非标准分析基础

李邦河

上海科学技术出版社

非标准分析基础

李 邦 河

上海科学技术出版社

责任编辑　顾可敬

非标准分析基础

李　邦　河

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　吴江伟业印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 3.125　字数 65,000

1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷

印数：1—3,000

ISBN 7-5323-0613-5/0.59

统一书号：13119·1437　定价：0.79元

前　言

关于非标准分析的书已经不少了．根据我国不少人学习非标准分析的情况来看，严格地掌握它的基础是首先碰到的一件比较困难的事．虽然在关于非标准分析的各书中都有基础部分，但对于初学者，特别是对那些一点也不懂数理逻辑的人来说，似乎都还写得不够详尽．

本书从实数域的超幂扩张开始，接着给出超结构的超幂型的非标准模型，然后在定义了形式语言的基础上引进了一般的非标准模型的概念，最后叙述了在近代文献中常用的多饱和模型．

对于理解非标准分析的难点，如形式语言、内集和外集的概念等，我们都作了尽可能详尽的描述，力求初学者能透彻地掌握它们．而关于非标准分析的应用，则因已大量散见于各有关的书中，因而本书写得较少．我们主要只写了非标准微积分如何在严格的意义上恢复了微积分的发明者之一的莱伯尼兹的无穷小精神．通过对常微分方程的解的存在性、唯一性和对初值和参数的连续依赖性的证明，读者大致上可以窥见少许非标准论证方法的奥秘和它所带来的论证的缩短．

本书是在作者于 1983 年秋至 1985 年春，两次在中国科学院研究生院讲授非标准分析的基础上写成的，大约 52 学时即可讲完，因此可作为一学期的教本．除了要求有极少量的集合论方面的修养外，本书基本上是自封的．

我们希望，仔细读过这本小册子的读者，结合有关的专业

知识，能顺利地阅读非标准分析方面的最新文献.

作者衷心感谢吴文俊教授、程民德教授、王世强教授，特别是已故的关肇直教授，他们多年来在国内提倡非标准分析，并大力支持作者在这一领域的工作. 本书的问世是与他们的影响分不开的.

李邦河

1986年10月

目　　录

第一章　实数域的非标准模型

§1.1　引　　言

微积分的创始人之一，G. M. Leibniz，在一阶和高阶的无穷小微分的基础上，建立了微积分的理论．他认为，可以虚构无穷小与无穷大的数，并使之服从于普通实数的定律；这种虚构可用来缩短论证，促进数学的发明或发现，合乎发明家的艺术．但一方面由于他的表述存在显著的内在矛盾，另一方面由于包括无穷小、无穷大及普通实数且服从普通实数的定律的数的系统长期未被发现，无穷小量方法终于不被数学家们所信任，而在 19 世纪被 ε–δ 方法取代．

1961 年，A. Robinson 用数理逻辑中的一个重要分支——模型论的方法，建立了实数系统 $\mathbb{R}$ 的一个扩张 $^*\mathbb{R}$，它在一个确定的意义上与 $\mathbb{R}$ 具有同样的性质．无穷小与无穷大是 $^*\mathbb{R}$ 中实在的元素．在 $^*\mathbb{R}$ 上，可以用无穷小语言严格地建立微积分的数学基础，从而在新的水平上恢复了 G. M. Leibniz 的精神，把作为"发明家的艺术"的直观的无穷小量方法的应用与严格的数学论证统一起来了．

A. Robinson 的方法——他称之为"非标准分析"的意义不只限于给G. M. Leibniz 的无穷小量方法以严格的基础．它可以同样成功地应用于其他数学领域，如拓扑空间、泛函分析、微分方程、概率论、代数数论、数理经济等等．总的说来，凡是涉及有无限个元素的数学结构，都可以有效地应用这一方法．

这是数理逻辑的深入发展向各个领域的数学家提供的一个有普遍意义的新方法. 鉴于此,"非标准分析"这一名称似乎不能反映它的实际内容,而且容易造成误解,或许代之以"非标准方法"要更加恰当些. 但自 A. Robinson 命名以来,"非标准分析"已为大家所熟知,故我们仍沿用之.

P. Cartier 在 N. Bourbaki 讨论班上指出: A. Robinson 的书——«非标准分析»可能是本世纪的杰作之一. 我们相信:非标准分析将会在众多的领域取得更加令人瞩目的成绩. 特别是,我们期望它能在现代物理学的数学描述方面开出绚丽的花朵.

