高师院校教学参考用书

中学数学教材教法

代数分册

十三院校协作组编

一九八〇年八月

中学数学教材教法

前　言

这一套教学参考用书是由北京师院、上海师院、广西师院、福建师大、吉林师大、北京师大、上海师大、甘肃师大，江苏师院、华南师院、武汉师院、湖南师院、天津师院等十三所院校协作组共同讨论，分工编写的，初稿完成后，又经过陕西师大、昆明师院等二十多个单位参加的审稿会的讨论和修订，分代数、几何、解析几何与微积分三个分册印出，作为高师院校教学参考书，在此，对参加审稿的同志们表示感谢。

在编写中，各部分都注意了从现行中学数学教学大纲和教材出发，在基础知识和基本训练方面，给以适当的提高和补充，并对现行中学数学教材中的一些主要的重点内容，进行了教材分析和教法探讨，便于即将从事和正在中等学校从事数学教学工作者使用。

这三个分册，可供高师院校数学专业《中学数学教材教法研究》课的教学参考用书，也可作为中学、中专、中技学校的数学教师教学参考资料。

这一分册是由华南师院、北京师院、江苏师院、甘肃师大和上海师大编写，最后由北京师院编辑付印的，书中不当之处，恳请使用本书的师生同志们指正。

编　者

一九八〇年六月

目　录

第一章　数　　系

在数学中，数是最基本的，必不可少的工具，也是实际中最广泛应用的工具，在中小学数学课程中，数的概念的扩展也是主要内容之一，因此，对于数系的结构，必需进行深入的研究。

数的概念的形成和发展的过程大体可表示为：

自然数→分数（正有理数）→非负实数→实数→复数。

值得注意的是，在数的概念的发展过程中，数和形是相互作用的。分数、无理数的概念都是和测量连续量有关，而负数、复数也分别和数轴上的点，平面上的点联系起来。因此，形数结合对于理解数的理论和中学数学教学，都有极重要意义。

作为科学的数的理论，有较高度的抽象性和理论体系严谨性的特点。由于近代的代数已成为全新的对结构的研究，过去用古典代数不可解的问题，被重新用结构的观点加以再检查，在许多情况下得到解决，并且还可以扩展到在数学以外得到应用；另一方面，代数结构确实是和所有的数学有关，并且是把它们统一起来的普遍概念。因此，许多人认为，数的概念的研究也应该统一用结构的观点来研究，把每个数系作为和一定的代数结构有关的系统来建立。例如，自然数是按集合的性质建立，并且它构成一个数系，是一个具有五类性质的结构。数系的扩展一般采用两种形式，一种是

把新元素加到已建立的数系中而扩展；另一种是从理论上创造一个集合，即通过定义与等价的类来建立新数系，然后指出新数系的一个部分集合是和以前数系是同构的。

作为科学的数系建立过程一般采用如下的扩展过程：

$$\underset{\text{（自然数）}}{N} \longrightarrow \underset{\text{（整数）}}{I} \longrightarrow \underset{\text{（有理数）}}{Q} \longrightarrow \underset{\text{（实数）}}{R} \longrightarrow \underset{\text{（复数）}}{C}$$

作为中小学课程的数的概念的扩展内容应如何处理呢？

有些国家认为，要把代数结构的思想重新组织中小学数学教学内容。还有的认为要把代数结构的观点来处理传统的数学内容，例如在学习各种数系时，不仅学习运算的方法和特殊技巧，而且把数系作为一些基本结构（群、环、体）的具体体现，从结构的观点重点介绍概念和性质，这样使学生通过数系的学习来初步认识什么是数学结构，以便将来研究更一般的，更抽象的数学结构打好基础。

中小学生由于知识水平和年龄特点的限制，是不适宜过份强调理论的、抽象的研究作用。因此，我国现行的通用教材，依据我国具体的实际情况，采用渗透近代数学观点的办法而不采用抽象的公理化体系，随着年级提高，逐步加强理论比重。

目前我国中小学课程关于数的扩展内容大致采用如下过程：

$$\text{自然数集} \xrightarrow{\text{（添零）}} \text{扩大自然数集} \xrightarrow{\text{（添分数）}}$$

$$\underset{\text{（分数集）}}{\text{算术数集}} \xrightarrow{\text{（添负数）}} \text{有理数集} \xrightarrow{\text{（添无理数）}}$$

$$\text{实数集} \xrightarrow{\text{（添虚数）}} \text{复数集。}$$

作为中学数学教师，熟悉用代数结构的观点和用严格公理系统来处理数的概念的扩展，对分析、处理中学教材进行教学是有好处的。例如，对中学教材可以明确地分清哪些是基本概念，哪些是定义，哪些是公理，哪些是需要证明的性质，哪些是定义合理性的说明等等。

