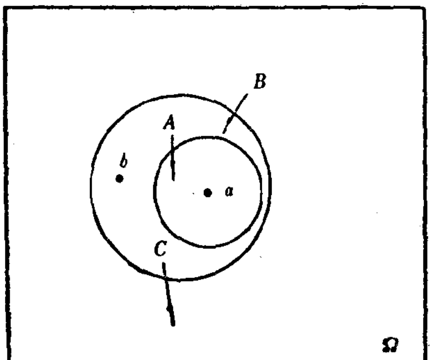


图 1-1

本节中主要的方法是用直观的示意图表示集合间的关系，其中 Ω 用一个矩形表示，它的元素是矩形内部的点，Ω 的子集用矩形中由一个或多个闭曲线围成的图形内部或外部来表示，如图 1-1.

其中符号 $B\to$ 指明用大圆的内部表示 B 集合，

同样，$A\to$ 指明用小圆的内部表示 A 集合.

$C\to$ 指明用大圆外部表示 C 集合.

由示意图可知，对任意的 $a\in A$，都有 $a\in B$，故 $A\subset B\subset \Omega$，然而，$b\in B$，$b\overline{\in} A$，可以从此知道：$A\neq B$.

2．集合运算

（一）交

A、B 中既属于 A 又属于 B 的元素称为集合 A 与 B的公共元素，将 A与 B所有的公共元素组成一个集合 C，这种手续叫做交运算．C 称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$(或 AB)．

图 1-2 中，由粗曲线围成的阴影部分是 $A\cap B(AB)$，

显然

$$AB=BA \tag{1-1}$$

(用类似数的乘积的方式表示交运算当然方便些，但希望不要误解)

$AB=BA$，说明交运算满足交换律．

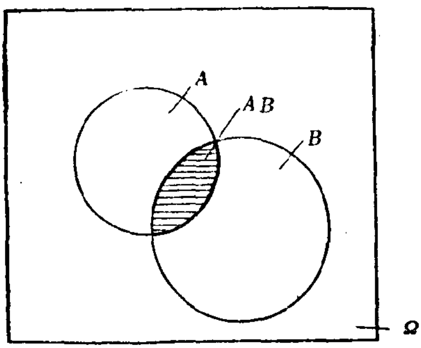


图 1-2

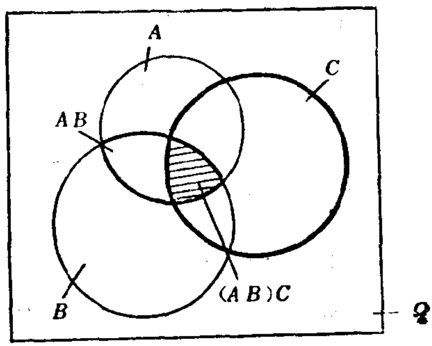


图 1-3

图1-3 与图 1-4 是集合 A，B，C 的同一个示意图．图 1-3 中两个粗曲线内部分别表示 C 及 AB，它们的公共部分用阴影示意，表示$(AB)C$.

图 1-4 中两粗曲线内部分别表示 A 及 BC，阴影部表示 $A(BC)$.

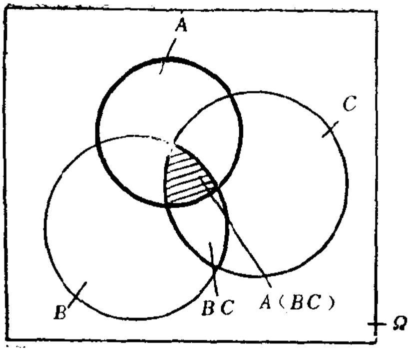


图 1-4

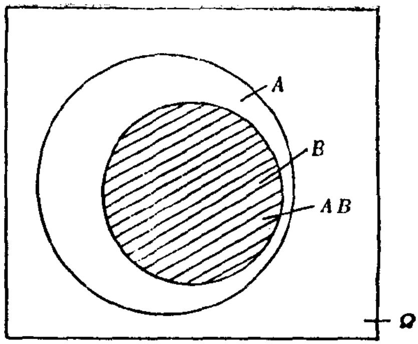


图 1-5

比较图 1-3 及图 1-4，显然有

$$(AB)C = A(BC) \tag{1-2}$$

式(1-1)及(1-2)说明交运算满足交换律及结合律，也就意味着交运算中无须顾虑参与运算的集合出现的次序与运算先后的次序，因此(1-2)中的括弧不必标出.

$$A(BC) = (AB)C = ABC.$$

式(1-2)的演绎证明：

若任意 $\omega \in A(BC)$，则 $\omega \in A$ 且 $\omega \in BC$，即 $\omega \in A$，同时，$\omega \in B$，同时 $\omega \in C$，即 $\omega \in AB$，同时 $\omega \in C$，所以 $\omega \in (AB)C$，以上即已证得

$$A(BC) \subset (AB)C$$

同理，证得 $(AB)C \subset A(BC)$

根据集合相等的必要充分条件有：$(AB)C = A(BC)$.