§1.2 实数序列集合上的代数结构

A. L. Cauchy 定义无穷小量为趋于零的序列. 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一个实数序列, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 则称序列 (a_n) 为一个无穷小. 因此,为了扩充 $\mathbb{R}$, 使之包括无穷小与无穷大,一个自然的想法是把实数序列看作某种意义下的"数", 把趋于零的序列看作无穷小"数",而把常数序列 (a), 即 (a_n), $a_n=a$, 看作与 $a\in\mathbb{R}$ 恒同. 如此,则这一扩大了的"数"的系统由所有实数序列组成,用集合论中常用的符号,即是 $\mathbb{R}^N$, 这里 N 表示自然数 1, 2, …的集合. 在 $\mathbb{R}^N$ 上定义加法与乘法如下:

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n),$$
$$(a_n)\cdot(b_n)=(a_nb_n),$$

则易见 $(\mathbb{R}^N, +, \cdot)$ 是一个交换环, 具有加法零元素(0)和乘法幺元素(1),以 $\mathbb{R}$ 为子环.

设 $a=(a_n)$, 定义 a 的绝对值 $|a|=(|a_n|)$. 如果在 $\mathbb{R}^N$ 中引进序 $\leqslant$: $(a_n)\leqslant(b_n)$ 当且仅当对任意 $n\in N$, $a_n\leqslant b_n$. 则按

此序，$\left(\frac{1}{n}\right)\nless\left(\frac{1}{2}\right)$，而$\left(\frac{1}{n}\right)$作为一个无穷小，应$\leqslant$任意正实数，一个数列$(a_n)$是否为无穷小与有限个$a_n$无关，而对任意正实数$\varepsilon$，除去有限个$n$外，$\frac{1}{n}<\varepsilon$皆成立．这建议了如下的定义：$(a_n)\sim(b_n)$当且仅当集合$\{n/a_n\neq b_n\}$是有限集．易见"$\sim$"是一个等价关系．我们用$\mathbb{R}^N/\sim$表示$\mathbb{R}^N$中的元素按关系"$\sim$"分类后所得的等价类的集合，用$[a_n]$表示$(a_n)$所属的等价类．在$\mathbb{R}^N/\sim$中引进加法和乘法如下：

$$[a_n]+[b_n]=[a_n+b_n],$$

$$[a_n]\cdot[b_n]=[a_nb_n].$$

则易见$(\mathbb{R}^N/\sim,\ +,\ \cdot)$亦是一个交换环，以$\mathbb{R}$为子环．

在$\mathbb{R}^N/\sim$中引进序$\leqslant$：$[a_n]\leqslant[b_n]$当且仅当集合$\{n/a_n\nleqslant b_n\}$是有限集，$[a_n]<[b_n]$当且仅当$[a_n]\leqslant[b_n]$但$[a_n]\neq[b_n]$．定义$[a_n]$的绝对值$|[a_n]|=[|a_n|]$．

设(a_n)是一个趋于零的序列，则对任意正实数ε，我们有

$$|[a_n]|<[\varepsilon].$$

于是在$\mathbb{R}^N/\sim$中，在Cauchy意义下的一个无穷小，的确<任意正实数，因此可以说是一个实实在在的无穷小元素．关于无穷大的类似结论，读者不难自己作出．

虽然我们已成功地在$\mathbb{R}^N/\sim$中引进了实在的无穷小与无穷大，但$\mathbb{R}^N/\sim$仍不能满意地体现G. M. Leibniz的思想：服从与实数同样的定律．首先，$\mathbb{R}^N/\sim$不是一个域．事实上，令

$$a_n=\begin{cases}1\ , & \text{当 } n \text{ 奇数},\\ 0\ , & \text{当 } n \text{ 偶数},\end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases}0\ , & \text{当 } n \text{ 奇数},\\ 1\ , & \text{当 } n \text{ 偶数},\end{cases}$$

则 $[a_n]\neq[0]$, $[b_n]\neq[0]$, 但 $[a_n]\cdot[b_n]=[0]$, 即 $\mathbb{R}^N/\sim$ 有零因子, 因此不是域. 其次, $\mathbb{R}^N/\sim$ 上的序 $\leqslant$ 不是全序. 设 a_n, b_n 如上, 则易见有

$$[a_n]\neq[b_n],\ [a_n]\nless[b_n],\ [a_n]\ngtr[b_n].$$

为了消除 $\mathbb{R}^N/\sim$ 的上述缺点, 我们需要在 $\mathbb{R}^N$ 中引进比"$\sim$"更粗的等价关系. 为此, 我们先在下一节中作若干准备.

