

高等学校教学用书

數學分析簡明教程

下 冊

A. Я. 辛欽著

高等教育出版社

高等學校教學用



數學分析簡明教程

下 冊

A. Я. 辛 欽 著

北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室 譯

許 寶 騷 校

高等教育出版社

本書系根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство Техничко-теоретической литературы)出版的阿·雅·辛欽(А. Я. Хинчин)所著“數學分析簡明教程”(Краткий курс математического анализа)1953年第一版譯出,並根據原著1955年第二版修訂的。原書經蘇聯文化部高等教育總署審定為綜合大學與師範學院力學數學系與物理數學系數學分析課程的教科書。

本書中譯本分上下兩冊出版。此為下冊,內容包括無窮級數,微分學的進一步發展與積分學的進一步發展等三篇,及結束語歷史簡述。另附中文索引。

本書由北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室集體翻譯。並經許寶騭教授校訂。

數學分析簡明教程

下 冊

А. Я. 辛 欽 著

北京大學數學力學系 譯

數學分析與函數論教研室

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

北京市印刷二廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·184 開本 850×1168 1/32 印張 12 5/16 字數 309,000

一九五四年十二月北京第一版

一九五六年八月北京第四次印刷

印數 11,501—22,500 定價 (8) 1.40

下 冊 目 錄

第四篇 無窮級數

第十八章 無窮的數值級數	297
§ 67. 基本概念	297
§ 68. 同號級數	306
§ 69. 變號級數	317
§ 70. 級數的運算	322
§ 71. 無窮乘積	327
第十九章 無窮的函數級數	335
§ 72. 函數級數的收斂區域	335
§ 73. 一致收斂性	337
§ 74. 函數級數的和的連續性	343
§ 75. 級數的逐項積分法與逐項微分法	347
第二十章 幕級數與多項式級數	354
§ 76. 幕級數的收斂區域	354
§ 77. 一致收斂性及其推論	360
§ 78. 函數的幕級數展開式	364
§ 79. 多項式級數	373
§ 80. 維爾斯脫拉斯定理	375
第二十一章 三角級數	381
§ 81. 福里哀係數	381
§ 82. 平均逼近	387
§ 83. 關於三角函數系的封閉性的迪里赫勒——李雅普諾夫定理	392

§ 84. 福里哀級數的收斂性	398
§ 85. 廣義的三角級數	400

第五篇 微分學的進一步發展

第二十二章 多元函數的微分法 405

§ 86. 多元函數的連續性	405
§ 87. 二維連續統	408
§ 88. 連續函數的性質	413
§ 89. 偏導數	415
§ 90. 微分	418
§ 91. 沿任何方向的導數	424
§ 92. 複合函數與隱函數的微分法	427
§ 93. 齊次函數與尤拉定理	432
§ 94. 高級偏導數	433
§ 95. 二元函數的戴勞公式	437
§ 96. 極值	442

第二十三章 微分學的簡單幾何應用 448

§ 97. 平面曲線的切線方程與法線方程	448
§ 98. 空間曲線的切線與法面	450
§ 99. 曲面的切面與法線	453
§ 100. 曲線的凸與凹的方向	456
§ 101. 平面曲線的曲率	458
§ 102. 密觸圓	462

第二十四章 隱函數 466

§ 103. 簡單問題	466
§ 104. 一般問題	473
§ 105. 奧斯特洛格拉得斯基行列式	479
§ 106. 條件極值	486

第六篇 積分學的進一步發展

第二十五章 廣義積分	495
§107. 有無窮限的積分	495
§108. 無界函數的積分	508
第二十六章 看作參變量的函數的積分	518
§109. 有限積分	518
§110. 有無窮限的積分	529
§111. 例	540
§112. 尤拉積分	546
§113. 斯特林公式	553
第二十七章 二重積分與三重積分	562
§114. 可測的平面圖形	562
§115. 柱體的體積	573
§116. 二重積分	577
§117. 用兩次簡單積分來計算二重積分	583
§118. 二重積分的變量替換	590
§119. 三重積分	596
§120. 應用	600
第二十八章 曲線積分	609
§121. 平面上曲線積分的定義	609
§122. 平面力場所作的功	617
§123. 格林公式	619
§124. 在二元函數的微分上的應用	624
§125. 空間的曲線積分	629
第二十九章 曲面積分	633
§126. 最簡單的情形	633