一、算 术 数

§1.1 自然数、零

1、**自然数的基数理论** 人类会用手指头计算事物的多少时，总是把被计算的事物的集合一个一个地和手指头一个一个地对应起来，如果恰好一个个地得到对应，就认为被计算的事物“象手上的手指那样多”，这样，一个手上的手指集合就起了一个“数”的作用，凡是和一只手的手指能建立一一对应的事物的集合，它都有“象手上的手指那样多”，凡是能和人的眼睛建立一一对应的事物集合，都是有“象人的眼睛那样多”。类似地，人类要了解东西的多少，就总是用一个被认为已知事物数的集合作标准来与要了解多少的集合作比较，就得到“象（标准集合）那样多”的“数”。这个能够作为标准集合的象征，实际就是我们现在说的一个自然数。自然数概念，事实上就是从这一实际基础上抽象出来的。

下面用我们已熟知的集合论知识来建立自然数的理论：

用不定义的概念“**集合**”作为这一理论的基础，把一切等价（或等浓度、或等势）集合的共同象征叫做**基数**（或

势）。而每一个有穷集合的基数就是一个自然数。例如，人的眼睛集合的基数就用符号“2”来表示。

了解了自然数的意义后，就不难用集合的知识来定义自然数集间的大小关系和加法与乘法运算。

定义 如果有限集合A和B的基数分别是自然数a和b，当

（1）A和B等价时，则说自然数a等于b，记作$a=b$；

（2）A和B的真子集B′等价时，则说自然数a小于b，记作$a<b$。

（3）A的真子集A′和B等价时，则说自然数a大于b，记作$a>b$。

人类开始进行加法运算时，总是把被加的两个事物的集合放在一起来计算总数的多少，就引出自然数基本运算概念。用集合的观点来定义就是：

定义 没有公共元素的两个有限集合A和B，它们的基数分别是自然数a和b，如果集合$C=A\cup B$，就说集合C的基数c叫做a与b的和，记作$a+b=c$，a叫做**被加数**，b叫做**加数**，求两数的和的运算叫做**加法**。

什么是自然数的乘法呢？从自然数的乘法是求相同加数的和的简便运算这一意义来看，那么自然数a乘以b的积，就可以看成b个基数为a且没有公共元素的集合$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_b$并集的基数，即如果

$$A_1=\{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots\cdots\alpha_{1a}\}$$
$$A_2=\{\alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots\cdots\alpha_{2a}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_b=\{\alpha_{b1}, \alpha_{b2}, \cdots\cdots, \alpha_{ba}\}$$

它们的并集　　$A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_b = C$

就是说集合C的基数c叫做a乘以b的积，记作$a \cdot b = c$　a叫做被乘数．b叫做乘数，求积的运算叫做乘法。

类似地我们还可以用集合论的知识，按照自然数的减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算来规定自然数的减法和除法的定义。并且还可以用上面的定义和集合论的知识证明下面自然数的加法、乘法的基本运算律和基本顺序律成立：

加法的交换律：　　$a + b = b + a$；

加法的结合律：　　$(a + b) + c = a + (b + c)$；

乘法的交换律：　　$a \cdot b = b \cdot a$；

乘法的结合律：　　$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$；

乘法对加法的分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$；

次序的反自反性：$a \neq a$，即$a > a$永不成立；

次序的反对称性：如果$a > b$，那么$b < a$

次序的传递性：如果$a > b$，且$b > c$，那么$a > c$；

次序的全序性：对于任两个自然数a，b，下面三个关系有一个且仅有一个成立：

$a = b$，或$a < b$，或$a > b$；

加法的单调性：如果$a < b$，且$c \leqslant d$，那么$a + c < b + d$；

乘法的单调性：如果$a < b$，且$c \leqslant d$，那么$a \cdot c < b \cdot d$；

阿基米德公理：对于任意两个自然数a和b必有一自然数n使。

$$na > b$$

上述建立自然数的理论叫做**基数理论**，它的优点在于把理论较直接地建立在经验的基础上，从而易于理解。但这一

理论也有其缺点。我们知道，自然数具有双重的意义，一方面表示数量的意义，即回答“多少个”的问题，而另一方面是表示次序上的意义，即回答“第几个”的问题。基数理论仅仅反映了“多少个”的问题，对于“第几个”的问题就揭露得很不明显。事实上，无论在理论上或实际上，数数*的概念和与此相联系的概念都是很重要的。因此中小学数学课程中也不能偏重于基数理论，从这个观点出发，建立起另一个自然数理论，就是**序数理论**。