§1.3 超　　滤

本节阐述滤(filter)和超滤(ultrafilter)的定义和基本性质, 它对于全书都有着基本的重要性.

对任意集合 I, 我们用 $P(I)$ 表示 I 的全体子集构成的集合.

定义 1.3.1 设 I 是任一非空集合, 而 F 是 $P(I)$ 的一个非空子集. 我们称 F 是 I 上的一个滤, 如果

1) 空集 $\phi\notin F$,

2) 若 A, $B\in F$, 则 $A\cap B\in F$,

3) 设 $A\in F$, $B\in P(I)$, 且 $A\subset B$, 则 $B\in F$.

注　本书中, 我们用 $A\subset B$ 表示 A 和 B 是相同的集合或 A 是 B 的真子集.

由定义, 我们显然有

1.3.2 设 F 是滤, A_1, A_2, $\cdots$, $A_n\in F$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in F$.

1.3.3 设 F 是 I 上的滤. 则对任意 $A\in P(I)$, A 和 A^c 中至多有一个属于 F, 这里 $A^c=I\setminus A$ 是 A 的余集.

例 **1.3.4** 令 $I=N$, $F=\{A\in P(N)/A^c$ 是有限集$\}$, 则 F 是 N 上的滤, 称为 Frechet 滤.

定义 1.3.5 设 F 是 I 上的滤，若满足

4) 对任意 $A\in P(I)$，A 和 A^c 中必有一个属于 F，

则称 F 是 I 上的一个超滤.

例 1.3.6 对任意 $i\in I$，$F_i=\{A\in P(I)/i\in A\}$ 是 I 上的一个超滤，称这样的滤为主滤(principal filter).

定义 1.3.7 设 F 是滤，若存在可数序列 $A_1, A_2, \cdots$，使 $A_n\in F$，但 $\bigcap\limits_{n\in N} A_n\notin F$，则称 F 是可数不完备的，否则称 F 是可数完备的.

例 1.3.8 Frechet 滤是可数不完备的，而主滤 F_i 都是可数完备的。

定理 1.3.9 设 F 是 I 上的超滤，则当且仅当存在 I 的可数分割 $I_1, I_2, \cdots$ (即当 $m\neq n$ 时，$I_m\cap I_n=\phi$，且 $\bigcup\limits_{n\in N} I_n=I$)，使对任意 $n\in N$，$I_n\notin F$ 时，F 是可数不完备的.

证明 设 $\{I_n\}$ 为 I 的可数分割，使 $I_n\notin F$. 因 F 是超滤，故 $I_n^c\in F$，但 $\bigcap\limits_{n\in N} I_n^c=(\bigcup\limits_{n\in N} I_n)^c=I^c=\phi\notin F$，因此 F 是可数不完备的.

现设 F 是可数不完备的，则有 $A_n\in F$，使 $\bigcap\limits_{n\in N} A_n\notin F$. 令 $I_1=\bigcap\limits_{n\in N} A_n$，而对 $n\geqslant 2$，令 $I_n=A_{n-1}^c\Big\backslash\bigcup\limits_{m=1}^{n-2} A_m^c$，则易见 I_1, I_2, $\cdots$，是 I 的一个可数分割. 由假设 $I_1\notin F$. 对 $n\geqslant 2$，由 1.3.3 知 $A_{n-1}^c\notin F$，故 I_n 作为 A_{n-1}^c 的子集必不属于 F. 证毕.

注 由上述证明可知，只需假定 F 是可数不完备的滤，即可推出存在 I 的可数分割 $\{I_n\}$，使 $I_n\notin F$.

定理 1.3.10 设 F 是 I 上的超滤，$\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n=A\in F$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中必至少有一个属于 F.

证明 因 F 是超滤，故 $A^c=\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{m} A_n^c\notin F$。若 $A_1^c, A_2^c, \cdots, A_m^c$ 皆属于 F，则应有 $\bigcap_{n=1}^{m} A_n^c\in F$。故必有某 $A_n^c\notin F$, $1\leqslant n\leqslant m$，于是 $A_n\in F$。证毕.

例 1.3.11 奇自然数的集合和偶自然数的集合均不属于 Frechet 滤，但它们的并集属于 Frechet 滤，故定理 1.3.10 中假定 F 是超滤是必要的.

习题 设 F 是 N 上的一个超滤，证明：当且仅当 $F\supset$ Frechet 滤时，F 是可数不完备的.