§127	曲面积分的一般定义	637
§128	奥斯特洛格拉得斯基公式	644
§129	司鐸克斯公式	650
§130	場論初步	654

結束語	历史簡述	662
-----	------	-----

推荐的習題按照 B. П. 捷米多維奇“数学分析習題集”的第二版

之索引

索 引

第四篇 無窮級數

第十八章 無窮的數值級數

§ 67. 基本概念

在每一個精確自然科學的領域中，除了用一些篇幅來闡明該領域中最重要的概念與規律之外，同時還要有一些章節來從事研究和建立某些專門工具，這樣我們才能够很好地掌握我們的研究對象。這些用來研究和建立專門工具的章節在理論上的意義不如它在技術上的意義那麼大。但是，儘管如此，它們在方法論上的重要性有時却是這樣大，以致於如果我們不對這些專門工具作系統的說明，就不可能建立任何完整的理論。例如，在熱學中，除了那些闡明熱學的基本原則理論的章節之外，還必須有講解溫度計的章節，換句話說，還必須有說明測量溫度的方法與工具的章節。

無窮級數的理論，就它跟數學分析的基本概念與規律的關係來說，就正是居於這樣一種輔助性的技術工具的地位；不過，儘管如此，由於它在數學分析本身以及立腳在數學分析之上的大量實用科學中的許許多多不同的應用，使得這個理論在現代數學方法的武庫中佔據着一個最重要的位置。所以，任何一本數學分析教程都不能不系統地說明關於無窮級數的理論。

無窮級數的基本概念是比較初等的，本來很早就可以講了，比方說，在講完極限和實數理論之後，就已經可以講了。我們之所以延遲到

現在才講,有兩個原因:首先是因為有必要讓讀者儘可能地早一些知道本書的基礎概念——微分與積分;其次,因為它對於進一步研究微分學與積分學是必不可少的,只有放在這裏講了以後,讀者才能够完全領會我們接下去就要講的幾章關於微分與積分理論的進一步更深刻的發展。

無窮級數的概念是很簡單的,大家在中學教科書裏已經知道得很清楚:已知一個遞減的幾何序列:

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots, \quad (1)$$

(其中 $0 < |r| < 1$, a 是任意實數) 應該如何來求它的各項之和;這樣一種求和本身就正好完全表達出無窮級數概念。把序列(1)的前 n 項之和記作 s_n , 則

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a - ar^n}{1 - r},$$

當 $n \rightarrow \infty$ 時, s_n 有一個極限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - r},$$

這個極限稱為幾何序列(1)的“一切”項之和,記作:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}.$$

因此,在幾何序列的情形下,一系列無窮個數值有所謂它的“一切”項之“和”,這個和是這樣做成的:先求得這一系列數值的前 n 項之和 s_n (很明顯, s_n 是 n 的函數), 然後再研究當 $n \rightarrow \infty$ 時 s_n 的動態。如果 s_n 趨向於一個確定的極限 s , 我們就很自然地把它算作是這個系列的一切項之和。

然而,遞減的幾何序列遠非唯一的一個上面所說的這種類型的系列,比如說,系列

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots \quad (2)$$

也就同樣地具有所說的性質，事實上，因為

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

所以，對系列(2)來說，我們有：

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1.$$

根據同樣的理由，既然我們已經認為 $\frac{a}{1-q}$ 是幾何序列(1)的“一切”項的和，那麼現在我們當然可以說系列(2)的“一切”項的和就等於 1，因而可以寫成