这种证明方法很初等，然而也是证明集合等式中最常见的有效方法，以下关于集合的其他运算法则，都可以用此法证明，我们在本节中不一一给出了，而改用图示直观说明.

又如关系式 $AB = B$ 是关系式 $A \supset B$ 的一等价表示. 这点可从图 1-5 看出：阴影部分既可表示 AB 又可表示 B. 同样

$$B \cap B = BB = B,$$

以上各图均表示集合间有公共元素的情形，这又叫做集合相交．为了证明集合间的交运算不论在何种情况下均可进行，我们定义一种叫做空集合的特殊集合，这样会带来很大的方便．

图1-6中 A，B 无公共元素，我们又叫它们不相交．此时一样也可进行交运算，AB．只不过交集合 AB 此时并不含有任何元素，是空的，我们就称这种不含任何元素的集合为空集合，记为 $\emptyset$．

这样集合间的一个重要关系：A，B 不相交就可用

$$AB=\emptyset \tag{1-4}$$

表示出来．

显然

$$A\emptyset=\emptyset \tag{1-5}$$

$$A\Omega=A \tag{1-6}$$

注意，集合间不相交在示意图上是很明显的，因此我们无需动脑筋把空集合也在示意图上表示出来．

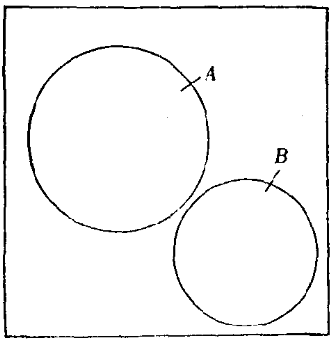


图 1-6

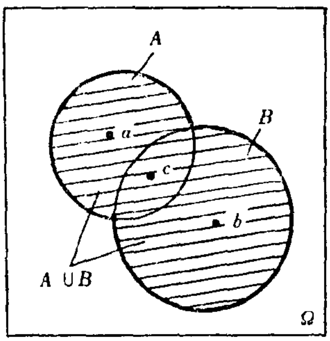


图 1-7

（二）并

将 A，B 的所有元素合并起来组成一个集合 C（此时，若用

罗列法表示 C, 任一既属于 A 又属于 B 的元素, 根据集合的定义, 在罗列中只出现一次), 则称 C 为 A 与 B 的并集, 记作 $A\cup B$.

由定义可知, C 中的任一元素, 或属于 A, 或属于 B, 两者至少居其一.

图 1-7 的阴影部分表示 $A\cup B$. 图中 $A\cup B$ 的任一点, 例如 a, 属于 A, b 属于 B, c 既属于 A 又属于 B.

显然

$$A\cup B=B\cup A \tag{1-7}$$

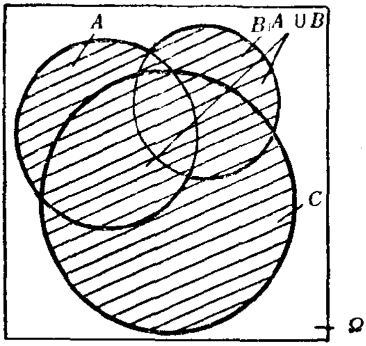


图 1-8

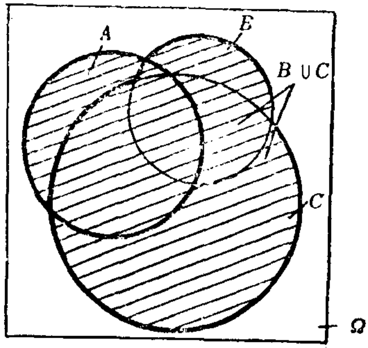


图 1-9

用图 1-8 及 1-9 分别表示 $(A\cup B)\cup C$ 和 $A\cup(B\cup C)$ 的运算过程, 打有斜线的部分是运算结果, 因为结果完全一样, 所以

