高等院校选用教材系列

近代物理实验教程

林木欣　主　编
熊予莹　高长连　朱文钧
刘战存　冯显灿　等编

科学出版社
Science Press

内 容 简 介

本书选编了在近代物理发展过程中起过重大作用的一些著名实验，以及近代物理实验技术中有广泛应用的典型实验，包括原子物理、核物理、激光、真空、X 射线、低温、固体物理、声学、微波、磁共振、计算机模拟和微弱信号检测技术等方面的 42 个实验. 本书重点在于阐述实验的物理思想和方法，注重培养学生的实验能力，提高其科学素质.

本书的读者对象主要是高等师范院校和理工类高等院校的本科生和函授生，也可供有关专业的研究生、科技人员和中学物理教师参考.

图书在版编目（CIP）数据

近代物理实验教程/林木欣主编. -北京：科学出版社，1999. 7

高等院校选用教材系列

ISBN 7-03-007335-5

Ⅰ. 近… Ⅱ. 林… Ⅲ. 物理-实验-教材 Ⅳ. 04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 05589 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999 年 7 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1999 年 7 月第一次印刷 印张：20 3/4

印数：1—5 000 字数：477 000

定价： 32.00 元

序

“近代物理实验”是为大学高年级学生开设的一门重要的实验课程.它所安排的实验题目以在近代物理发展史中起过重要作用的著名实验为主,注意介绍近代物理发展各重要领域中有代表性的基本实验和方法,以及学生在今后工作中经常碰到的一些现代实验技术.本课程可以配合有关课程(主要是原子物理、理论物理、固体物理等),帮助学生理解和掌握近代物理各领域中的一些重要现象、概念和规律,掌握20世纪以来近代物理发展各主要领域中的基本实验方法与技能,从而培养学生的独立工作能力与创新精神,学习如何用实验方法研究物理现象与规律.

近代物理实验涉及的知识面很广,有很强的综合性与技术性,所需实验装置比较昂贵,一般高等院校开出的近代物理实验的个数都比学生实际要做的实验个数程度不等地多一些.在教学方式上要求学生能独立地完成实验.不同的学生选做不同的实验,这有利于学生间互相交流、开扩眼界和培养他们的协作精神,同时能大大减少每个实验设备的套数,节省教学经费.

由于各校在培养目标、教学计划以及学生水平上存在的差异,有些近代物理实验教材对重点大学是好的,而对普通大学来说,用起来却有不少困难,教学效果令人难以满意.这本由华南师范大学林木欣教授主编的《近代物理实验教程》,是在调研了一些省、市属大学,特别是高等师范院校“近代物理实验”教学的具体情况后,组织一些长期从事实验物理教学和科研工作的老教师和近几年补充到实验教学队伍中的年轻博士共同编写的,目的是为一般高等学校,特别是高师院校提供一本较适用的近代物理实验教材.

我很赞赏这本教材的编写原则:在选题方面,既要考虑教学内容现代化的要求,又要兼顾基本实验方法与技能的训练;优选一些既能反映物理学新成就、有丰富的物理内容,又使学生能得到先进、有用的实验技术训练方面的课题;编写时,内容写得比较简明扼要,突出实验的物理思想和测量方法,注意不同学校使用的普适性和兼容性;既有常规训练内容,又有打*号的设计性和独立选做的内容,使各校可根据自身的条件进行选题和选择教学方法,以满足教学改革的要求.

写此序时不幸接到林木欣教授为本书的出版劳累过度,不幸病逝的噩耗.深为我国实验物理教育界失去一位良师益友而无限惋惜.希望这本具有一定特色的《近代物理实验教程》能够满足普通大学,特别是高等师范院校的教学需要,产生良好的教学效果,受到师生的欢迎,以安慰死者在天之灵.

吴思诚

1998年10月

前　　言

“近代物理实验”是物理专业学生必修的专业基础课程，也是其他理工科需要较深厚物理基础的有关专业学生的选修课程. 由于这门课的知识面广、难度大、所需的实验装置比较昂贵，一般的高校，特别是高等师范院校开设该课程困难较大. 为此，我们吸取了近十多年来开设该实验课程的经验，结合当前科技发展和教改精神重新编写了本教程，目的是为一般高等学校(特别是高等师范院校)提供一本较容易接受的近代物理实验教材.