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

另一方面，也很清楚，絕不是任何一系列無窮個數值都可以用以上所說的辦法來求和。例如，對系列

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

來說，我們就有 $s_n = n$ ；當 $n \rightarrow \infty$ 時，和數 s_n 無限增大，因而 s_n 就不可能有極限。其實，就算 s_n 保持有界，同樣的情形也還可以發生。例如，對系列

$$1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$$

來說，當 n 是偶數時， s_n 等於 0。而當 n 是奇數時， s_n 卻等於 1；於是當 $n \rightarrow \infty$ 時，和數 s_n 雖然保持有界，但是却很明顯地不趨向於任何極限。

現在，我們可以轉到一般的定義了。假定我們有一系列無窮個實數

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots; \quad (3)$$

令

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad (n=1, 2, \dots),$$

s_n 稱為系列(3)的部分和。假定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

存在，則我們說系列(3)是收斂的，而 s 是它的和；假定當 $n \rightarrow \infty$ 時，部分和 s_n 不趨向於任何極限，則我們說系列(3)是發散的，並且我們算它沒有和。

雖然把收斂級數(即收斂系列——譯者按，在原文中“系列”“級數”兩個詞是同一個字 ряд, 本來沒有區別，如果直譯應一律譯成“系列”，但遵從習慣仍改稱級數。但在這兒以前仍只能譯作“系列”，才符合作者的文意。)的和了解成為它的一切項的和是很自然的事情，但是大家還是要相當小心：決不要忘記，求無窮級數(即無窮系列)的和，精確地說來，跟求有限和並不一樣；在無窮級數的求和的過程中，參與了一個新的運算，即極限的運算。因此，決不能沒有經過專門的考慮研究，就把有限和所具有的性質硬搬到無窮級數的和上來；事實上，我們在下面就會看到，這種搬移絕不是在一切情況下都可能的。

如果級數(3)收斂，而且它的和等於 s ，則我們寫：

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots;$$

如果當 $n \rightarrow \infty$ 時， $s_n \rightarrow +\infty$ ，則有時也寫成

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty;$$

不過，在這種情形，我們從一般定義知道，這個級數是發散的，因而它並沒有和。

有時，我們就用 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 或者 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 來代表級數(系列)

(3) 本身，不管它收斂還是不收斂。例如，我們可以說級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

收斂；級數 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ 發散(參考上面的例子)等等。

當級數(3)收斂時，它的和與部分和之差 $r_n = s - s_n$ 稱為它的餘項；從收斂性的定義本身就立刻知道：

$$r_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

換句話說，當 $n \rightarrow \infty$ 時，收斂級數的餘項是一個無窮小量(當然，發散級數沒有餘項，因為它沒有和)。因為

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots,$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

所以我們很自然地希望會有：

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + \cdots + u_{n+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = \sum_{l=n+1}^{\infty} u_l$$

這個等式在有限和的情形顯然是對的，但是我們沒有理由不經過任何證明就認為它在無窮級數的情形也準對。不過證明起來倒是很簡單的，下面便是證明：令

$$\sum_{k=1}^r u_{n+k} = \sigma_r \quad (r=1, 2, \cdots);$$

很明顯， $\sigma_r = s_{n+r} - s_n$ ；因為當 $r \rightarrow \infty$ ，同時 n 保持不動時， $s_{n+r} \rightarrow s$ ；所以當 $r \rightarrow \infty$ 時， σ_r 的極限存在並且等於 $s - s_n = r_n$ ；但是根據 σ_r 的定

義，這個極限就是級數 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ 的和；因此，這個級數收斂，並且它的和

就是 r_n ，這樣就證明了我們要證明的東西了。總之，在級數(3)收斂的時候對於任何 $n \geq 1$ ，我們都有

$$s = s_n + r_n,$$

其中

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} + \cdots.$$

根據級數(3)收斂的定義，收斂就等於要求部分和的序列

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots \quad (4)$$

趨向於一個極限 s （這個 s 就稱為級數的和）。因此，關於任何級數(3)的收斂性以及它的和的問題，都可以整個歸結到序列(4)的極限存在與它的極限值的問題。因而無窮級數理論的任何一個問題都可以用序列以及它的極限的術語來敘述。另一方面，也不難看出，級數理論與序列理論的這種聯系實際上是相互的關係。假定已經給出一個任意的實數序列(4)，令