§1.4 可数不完备的超滤的存在性

设 I 是任一非空集合，M 是 $I\times I$ 的一个子集，用记号 $i\leqslant j$ 来表示 $(i, j)\in M$。我们说 M 或"$\leqslant$"是 I 上的一个偏序，如果

1) 对任意 $i\in I$, $i\leqslant i$;

2) 对任意 $i, j\in I$，如果 $i\leqslant j$，且 $j\leqslant i$，则 $i=j$;

3) 对任意 $i, j, k\in I$，如果 $i\leqslant j$, $j\leqslant k$. 则 $i\leqslant k$.

用 $i<j$ 表示 $i\leqslant j$，但 $i\neq j$. 我们说 I 上的偏序是一个全序，如果对任意 $i, j\in I$, $i<j, i=j$, 和 $j<i$ 中恰有一个成立. I 中的一个元素 i 叫做对 $\leqslant$ 是极大的. 如果对任意 $j\in I$, $j\neq i$，都有 $i\nleqslant j$（即 $(i, j)\notin M$）. 设 J 是 I 的一个非空子集，$i\in I$ 叫做是 J 对 $\leqslant$ 的一个上界，如果对任意 $j\in J$，都有 $j\leqslant i$.

1.4.1 Zorn 引理 设 $\leqslant$ 是非空集合 I 上的一个偏序. 如果 I 的任一以 $\leqslant$ 为全序的非空子集都有上界，则 I 中必有对 $\leqslant$ 极大的元素.

Zorn 引理可由选择公理证明．但若把 Zorn 引理本身作为公理，则已知它与选择公理在逻辑上是等价的．故我们把 Zorn 引理作为一条公理而不加证明．

定理 1.4.2 设 F 是非空集合 I 上的任意一个滤，则必存在 I 上的超滤 $D\supset F$．

证明 以 J 表示 I 上所有包含 F 的滤的集合，显然 J 是非空的．在 J 中引进偏序$\leqslant$：$j_1\leqslant j_2$ 当且仅当 $j_1\subset j_2$．设K 是 J 的任一以$\leqslant$为全序的非空子集．令 $\overline{K}=\bigcup K=\{x/$ 存在 $k\in K$，使 $x\in k\}$．显然 $\overline{K}\subset P(I)$是非空的．1) 因为对任意 $k\in K$，$\phi\notin k$，故 $\phi\notin\overline{K}$．2) 若 A，$B\in\overline{K}$，则必有 k_1，$k_2\in K$，使 $A\in k_1$，$B\in k_2$，因 K 是全序的，故 $k_1\subset k_2$ 和 $k_2\subset k_1$ 中必有一个成立．不妨设 $k_1\subset k_2$，于是 A，$B\in k_2$，$A\cap B\in k_2$，因此 $A\cap B\in\overline{K}$．3) 设 $A\in\overline{K}$，$A\subset B\in P(I)$，则必有 $k\in K$，使 $A\in k$，故 $B\in k$，于是 $B\in\overline{K}$．综合 1)、2)、3)知 $\overline{K}$ 是 I 上的滤．又显然 $\overline{K}\supset F$，故 $\overline{K}\in J$．对任意 $k\in K$，$k\subset\overline{K}$，故 $\overline{K}$ 是 K 对$\leqslant$的一个上界．于是由 Zorn 引理知 J 中有对$\leqslant$极大的元素．设 D 是一个极大元素，我们来证明 D 是超滤．对任意 $A\in P(I)$，若 A 和 A^c 均不属于 D，则对任意 $B\in D$，必有 $A\cap B\neq\phi$．因若 $A\cap B=\phi$，则 $B\subset A^c$，由 D 是滤的事实，将导出 $A^c\in D$．令

$$\overline{D}=\{C\in P(I)/\text{存在 } B\in D,\text{ 使 } C\supset A\cap B\}.$$

容易验证 $\overline{D}$ 是一个滤，$\overline{D}\supset D$，但 $\overline{D}\neq D$．这与 D 是 J 中的极大元素的事实矛盾．故 D 必是超滤．证毕．

定理 1.4.3 设 I 是无限集，则在 I 上存在可数不完备的超滤．

证明 因 I 是无限集，故必存在可数分割 I_1，I_2，$\cdots$，使对任意 $n\in N$，$I_n\neq\phi$．对任意 $k\in N$，和 n_1，n_2，$\cdots$，$n_k\in N$，

容易验证 $I_{n_1}^c\cap\cdots\cap I_{n_k}^c\neq\phi$. 令

$$F=\{A\in P(I)/存在\ n_1,\ \cdots,\ n_k\in N,\ 使\ A\supset I_{n_1}^c\cap\cdots\cap I_{n_k}^c\}.$$

易见 F 是一个滤. 由定理 1.4.1, 有 I 上的超滤 $D\supset F$. 由 F 的定义知, 对任意 $n\in N$, $I_n^c\in F$, 故 $I_n^c\in D$, 于是 $I_n\notin D$. 由定理 1.3.9 知 D 是可数不完备的. 证毕.