本教程在选题方面希望努力做到基础与应用并重，从面向 21 世纪出发，既考虑到现代化的要求，又照顾到传统的训练题材. 因此，在保证基础物理内容不削弱的同时，注意加强了应用技术方面的选题. 在本书的 42 个实验选题中，不但有在近代物理发展过程中起过重大作用的一些著名实验，也有在近代物理实验技术中有广泛应用的典型实验. 在本教材中，我们还注意吸收了一些最新的科研成果，例如在实验误差分析和数据处理方面，采用了国际计量局和中国国家计量局技术规范的最新规定.

我们在编写本书时，特别注意到实验教学改革的需要，除了力求思想脉络清晰，突出物理思想和实验方法以外，还希望对各个实验的教学实施有较大的灵活性，以适应各层次的教学. 例如，在实验内容方面，既有带常规训练的内容，又有打“ * ”号的设计性、半设计性、扩展性或独立选做的内容；有些选题可以有不同的做法，如电子自旋共振可在微波段做，也可在射频段做；在仪器设备的选择上，也有一定的自由度. 各校可根据自身的条件进行选题、安排实验和选择教学方法等，探索适合于本校的可行的改革路子.

本书由华南师范大学林木欣教授主编，组织了几所进行“211 工程”建设或进行实验教学重点建设的大学中一些富有实验教学、科研经验的教师集体编写，各个部分的作者分别在所撰写的内容后面署明.

本书的出版得到前国家教委高等学校理科物理教材编审委员会主任委员虞福春教授和教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会副主任吴思诚教授的热情关怀和支持，特别是吴思诚教授在百忙当中还为本书作序，在此表示衷心的感谢.

在本书的编写过程中，还得到很多专家、教授、同行的支持和帮助. 何振江教授、肖新民教授、方兴教授以及近代物理实验的老前辈黄飞虎先生等提出过许多建设性意见或审阅了部分原稿；冯明库同志为本书的文字处理和插图绘制做了大量工作；孙番典、程敏熙、吴先球、唐吉玉和张诚等老师为本书的编写和出版做了很多的具体工作. 在此我们谨向他们致以诚挚的谢意.

林木欣教授为了此书的编写和出版，呕心沥血工作到生命的最后一刻，在此书最后完稿之际不幸逝世. 在本书即将出版之际，我们深切地怀念林木欣教授.

我们深知，物理教育改革的路很长，物理实验教材建设的路很长，我们这本书，远不是完全符合客观发展需要的理想教材，盼望各位老师、各位读者提出宝贵意见，共同推动物理科学、物理教育事业不断前进. 这是林木欣教授生前的愿望，也是我们全体编者的愿望.

目　　录

误差分析与数据处理

误差理论是实验工作的数学工具. 在近代物理实验中,通常要用到较为综合的实验技术,以及较为复杂的实验设备;其测量值有些比较精确,有些具有明显的统计涨落;其测量过程有些要严格控制条件,有些只能获取极其微弱的信息……. 因此,需要提高误差理论水平,才能理解好实验设计,才能有效地进行实验测量和数据处理,对实验结果作出正确的评价和分析.

不确定度是测量结果的测度,没有不确定度说明,测量结果将无从比较. 1993 年,国际计量局(BIPM)等 7 个国际组织发表了《测量不确定度表示指南》. 这一国际的权威性文献,对计量和科学实验工作极其重要. 下面我们将从误差和不确定度的基本概念开始,着重介绍常用的误差理论知识,阐述误差分析的概率统计理论基础. 希望有助于读者提高实验的误差分析和数据处理能力,学会用不确定度表示实验测量结果.

§1　测量误差和不确定度概念

一、测量误差的定义和表示法

当我们对某物理量进行测量时,受到测量的环境、方法、仪器以及观测者等诸多因素的影响,使得测量值偏离真值,即相对于真值有误差.

$$误差 = 测量值 - 真值. \tag{0.1.1}$$

何谓真值? 真值是在特定条件下被测量的客观实际值. 当被测量和测量过程完全确定,且所有测量的不完善性完全排除时,则测量值就等于真值. 这就是说,真值是一个理想的概念,通过完善的测量才能获得. 但是,严格的完善测量难以做到,故真值就不能确定. 实践中是采用约定真值,即对明确的量赋予的值,有时叫最佳估计值、约定值或参考值. 例如,在仪器校验中,把高一级标准器的测量值作为低一级标准器或普通仪器的约定真值.