$$u_1 = s_1, \quad u_n = s_n - s_{n-1} \quad (n > 1);$$

就很明顯地有：

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

於是，關於序列(4)的極限存在以及它的極限值的問題，就可以完全歸結到級數(3)的收斂性以及它的和的問題。

序列與無窮級數之間的這種基本聯系使得我們往往在證明了這兩個範圍中的一個的某個命題之後，就可以不用再加任何新的證明，立刻把這個命題搬到另一個範圍中去。在 § 19 (定理 2) 中，我們曾經證明了序列(4)極限存在的必要充分條件如下：序列(4)的極限存在的必要充分條件是：不管 $\varepsilon > 0$ 怎樣小，對於充分大的 n 與任意的 $p > 0$ ，我們都有 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ 。但是如果數 s_n 就是級數(3)的部分和，則一方面

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = \sum_{k=1}^p u_{n+k}$$

而另一方面，序列(4)的極限存在就等於說級數(3)收斂。所以我們已經得到了下列一般的級數收斂的必要充分條件：

定理 1. 級數(3)收斂的必要充分條件是：不管 $\varepsilon > 0$ 怎樣小，對於充分大的 n 與任意的 $p > 0$ ，我們都有：

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

這個條件可以形式地說成是：級數的充分遠的“片段”(長短不拘也即不管它所包含級數的項的數目)的絕對值可以任意地小，特別當 $p=1$ 時，對於每一個收斂級數(3)，只要 n 充分大，就可以有 $|u_n| < \varepsilon$ ；換句話說，我們有下面的

推論. 如果級數(3)收斂，則當 $n \rightarrow \infty$ 時， $u_n \rightarrow 0$ 。

到現在為止，我們已經看到過的那些發散級數的例子中，都是當 $n \rightarrow \infty$ 時， u_n 不趨向於零的。因此，我們不免發生這樣的疑問：剛才所說的級數收斂的必要條件 $u_n \rightarrow 0$ (當 $n \rightarrow \infty$)，是否同時也是級數收斂的一個充分條件？不難知道，答案應該是否定的。事實上，假定級數(3)是這樣構成的： $u_1 = 1$ ， u_2, u_3 都等於 $\frac{1}{2}$ ，再隨後三項即 u_4, u_5, u_6 每項都等於 $\frac{1}{3}$ ，這樣下去以至無窮。於是很明显，一方面，當 $n \rightarrow \infty$ 時的确 $u_n \rightarrow 0$ ；另一方面，從等於 $\frac{1}{k}$ 的那一項開始的以後 k 項所構成的級數“片段”的和永遠等於 1。但是因為 k 可以任意大，所以這個級數到達無論多遠都會有總和等於 1 的“片段”。因此這個級數不能滿足定理 1 的條件，所以它是發散的。

這類級數的一個典型例子是調和級數——這是一個很富有啓發性的在許多方面都很重要的級數：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \quad (5)$$

它滿足條件 $u_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)，但是級數“片段”

$$\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n}$$

包含了 $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ 項，其中每一項都不小於它的最後一項 $\frac{1}{2^{k+1}}$ ；所以這個“片段”的值大於

$$2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2};$$

但是因為這種“片段”可以在無論多遠的地方找到（ k 可以任意大），所以定理 1 的條件也不能滿足，因而級數(5)發散。

無窮級數的概念，正如一切帶有高度一般性的概念一樣，它的充分發展，要求我們的討論更加具體化；只有當我們轉向於研究各種按具體特徵進行分類的級數時，才可能了解其全部內容。在本節中，我們只研究無窮級數的一般概念，其餘的我們不打算多談。

假定我們給定了兩個級數

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots; \end{aligned}$$

於是級數

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots \quad (6)$$

可以看作是這兩個給定的級數“逐項”相加（換句話說，第一個級數的每一項與第二個級數的具有相同號碼的項相加）的結果。假定兩個給定的級數都收斂，我們把它們的和分別記作 s 與 σ ，它們的部分和記作 s_n 與 σ_n ，於是

$$s_n \rightarrow s, \quad \sigma_n \rightarrow \sigma \quad (n \rightarrow \infty).$$