因为有时直接应用选择公理要更方便些, 故我们叙述选择公理的精确形式, 并用 Zorn 引理加以证明.

1.4.4 选择公理 设 S 是一个非空集合, 其元素 X 皆是非空集合, 则有 S 上的函数 f, 使对任意 $X\in S$, 有 $f(X)\in X$.

证明 令 $P=\{g/g$ 是 S 的某一非空子集 Z 上的函数, 满足对任意 $X\in Z$, $g(X)\in X\}$. 因 S 非空, 故有 $X_0\in S$. 由假设 X_0 是非空集, 故有 $x_0\in X_0$. 令 g_0 是集合 S 的子集 $\{X_0\}$ 上的函数, 由 $g(X_0)=x_0$ 给出, 则 $g_0(X_0)\in X_0$, 因此 $g_0\in P$, 即 P 是非空的. 在 P 上引进偏序 $\leqslant$: $g_1\leqslant g_2$, 当且仅当 g_1 的定义域 $z_1\subset g_2$ 的定义域 z_2, 且 $g_2|_{z_1}=g_1$. 设 $Q=\{g_i/i\in I\}$ 是 P 的对“$\leqslant$”全序的子集, 令 $z=\bigcup\limits_{i\in I}z_i$, 对任意 $X\in z_i$, 令 $g(X)=g_i(X)$, 则 g 的定义域是 z, 且 $g\in P$. 易见, g 是 Q 的一个上界. 于是由 Zorn 引理, P 中有极大元素 f. 若 f 的定义域 $Z_1\neq S$, 则有 $X_1\in S\setminus Z_1$. 取 $x_1\in X_1$. 定义 $Z\cup\{X_1\}$ 上的函数 f_1, 满足 $f_1|_{z_1}=f$, $f_1(X_1)=x_1$, 则 $f_1\neq f$, 但 $f_1\geqslant f$, 与 f 是极大元素矛盾. 故 f 的定义域必是 S. 证毕.

§1.5 $\mathbb{R}$ 的超幂

在 §1.2 中, 我们定义了环 $\mathbb{R}^N/\sim$. 等价关系“$\sim$”现在

可以重新叙述如下：

$(a_n)\sim(b_n)$当且仅当$\{n/a_n=b_n\}\in$ Frechet 滤．为了消除$\mathbb{R}^N/\sim$有零因子和不是全序的缺陷，我们取 N 上的一个包含 Frechet 滤的超滤 F，而定义等价关系“$\sim_F$”如下：

$(a_n)\sim_F(b_n)$当且仅当$\{n/a_n=b_n\}\in F$.

定理 1.4.2 保证了这样的超滤 F 的存在性，而这样的 F 必是可数不完备的，因为存在着 N 的显然的可数分割 $\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, 而$\{n\}\notin F$. 因为 $F\supset$Frechet 滤，“$\sim_F$”的等价类比“$\sim$”的等价类要大.

取定一个 F，令 $^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^N/\sim_F$，我们有

定理 1.5.1 $^*\mathbb{R}$ 是以 $\mathbb{R}$ 为真子域的域.

证明 令 $\mathscr{I}=\{(a_n)\in\mathbb{R}^N/(a_n)\sim_F(0)\}$，我们来证明 $\mathscr{I}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的极大理想．首先，不难看出 $\mathscr{I}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个子环．其次，对任意$(a_n)\in\mathscr{I}$ 和$(b_n)\in\mathbb{R}^N$，因为 $\{n/a_nb_n=0\}\supset\{n/a_n=0\}\in F$，故$\{n/a_nb_n=0\}\in F$．因此$(a_n)\cdot(b_n)=(a_nb_n)\in\mathscr{I}$，即 $\mathscr{I}$ 是理想．又设理想 $\mathscr{I}'\supset\mathscr{I}$，但 $\mathscr{I}'\neq\mathscr{I}$，则有 $c_n\in\mathscr{I}'\setminus\mathscr{I}$，因而$\{n/c_n=0\}\notin F$．令

$$d_n=\begin{cases}c_n^{-1}, & \text{当 } c_n\neq 0,\\ 0, & \text{当 } c_n=0,\end{cases}$$