2、**自然数的序数理论** 当儿童计算自己的小石子的时候，他从其中移动一个的位置并且说“一个”，再将余下的移动一个位置并说“二个”。这样下去，直到把全部石子都移动完的时候，最后一个叫到的数就是数数结果。移动石子的本身，不算作数数的本质，只是为了方便且不乱而已。然而重要的，在于遵循下面的要求：（1）对于第一个所指出的对象使数1与它对应，（2）每次指出一个前面未被指出过的对象时，使一个紧挨着前面刚叫过的数的后一个数与它对应。显然，数完以后，每个对象都与一个与它对应的数相结合，两个不同的对象对应于两个不同的数，而且在数数时应该是一个挨一个地没有间隔的，亦即形成自然数列的一个片断。因此，数数的本质在于建立起应该计算的集合与自然数列的某个片断之间的一一对应关系。当被计算的集合是有穷的时候，数数的过程就完结。数数的结果不因所指出的对象的顺序先后有所改变。

经过对数数本质的分析，充分认识了自然数的实质，就

---

* 前一“数”字读上声，后一数字读去声。

可以采取公理化的形式，把自然数概念整理成公理化理论，使之能更深刻、更明确、更完全地反映自然数的本质。

（1）自然数的公理*

对于自然数的公理结构，我们引入一个基本关系和四个公理。

定义 任何一个非空集合N的元素叫做自然数，如果在这集合里的某些元素之间有一基本关系“直接后继”（用“′”来表示）满足下面公理：

Ⅰ、存在着数“1”，它不后继于任何数（用符号表示：$1\in N$，对于任何数a，$a'\neq 1$）；

Ⅱ、对于任何一个数a，存在着一个且仅存在着一个直接后继的一个数a'（即$a\in N$，则有一个且仅有一个a'存在，且$a'\in N$）；

Ⅲ、除1以外，任何数，只能是一个数的直接后继数（即由$a'=b'$，应有$a=b$）；

Ⅳ、（归纳公理）具有下面性质的自然数集合M：

A）1属于M；

B）如果a属于M，它直接后继数a'也属于M，那么，M含有所有自然数，即M与N一致。

这公理用符号表示：设$M\subset N$，而$1\in M$，如果$a\in M$，且$a'\in M$，那么$M=N$）。

从上面自然数的公理系统，就把自然数集完全确定下来，由公理Ⅰ，有自然数1，它不直接后继于任何数；从1

---

* 这个公理系统是意大利数学家裴雅诺（Peano1858—1932）首先提出的，这里只是陈述上有些改变。

出发，由Ⅰ和Ⅱ，就有$1'$，用符号2表示，即$1'=2$也是自然数；同样有$2'$，记为3，即$2'=3$也是自然数等等，这样继续下去，就得到自然数列：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$$

下面我们解释归纳公理的意义。公理Ⅳ即是平常使用**第一数学归纳法**来证题的理论根据。这原理是：设有一个关于自然数n的命题P（n），如P（1）成立，而在假定P（k）成立的条件下，可以推出P（k+1）也成立（即P（k′）也成立），那末对于任意自然数n，P（n）都成立。

下面我们来证明这个数学归纳法原理：

设M是所有使命题P（n）成立的自然数的集合，于是：

A）因为P（1）成立，故得$1\in M$；

B）因为假定P（k）成立的条件下，能推出P（k′）成立，即如果$k\in M$，能推得$k'\in M$。因此，集合M具有公理Ⅳ的性质A和B，由公理Ⅳ得$M=N$，这就是说命题P（n）对于任意自然数都成立。

（2）自然数的加法和乘法运算

1°自然数的加法

现在先来分析一个例子，儿童是怎样计算3加上4的？他们一般都是在左手上先竖起三个手指头，又在右手上竖起四个手指头，然后先数左手的手指说1、2、3，接着数右手的手指紧接着“3”说4、5、6、7，这样，就得到了要计算的结果是“7”。我们发现，当儿童在3加上1时，就叫3的直接后继数4，即$3'$；3加上2时，就叫3的后继数的后继数，即$5=4'$，在加上3时，又叫3的后继数的后继数的后继数，即$6=5'$，如此等等，即

$$3+1=3'=4,$$
$$3+2=3+1'=(3')'=4'=5,$$
$$3+3=3+2'=(3+2)'=5'=6,$$
$$3+4=3+3'=(3+3)'=6'=7。$$