於是很明顯，級數(6)的前 n 項之和等於 $s_n + \sigma_n$ ，並且當 $n \rightarrow \infty$ 時， $s_n + \sigma_n \rightarrow s + \sigma$ 。所以，兩個收斂級數逐項相加永遠再給出一個收斂級數，並且這個新級數的和就等於原來兩個級數的和相加。很明顯，這個法則在兩個收斂級數逐項相減的情形也一樣成立（用同樣的方法證明）。

最後，如果我們用任意有限個收斂級數來代替上述的兩個收斂級

數，並逐項按任何組合法(當然對於一切項這個組合法要一樣)來組成它們的代數和，我們以上的論證在本質上不須要什麼改變就可以知道：這樣構成的級數還是永遠收斂，並且它的和就是這些已知級數的和的同一種代數和。因此，我們已經得到了下列命題：

定理 2. 假定級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{1,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_{2,k}, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_{m,k}$$

都收斂，又它們的和分別等於 $s_1, s_2, \dots, s_m$ 。於是，級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{1,k} \pm u_{2,k} \pm \dots \pm u_{m,k})$$

(其中對於一切項都取同一組組合符號，換句話說，在每一個“ $\pm$ ”號中都取定一個“ $+$ ”號或“ $-$ ”號)也收斂，並且它的和就等於

$$s_1 \pm s_2 \pm \dots \pm s_m.$$

這個定理有一個重要推論，它說明一個簡單事實：改變一個收斂級數的任何有限項的數值，不會破壞該級數的收斂性(雖然，一般說來，它的和也改變了)。換句話說，我們有下面的

推論. 假定在級數

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots \quad (7)$$

與

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + v_{n+1} + \dots \quad (8)$$

中，對於某一個 $n \geq 0$ ，我們有：

$$u_{n+1} = v_{n+1}, \quad u_{n+2} = v_{n+2}, \quad \dots, \quad u_{n+k} = v_{n+k}, \quad \dots,$$

又假定這兩個級數中有一個收斂，則另一個一定也收斂。

爲了證明這個推理，我們只消指出以下這一點就够了：比方說，級數(8)可以由級數(7)與級數

$$(v_1 - u_1) + (v_2 - u_2) + \cdots + (v_n - u_n) + 0 + 0 + \cdots$$

(這個級數顯然收斂)逐項相加來得到。

當然,從這個推論還立刻可以知道,只要級數(7)與級數(8)中有一個發散,則另一個也一定發散。

數值級數的另外一個一般性質是:

定理 3. 如果級數

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收斂,並且有和 s , 又如果 a 是一個任意常數;則級數

$$au_1 + au_2 + \cdots + au_n + \cdots$$

也收斂,並且它的和就等於 as 。

爲了證明這個定理,只要指出下面這一點就够了: 如果用 s_n 與 σ_n 分別表示這兩個級數的前 n 項之和,則對於任意的 n , 都有 $\sigma_n = as_n$ 。

§ 67 的練習可以參看 B. II. 捷米多維奇的習題集, 第五章, 習題 1—3, 5, 11—12, 14—15, 21, 23, 24。

§ 68. 同號級數

我們前面已經指出過,爲了完全地揭露無窮級數概念的內涵,我們現在應該集中注意於若干類具有某些特殊性質的級數,這些特殊性質使得這些類級數成爲最重要的同時也是最便於研究的級數。無窮級數理論的歷史發展告訴我們,這些類級數中的重要的一類,是那些一切項的符號都相同的級數。因而,我們首先應該來着手研究這種“同號的”級數。爲了確定起見,我們永遠假定級數的每一項都是正的(說得更正確一些,每一項都是非負的,因爲在一般情形下,允許有等於零的項存在是有好處的)。很明顯,根據對稱性負項級數(更正確地說,非正項級數)應該具有完全類似於正項級數的那些性質。

如果級數

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$