上面定义的误差是绝对误差. 在没有特别指明时,误差就是用绝对误差来表示. 设被测量的真值为 μ,则测量值 x 的绝对误差

$$\delta = x - \mu. \tag{0.1.2}$$

有些问题往往需要用相对误差表示. 例如,测量 10m 长相差 1mm 与测量 100m 长相差 1mm,其绝对误差相同,而相对误差则不同. 相对误差是绝对误差与真值之比,真值不能确定则用约定真值. 在近似情况下,相对误差也往往表示为绝对误差与测量值之比. 相对误差常用百分数表示,即

$$相对误差 = \frac{\delta}{\mu} \times 100\% \approx \frac{\delta}{x} \times 100\%. \tag{0.1.3}$$

在多档连续示值的仪表等计量器具中,各刻度点的示值和它所对应的真值都不同,用式(0.1.3)计算相对误差时因所有的分母都不同而很不方便,同时也难以表征仪表的准确度

等级. 为此引入一种简化的和实用的相对误差，取名为引用误差. 它等于计量器具示值的绝对误差除以某特定值，这个特定值通常是仪器测量范围的上限，或零点两侧测量范围之和. 引用误差通常也是以百分数给出. 电工仪表的准确等级分为 0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5 和 5.0 等七级，就是以所属仪表的最大引用误差为标志的. 对于第 S 级仪表，表明其合格仪表的最大引用误差不超过 $S\%$，但不能认为各刻度点上的示值误差都是 $S\%$. 设某仪表的满刻度值为 x_n，测量点的值为 x，则该仪表在 x 值邻近处的示值误差为

$$\text{绝对误差} \leqslant x_n \cdot S\%; \quad \text{相对误差} \leqslant \frac{x_n}{x} \cdot S\%. \tag{0.1.4}$$

因 $x \leqslant x_n$，故 x 越接近于 x_n 处，其准确度越高；x 越远离 x_n 处，其准确度越低. 因此，用这类仪表测量时应选择合适的量程档次，尽可能使测量点处在 2/3 量程以上.

二、系统误差、随机误差和粗大误差

按误差出现的特点不同，可分为系统误差、随机误差和粗大误差.

1. 系统误差. 在一定条件下对同一被测量进行多次测量时，保持恒定或以预知方式变化的测量误差称为系统误差. 它包含有两类：一是固定值的系统误差，其值(包括正负号)恒定；二是随条件变化的系统误差，其值以确定的、已知的规律随某些测量条件变化.

系统误差来源于测量装置(标准器、仪器、附件和电源等的误差)、环境(温度、湿度、气压、振动和电磁辐射等影响)、方法(理论公式的近似限制或测量方法不完善)，以及人身(测量者感官不完善，具有某种习惯和偏向)等方面. 其产生原因往往可知或能掌握，一经查明就应设法消除其影响. 对未能消除的系统误差，若它的符号和大小是确定的，可对测量值加以修正；若它的符号和大小都不确定的，可设法减小其影响并估计出误差范围.

2. 随机误差. 在一定条件下对被测量进行多次测量时，以不可预知的随机方式变化的测量误差称为随机误差. 这种误差值时大时小，时正时负，没有规律性，它引起被测量重复观测的变化.

随机误差来源于许多不可控因素的影响. 例如周围环境的无规起伏，仪器性能的微小波动，观察者感官分辨本领的限制，以及一些尚未发现的因素等. 这种误差对每次测量来说没有必然的规律性，但进行多次重复测量时会呈现出统计规律性. 虽然无法消除或补偿测量结果的随机误差，但增加观测次数可使它减小，并可用统计方法估算其大小.