由以上的加法计算，我们还可以看到，要确定 $3+4$ 的值，就得要历经 $3+1$，$3+2$、$3+3$，然后得 $3+4=(3+3)'=6'=7$。

经这样分析，不难理解自然数的加法由下列两个公理来定义是合理的。

定义　自然数的加法　是指这样的对应，由于它，对于每一对自然数a、b，有一个且仅有一个自然数 $a+b$ 与它对应，而且具下面性质

A_1）对于任何数a，　　$a+1=a'$，

A_2）对于任何a，b，　　$a+b'=(a+b)'$，

故a和b叫做加数，而 $a+b$ 叫做它们的和。

这个定义是一个归纳定义。如果选择确定的a的值，问题就成为关于b的某个函数 $f(b)$ 的构成，这个函数的函数值是自然数，而且这个函数具有下面两个性质：A_1）已经知道 $b=1$ 时的函数值（即 $f(1)=a'$），A_2）是给出一个递推的关系，使得异于1的任何数b的函数值由它前面一个数的函数值唯一地确定（即 $f(b')=[f(b)]'$）。

这个定义所定义的自然数加法的存在性与唯一性是可以证明的，就是说自然数的加法是可以实施的，而且是唯一确定的。下面用一个例子来说明。

例1　证明：　$2+3=5$，

证明　由加法定义中的 A_1，得

$$2+1=2'=3,$$

求和2＋2，即$2+1'$，由定义中的A_2，得

$$2+2=2+1'=(2+1)'=3'=4$$

再求和2＋3，即$2+2'$，由定义中的A_2，得

$$2+3=2+2'=(2+2)'=4'=5$$

$$\therefore 2+3=5,$$

可以证明自然数的加法具有下面的基本运算性质：

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

加法交换律　$a+b=b+a$

加法的消去律　若　$a+c=b+c$，那么$a=b$，

这些性质并可以推广到若干个被加数时仍成立。

例2　证明自然数的加法结合律$(a+b)+c=a+(b+c)$

证明　设任意选定了两个数a、b，M是所有这样的数c的集合，对于它们，等式是正确的。

A）由公理A_1，A_2得：

$$(a+b)+1=(a+b)'=a+b'=a+(b+1)$$

$$\therefore\quad 1\in M$$

B）如果$c\in M$，那么$(a+b)+c=a+(b+c)$

由公理A_1，A_2推得：

$$(a+b)+c'=[(a+b)+c]'=[a+(b+c)]'$$
$$=a+(b+c)'=a+(b+c')$$

即　$c'\in M$，按照公理Ⅳ，等式

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

对于任何自然数a、b、c都是正确的。

例3　证明自然数加法交换律　$a+b=b+a$

证明 a） 首先给定$b=1$，对于a用归纳法。

设M是使等式$a+1=1+a$成立的所有a的集合。

A） 当$a=1$时，上等式显然成立，$\therefore 1\in M$

B） 如果$a\in M$，使得$a+1=1+a$，那么

$$a'+1=(a+1)+1=(1+a)+1=(1+a)'$$
$$=1+a'$$

$\therefore a'\in M$，由自然数归纳公理得到

$a+1=1+a$ 对于所有自然数都成立。

b）现在我们对b进行归纳来证明

$$a+b=b+a$$

设M是对于任意给定的a使得这个等式成立的所有的b的集合。

A） 由 a）已得证 $1\in M$

B） 如果$b\in M$，使$a+b=b+a$成立，那么

$$a+b'=(a+b)'=(b+a)'=b+a'=b+$$
$$(a+1)=b+(1+a)=(b+1)+a=b'+a$$

故$b'\in M$，按照自然数的归纳公理得自然数的加法交换律被证明

2°自然数的乘法

类似地，自然数的乘法用下面两公理来定义，

定义 自然数的乘法指的是这样的对应，由于它，对于每一对自然数a，b，有一个自然数$a\cdot b$与它对应，而且具有下面性质：

M_1）对于任何数a，$a\cdot 1=a$

M_2）对于任何数a，b，$ab'=ab+a$

数a叫做被乘数，b叫做乘数，a和b都叫做因数，ab叫做积，