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C. \tag{1-8}$$

并运算满足交换律(1-7)、结合律(1-8). 同时显然还有

$$A\cup\Omega=\Omega \tag{1-9}$$

$$A\cup\emptyset=A \tag{1-10}$$

关于并、交两种运算的分配律, 有

$$A(B\cup C)=AB\cup AC \tag{1-11}$$

$$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C) \tag{1-12}$$

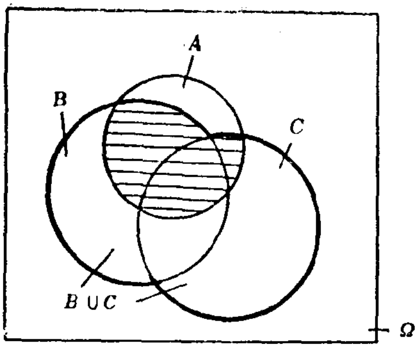


图 1-10(*a*)

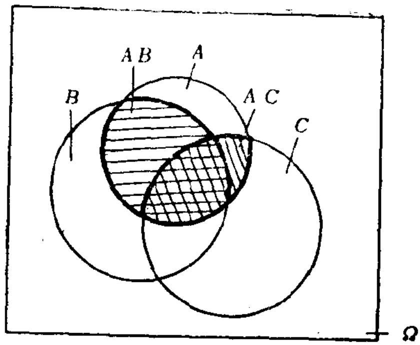


图 1-10(*b*)

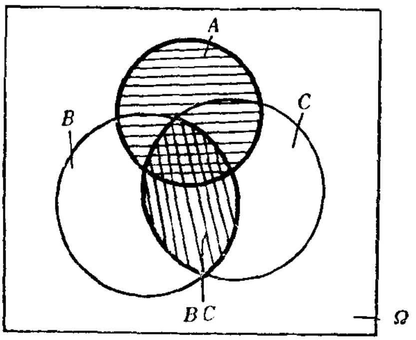


图 1-11(*a*)

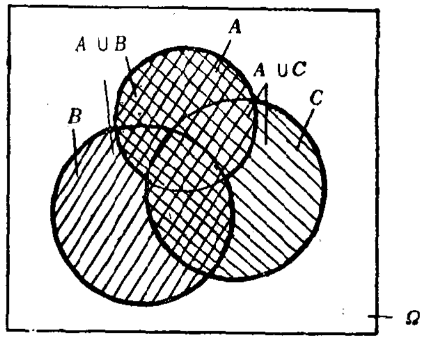


图 1-11(*b*)

式(1-11)可由图 1-10 看出.

式(1-12)可由图 1-11 看出.

图 1-11(a)打斜线的部分是 $A\cup(BC)$，而图 1-11(b)打双线的部分是$(A\cup B)(A\cup C)$.这两部分是全同的,因而式(1—12)成立。

当两集合不相交，即 $AB=\emptyset$ 时，它们的并 $A\cup B$ 称为不交并. 这种并运算在概率论中很重要，为了强调在这种情况下的并运算，我们在下文中一律使用 $A+B$ 的记号来表示 $AB=\emptyset$

时的 $A\cup B$.

多个集合的交、并、不交并还有以下简单的记法,

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i \tag{1-13}$$

$$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i \tag{1-14}$$

$$A_1+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i \tag{1-15}$$

式(1-15)中左方各集两两互不相交,即对任意的 i, j, $1\leqslant i, j\leqslant n$, $i\neq j$ 时, $A_iA_j=\emptyset$.

注意,为今后叙述简洁起见, 符号 $+$, $\sum$ 用于集合运算时,应理解为不交并.

(三) 差

A 与 B 是两集合, 将在 A 中而又不属于 B 的元素组成一个集合 C,这种手续称为差运算,集合 C 称为 A 与 B 的差,记为 $A\backslash B$.

图 1-12 阴影部分表示

$$A\backslash B.$$

打上点子的部分表示$B\backslash A$.