3. 随机误差与系统误差的关系. 随机误差与系统误差虽然不同，但并无本质差别. 随机误差本身正是许多微小的、独立的、难以控制和不可分解的系统误差的随机组合. 另外，系统误差和随机误差还可以在一定条件下相互转化. 例如尺子的分度误差，从制造产品的角度来说是随机误差，但用户使用有分度误差的尺子引起的测量误差则是系统误差.

在实际测量中，虽然尽可能地设法限制和消除系统误差，通过多次测量以减少随机误差，但两种误差往往还会同时存在，这时需按其对测量结果的影响分别对待：

(1) 若系统误差经技术处理后已消除，或远小于随机误差，可按纯随机误差处理；

(2) 若系统误差的影响远大于随机误差，可按纯系统误差处理；

(3) 若系统误差与随机误差的影响差别不太大，两者均不可忽略，则应按不同的方法分别处理并综合两种误差.

表达测量误差的大小，有两个常用的术语：其一用精密度(precision)来描述重复测量的离散程度，它反映随机误差的大小，精密度高则离散小，重复性好；其二用准确度(accuracy)来描述测量结果与被测量真值之间的一致程度，它反映系统误差与随机误差综合的结果，准确度越高则测量值越接近真值. 顺便指出，过去的书刊中除了用精密度反映随机误差以外，还用正确度反映系统误差的大小；用精确度反映两种误差的综合结果；以及用精度来描述相对误差，例如某测量值的相对误差为 0.01%时，则说其精度为 10^{-4}.

4. 粗大误差．明显超出规定条件下预期值的误差称粗大误差. 这是在实验过程中，由于某种差错使得测量值明显偏离正常测量结果的误差. 例如读错数，记错数，或者环境条件突然变化而引起测量值的错误等. 在实验数据处理中，应按一定的规则来剔除粗大误差. 关于剔除粗大误差的准则将在下面 §4 中讨论.

三、测量不确定度的基本概念

由于测量误差不可避免，使得真值也就无法确定；而真值不知道，也就无法确定误差的大小. 因此，实验数据处理只能求出实验的最佳估计值及其不确定度，通常把结果表示为

$$\text{测量值} = \text{最佳估计值} \pm \text{不确定度}. \tag{0.1.5}$$

实验测量中，消除了已定的系统误差后仍然存在着随机误差和未定的系统误差. 设被测量 X 的测量值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则最佳估计值为算术平均值 $\bar{x} = \sum x_i / n (i = 1, 2, \cdots, n)$.

何谓不确定度？不确定度是说明测量结果的一个参数，用于表征合理赋予被测量值的分散性. 按照这个定义可诠释为：不确定度是由于误差的存在，使得被测量值不能确定的程度；或者说，它是表征被测量真值所处量值范围的一个评定. 由此可见，不确定度与误差有区别，误差是一个理想的概念，一般不能准确知道；但不确定度反映误差存在分布范围，即随机误差分量和未定系统误差分量综合的分布范围，可由误差理论求得.

不确定度一般包含有多个分量，按其数值的评定方法可归并为两类：

A 类：由统计分析方法评定的不确定度分量；

B 类：由其他方法评定的不确定度分量.

假定被测量有几个误差来源，则要判明哪些可用统计方法评定，哪些不能用统计方法而要用其他方法评定.

由于不确定度的评定要合理赋予被测量值的不确定区间，而不同的置信概率所表示的不确定区间是不同的，因此还应表明是多大概率含义的不确定度. 如果 A 类和 B 类不确定度分量均以一个标准差值评定，则合成不确定度 U 也是一个标准差，用 u_c 表示，(即 $U = u_c$)，称为标准不确定度. 如果把合成的标准不确定度 u_c 乘以一个与一定置信概率相联系的包含因子(又称复盖因子) k，则 $U = ku_c$，称为展伸不确定度(或总不确定度). 所以用展伸不确定度表示，是为了使被测量值的真值以较高的置信概率落入该区间.

应该指出，随机误差和未定系统误差并不简单地对应于 A 类和 B 类不确定度分量. 因为对于未能进行 n 次重复测量的情况，其随机误差就不可能利用统计方法处理，而要利用被测量可能变化的信息进行判断，这就属于 B 类不确定度分量. 关于两类不确定度分量的评定和合成不确定度的计算问题，在后面 §4 中讨论.