则$\{n/c_nd_n=1\}=\{n/c_n\neq0\}\in F$．故$(c_n)\cdot(d_n)=(c_nd_n)\sim_F(1)$．因 $\mathscr{I}'$ 是理想，故$(c_n)\cdot(d_n)\in\mathscr{I}'$，即$(1)\in\mathscr{I}'$，因而 $\mathscr{I}'=\mathbb{R}^N$．又易见 $\mathscr{I}\neq\mathbb{R}^N$，故 $\mathscr{I}$ 是极大理想，因而 $^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^N/\sim_F=\mathbb{R}^N/\mathscr{I}$ 是域(不熟悉极大理想的读者亦不难直接验证 $^*\mathbb{R}$ 是域).

对任意 $a\in\mathbb{R}$，以 $^*a$ 表常数序列 $(a)\in\mathbb{R}^N$ 所属的等价类 $[a]\in{}^*\mathbb{R}$，则易见 $a\to{}^*a$ 是 $\mathbb{R}\to{}^*\mathbb{R}$ 的域内射(injection)．视 a 与 $^*a$ 为同一，则 $\mathbb{R}$ 便是 $^*\mathbb{R}$ 的一个子域.

为证明 $\mathbb{R}$ 是 $^*\mathbb{R}$ 的真子域，我们来看数列$\left(\frac{1}{n}\right)$. 对任意 $a\in\mathbb{R}$，显然有$\left\{n\middle/\frac{1}{n}=a\right\}\notin F$，故$(a)\not\sim_F\left(\frac{1}{n}\right)$. 因此$\left(\frac{1}{n}\right)$的等价类$\left[\frac{1}{n}\right]$作为 $^*\mathbb{R}$ 的元素不等于 $^*a$. 于是 $^*\mathbb{R}\neq\mathbb{R}$. 证毕.

在 $^*\mathbb{R}$ 中引进偏序$\leqslant$如下：对任意(a_n)，$(b_n)\in\mathbb{R}^N$，我们说$[a_n]\leqslant[b_n]$，如果$\{n/a_n\leqslant b_n\}\in F$. 易见这一定义不依赖于等价类中的代表元的选取.

我们说$[a_n]<[b_n]$，如果$[a_n]\leqslant[b_n]$，但$[a_n]\neq[b_n]$.

定理 1.5.2 “$\leqslant$”是 $^*\mathbb{R}$ 上的一个全序，限制在 $\mathbb{R}$ 上与 $\mathbb{R}$ 的序相同.

证明 对任意(a_n)，$(b_n)\in\mathbb{R}^N$，我们有

$$N=\{n/a_n=b_n\}\cup\{n/a_n<b_n\}\cup\{n/a_n>b_n\}.$$

因 $N\in F$，由定理 1.3.10，右边三个集合中必至少有一个属于 F. 因它们彼此不相交，用 1.3.3 不难证明只能有一个属于 F. 于是$[a_n]=[b_n]$，$[a_n]<[b_n]$ 和 $[b_n]<[a_n]$ 中恰有一个成立. 因此“$\leqslant$”是 $^*\mathbb{R}$ 上的一个全序. 对任意 $a,b\in\mathbb{R}$，$a\leqslant b$ 显然等价于 $^*a\leqslant{}^*b$. 故“$\leqslant$”限制在 $\mathbb{R}$ 上与 $\mathbb{R}$ 的序相同. 证毕.

对任意$(a_n)\in\mathbb{R}^N$，用$|[a_n]|=[|a_n|]$表 $[a_n]\in{}^*\mathbb{R}$ 的绝对值.

定义 1.5.3 $[a_n]\in{}^*\mathbb{R}$ 被称为是无穷小(大)，如果对任意非零实数 a，$|[a_n]|<(>)|^*a|$.

设除有限项外，$a_n\neq0$. 易见，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则$[a_n]\in{}^*R$ 是非零无穷小；若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则$[a_n]$是正无穷大. 若$[a_n]$是非零无穷小，则对任意 $a\in\mathbb{R}$，$[aa_n]$亦是无穷小，且当 $a\neq b$ 时，$[aa_n]\neq[ba_n]$. 故无穷小有无限多个，无穷大亦然.

我们称 $^*\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个超幂. $^*\mathbb{R}$ 包含普通实数. 无穷小