除特殊情形外,

$$A\backslash B\neq B\backslash A.$$

从图 1-12 还可看出

$$A\backslash B=A\backslash AB, \tag{1-16}$$

$$A\cup B=B+(A\backslash B) \tag{1-17}$$

$$=A+(B\backslash A) \tag{1-18}$$

当 $A\supset B$ 时, A 与 B 的差称为正常差, 记作 $A-B$. 这样式(1-16)可写成

$$A\backslash B=A-AB \tag{1-16'}$$

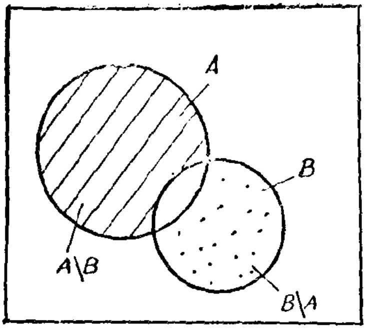


图 1-12

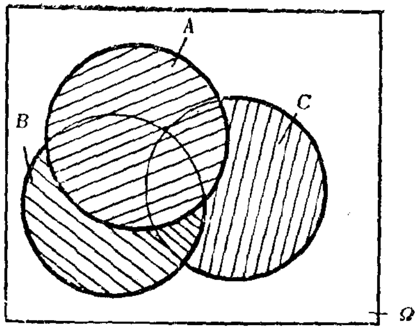


图 1-13

式(1-18)可写成

$$A \cup B = A + (B - BA) \tag{1-19}$$

式(1-19)提供了一个重要的方法，它把相交并转换成不交并，且参于不交并运算的集合，是原来的集合经由交、正常差与不交并等运算得到的. 在概率论中，这是一个基本手段.

图 1-13 将 $A \cup B \cup C$ 表示成三个不同阴影部分的不交并，下面我们写出这三部分的表达式.

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= (A \cup B) \cup C = (A \cup B) + (C - C(A \cup B)) \\ &= A + (B - BA) + (C - C(A + (B - BA))) \\ &= A + (B - BA) + [C - [CA + (CB - CBA)]]. \end{aligned} \tag{1-20}$$

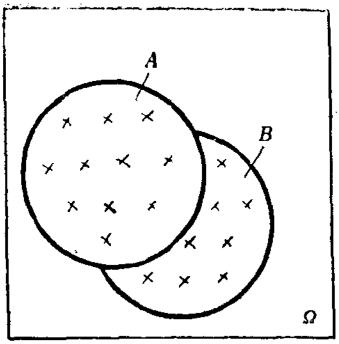
如果 Ω 只有 $n(n<\infty)$ 个元素时，记 n_A 为 Ω 的任一子集 A 所含元素的个数. 式(1-19)与式(1-20)可以提供一个有效的计数方法，因为

$$n_{A+B} = n_A + n_B \tag{1-21}$$

$$n_{B \setminus A} = n_{B-BA} = n_B - n_{BA} \tag{1-22}$$

(见图 1-14 与图 1-15.)所以

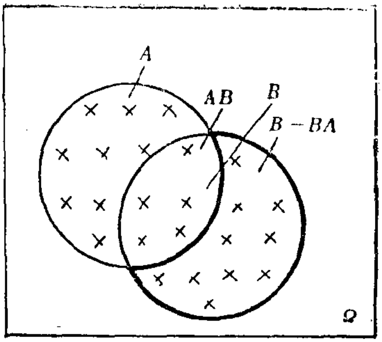
$$n_{A \cup B} = n_A + n_{B-BA} = n_A + n_B - n_{BA} \tag{1-23}$$



$n_A=11$　　$n_B=8$

$A\cup B=A+B$　　$n_{A+B}=19$

图　1-14



$n_A=14$　　$n_B=15$

$n_{AB}=5$　　$n_{B\setminus A}=10$

图　1-15

进一步，由式(1－20)得

$$n_{A\cup B\cup C}=n_A+(n_B-n_{BA})+\{n_C-[n_{CA}+(n_{CB}-n_{CBA})]\}.$$

由于上式是数的加法运算，括号可去掉，所以有：

$$n_{A\cup B\cup C}=n_A+n_B+n_C-n_{BC}-n_{CA}-n_{AB}+n_{ABC}\qquad(1-24)$$

概率论中有类似的加法公式，证明也同样是用化并为不交并的方法，不过式(1-23)及式(1-24)背景直观，容易理解.

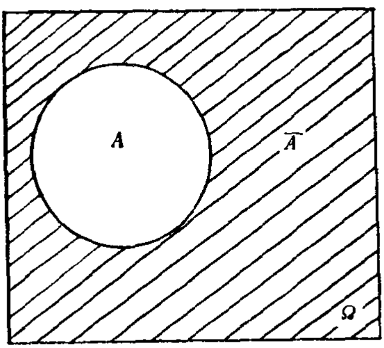


图　1-16

（四）余

A 为 Ω 的子集，取 Ω 中所有不属于 A 的元素组成一集合，这种运算称为余运算，此集合称为 A 的余集，记为 $\overline{A}$（或 A^C）. 图 1-16 阴影部分表示 A 集合的余集. 显然

$$\overline{A}=\Omega-A\qquad(1-25)$$

$$\overline{\overline{A}}=A\qquad(1-26)$$