§2 随机变量的概率分布

一、随机变量和概率分布函数

在物理实验中，除了存在着不能完全控制的因素而导致随机误差必然存在以外，被测对象本身也具有随机性. 例如宏观热力学量(温度、密度、压强等)的数值都是统计平均值，原子和原子核等微观领域的统计涨落现象也非常突出. 这就使得实验观测值不可避免地带有随机性，必须用概率论和数理统计的方法来处理实验数据. 为此，我们需要研究随机变量的概率及其概率分布函数.

1. 随机变量. 当我们观测某物理量时，某一观测值的出现是随机事件，而观测值则是随机变量.

现在，用更为普遍的数学语言来描述. 在一定条件下，现象 A 可能发生，也可能不发生，而且只有这两种可能性. 我们把发生现象 A 的事件称为随机事件 A.

如果在一定的条件下进行了 N 次试验，其中事件 A 发生了 N_A 次，则比值 N_A/N 称为事件 A 发生的频率. 当 $N\to\infty$时，频率的极限称为事件 A 的概率，记为 $P_r(A)$，即

$$P_r(A) = \lim_{N\to\infty}\frac{N_A}{N}. \qquad (0.2.1)$$

不同的随机事件由不同的数来表示，这个数便是随机变量. 随机变量有两种类型：只能取有限个或可数个数值的随机变量称离散型随机变量；可能值布满某个区间的随机变量称为连续型随机变量.

随机变量全部可能取值的集合称为总体(或母体). 总体的任何一个部分称为样本(或子样). 在实际试验中，对某量作有限次观测，测量结果总是获得某随机变量的样本.

对随机变量的描述，不仅要了解它的可能取值，而且还必须了解可能值的概率.

2. 分布函数、概率函数和概率密度函数. 设有随机变量 X，它的取值 x 可以排列在实数轴上，其概率分布用分布函数 $P(x)$ 表示. $P(x)$ 在 x 处的取值，等于 X 取值小于和等于 x 这样一个随机事件的概率：

$$P(x) = P_r(X \leqslant x). \qquad (0.2.2)$$

按定义，它必须满足

$$P(-\infty) = 0; \quad P(\infty) = 1. \qquad (0.2.3)$$

离散型随机变量 X 只能取可数的数值 $x = x_1, x_2, x_3, \cdots$，记为 x_i. 除了分布函数以外，还用概率函数来描述它的概率分布. 当 X 取值为 x_i 时，其概率函数为 $p(x_i)$，简写为 p_i，即 $X = x_i$ 的概率

$$p_i = P_r(X = x_i). \qquad (0.2.4)$$

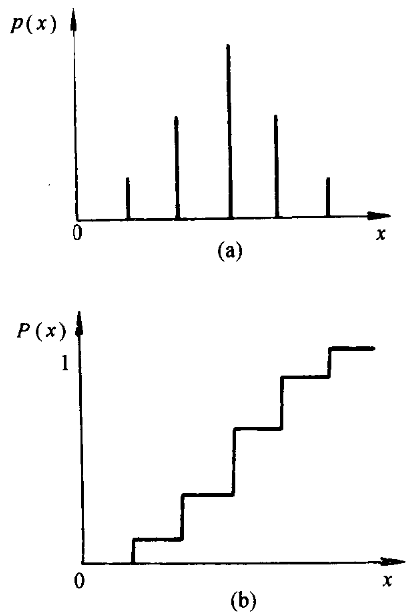

图 0.2.1 离散型随机变量 X 的概率函数(a)和分布函数(b)

概率函数和分布函数的形状如图 0.2.1 所示. 因概率总和等于 1(归一化条件),则

$$\sum p_i = P(\infty) = 1. \tag{0.2.5}$$

对于连续型随机变量 X,可引入概率密度函数 $p(x) = \mathrm{d}P(x)/\mathrm{d}x$ 来描述概率分布,则

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x. \tag{0.2.6}$$

由归一化条件有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = P(\infty) = 1. \tag{0.2.7}$$

用图形表示,概率密度函数是一条连续的曲线,分布函数是一条单调上升到 1 的曲线(见图 0.2.2). 概率密度函数曲线图在横轴上任一点 x' 左边曲线下的面积,就是分布函数曲

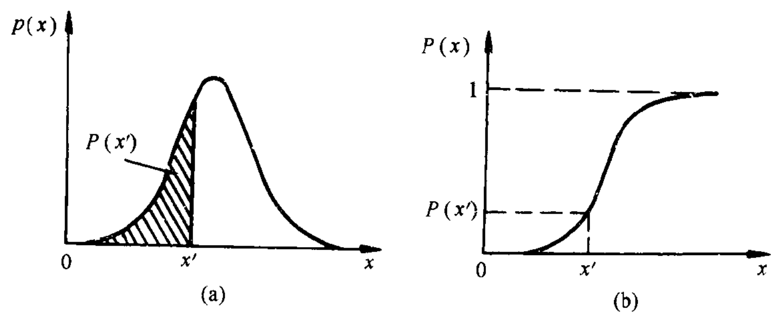

图 0.2.2 连续型随机变量 X 的概率密度函数(a)和分布函数(b)

线在该点的值;概率密度函数曲线下的总面积为 1. 由概率密度函数或分布函数可求得随机变量 X 在区间$[a,b]$内取值的概率

$$P_r(a \leqslant x \leqslant b) = P(b) - P(a) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x.$$

对于多个随机变量的情况,特别是当 X 和 Y 是两个互相独立的随机变量时,由概率论可得,它们的联合概率密度函数等于各自的概率密度函数的乘积. 即

$$p(x,y) = p(x) \cdot p(y). \tag{0.2.8}$$

二、概率分布的数字特征量

若一个随机变量的概率函数或概率密度函数的形式已知,只要给出函数式中各个参数(称分布参数)的数值,则随机变量的分布就完全确定. 在不同形式的分布中,常用一些有共同定义的数字特征量来表示,而最重要的特征量是随机变量的期望值和方差.

1. 随机变量的期望值. 以概率 p_i 取值 x_i 的离散随机变量 X,它的期望值(通常以 μ 或 $E(X)$ 标记)定义为

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i, \tag{0.2.9}$$

式中求和延伸于可取的一切 x_i 值.

具有概率密度函数 $f(x)$ 的连续随机变量 X,它的期望值定义为

$$\mu = E(X) = \int xp(x)dx, \tag{0.2.10}$$

式中积分延伸于 X 的变化区间(常写为从 $-\infty$ 积到 $+\infty$).

期望值的物理意义,是作无穷多次重复测量时测量结果的平均值.根据前两式和归一化条件可得

$$\sum (x_i - \mu)p_i = 0; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(x_i - \mu)p(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{0.2.11}$$

式(0.2.11)表明,随机变量分布在它的期望值的周围.

注意:为方便起见,下面对随机变量及其具体数值的书写往往不加以区分.例如,x 既可以代表一个随机变量,也可以代表随机变量的一个值;期望值 $E(X)$ 也可写为 $E(x)$.另外,期望值也常用尖括号表示,即 $E(x) = \langle x \rangle = \mu$.

现在,把随机变量的期望值概念加以推广.若随机变量 x 的概率密度函数为 $p(x)$,则随机变量函数 $f(x)$ 的期望值定义为

$$E[f(x)] = \langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p(x)\mathrm{d}x. \tag{0.2.12}$$

2.随机变量的方差.随机变量 x 的方差[通常以 $V(x)$ 或 $\sigma^2(x)$ 标记,$\sigma^2(x)$ 可简写为 σ_x^2]定义为

$$V(x) = \sigma^2(x) = E[(x - \langle x \rangle)^2]. \tag{0.2.13}$$

对于具有概率密度函数 $p(x)$ 的随机变量,上式可写为

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \langle x \rangle)^2 p(x)\mathrm{d}x. \tag{0.2.14}$$

方差的正平方根 $\sigma(x)$ 称为随机变量 x 的标准误差,简称标准差.方差或标准差用以描述随机变量围绕期望值分布的离散程度.

根据方差的定义,由上式不难证明

$$\sigma^2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

3.两个随机变量的协方差.两个随机变量的协方差定义为

$$\mathrm{Cov}(x,y) = E[(x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle)]. \tag{0.2.15}$$

设两随机变量 x,y 具有联合概率密度函数 $p(x,y)$,则上式可写为

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty}(x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

协方差描述两随机变量的相互依赖程度.由定义式必然有 $\mathrm{Cov}(x,y) = \mathrm{Cov}(y,x)$.当协方差不等于零时,则两随机变量一定不相互独立.但不能反过来以 $\mathrm{Cov}(x,y) = 0$ 作为充分的判据,通常还要用相关系数 $\rho(x,y)$ 来描述两随机变量的相关程度:

$$\rho(x, y) = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)}. \tag{0.2.16}$$

根据协方差定义,不难证明

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle\langle y \rangle.$$

三、几种常用的概率分布

由于随机变量受到不同因素的影响,或者物理现象本身的统计性差异,使得随机变量

的概率分布形式多种多样. 这里讨论几种常用的分布，要注意掌握其概率函数(或概率密度函数)和数字特征量.

1. 二项式分布. 若随机事件 A 发生的概率为 P，不发生的概率为 $(1-P)$，现在讨论在 N 次独立试验中事件 A 发生 k 次的概率. 显然 k 是一个离散型随机变量，可能取值为 0,1,…,N. 对于这样一个随机事件，可导出其概率分布为

$$p(k)=\frac{N!}{k!(N-k)!}P^k(1-P)^{N-k}. \tag{0.2.17}$$

式中因子 $N!/[k!(N-k)!]$ 代表 N 次试验中事件 A 发生 k 次，而不发生为 $(N-k)$ 次的各种可能组合数. 若令 $q=1-P$，则这个概率表示式刚好是二项式展开

$$(P+q)^N=\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!(N-k)!}P^kq^{N-k}$$

中的项，因此式(0.2.17)所表示的概率分布称为二项式分布.

二项式分布中有两个独立的参数 N 和 P，故往往又把式(0.2.17)中左边概率函数的记号写作 $p(k;N,P)$. 遵从二项式分布的随机变量 k 的期望值和方差分别为

$$\langle k\rangle=\sum_{k=0}^{N}k\frac{N!}{k!(N-k)!}P^k(1-P)^{N-k}=NP, \tag{0.2.18}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(k)&=\langle k^2\rangle-\langle k\rangle^2=\langle k^2\rangle-N^2P^2\\&=\sum k^2\frac{N!}{k!(N-k)!}P^k(1-P)^{N-k}-N^2P^2\\&=NP(1-P).\end{aligned} \tag{0.2.19}$$

二项式分布有许多实际应用. 例如，穿过仪器的 N 个粒子被仪器探测到 k 个的概率，或 N 个放射性核经过一段时间后衰变 k 个的概率等，这些问题的随机变量 k 都服从二项式分布. 又例如，在产品质量检验或民意测验中，抽样试验以确定合乎其条件的结果的概率，也是二项式分布问题.

2. 泊松分布. 对于二项式分布，若 $N\to\infty$，且每次试验中 A 发生的概率 $p\to0$，但期望值 $\langle k\rangle=NP$ 趋于有限值 m，在这种极限情况下其分布如何?

由二项式分布的概率函数式

$$p(k)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{N!}{(N-k)!}p^k(1-P)^{N-k},$$

并考虑到 $N\to\infty$ 的情况，即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{(N-k)!}=\lim_{N\to\infty}[N(N-1)(N-2)\cdots(N-k+2)(N-k+1)]=N^k,$$

$$\lim_{N\to\infty}N^kP^k=\lim_{N\to\infty}(NP)^k=m^k,\qquad \lim_{N\to\infty}(1-P)^{N-k}=\lim_{N\to\infty}(1-NP)=e^{-m},$$

便可得到

$$p(k)=\frac{m^k}{k!}e^{-m}. \tag{0.2.20}$$

上式表示的概率分布称泊松分布. 可见泊松分布是二项式分布的极限情况.

注意到 $P\to0$ 时 $NP\to m$，利用式(0.2.18)和(0.2.19)，便可得到遵从泊松分布的随机变量 k 的期望值和方差:

$$\langle k\rangle=NP=m; \tag{0.2.21}$$

$$\sigma^2(k) = NP(1-P) = m. \tag{0.2.22}$$

因此,泊松分布只有一个参数 m,它等于随机变量的期望值或方差.

例如,一块放射性物质在一定时间间隔内的衰变数,一定时间间隔内计数器记录到的粒子数,高能荷电粒子在某固定长度的路径上的碰撞次数等,都遵从泊松分布.

3. 均匀分布. 若连续随机变量 x 在区间$[a,b]$上取值恒定不变,则这种分布为均匀分布. 均匀分布的概率密度函数

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{0.2.23}$$

其几何表示见图 0.2.3.

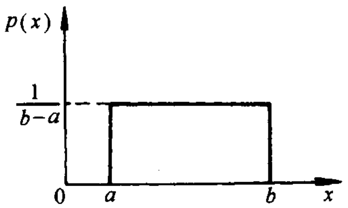

图 0.2.3 区间$[a,b]$上的均匀分布

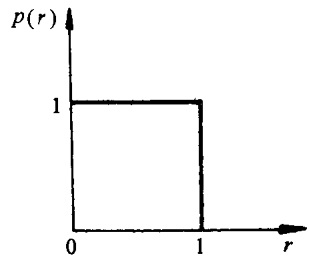

图 0.2.4 区间[0,1]上的均匀分布

均匀分布的期望值和方差为

$$\langle x \rangle = (a+b)/2, \tag{0.2.24}$$

$$\sigma^2(x) = (b-a)^2/12. \tag{0.2.25}$$

实验工作中常用[0,1]区间的均匀分布. 若用 r 表示该区间的随机变量,其概率密度函数为

$$p(r) = \begin{cases} 1, & 0 < r < 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

这个分布如图 0.2.4 所示. 随机变量 r 在该区间的期望值和方差,读者不难求得.

均匀分布是一种最简单的连续型随机变量分布,如数字式仪表末位± 1 量化误差,机械传动齿轮的回差,数值计算中凑整的舍入误差等都遵从均匀分布.

4. 正态分布. 实用中最重要的概率分布是正态分布(又称高斯分布). 正态分布的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \tag{0.2.26}$$

式中 x 是连续型随机变量,μ 和 σ 是分布参数,且 $\sigma > 0$. 为了标志其特征,通常又用 $n(x;\mu,\sigma^2)$ 表示正态分布的概率密度函数,用 $N(x;\mu,\sigma^2)$ 表示正态分布的分布函数,即

$$n(x;\ \mu,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right];$$

$$N(x;\ \mu,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}x.$$

不难求得,遵从正态分布的随机变量 x 的期望值和方差分别为

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot n(x;\ \mu,\ \sigma)\mathrm{d}x = \mu, \tag{0.2.27}$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot n(x;\ \mu,\ \sigma)\mathrm{d}x = \sigma^2. \tag{0.2.28}$$

由此可见,正态分布中的参数 μ 是期望值,参数 σ 是标准误差. 正态分布的特征由这两个参数的数值完全确定:若消除了测量的系统误差,则 μ 就是待测物理量的真值,它决定分布的位置;而 σ 的大小与概率密度函数曲线的"胖"、"瘦"有关,即决定分布偏离期望值的离散程度. 不同参数值的正态分布概率密度函数曲线如图 0.2.5 所示. 曲线是单峰对称的,对称轴处于期望值和概率密度极大值所在处.

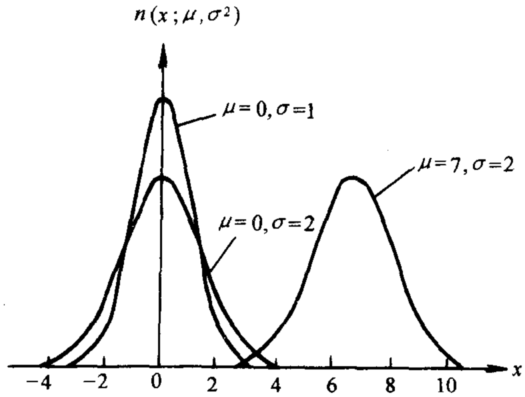

图 0.2.5 不同参数值的正态分布曲线

期望值 $\mu=0$ 和方差 $\sigma^2=1$ 的正态分布叫做标准正态分布,其概率密度函数和分布函数为

$$n(x;\ 0,\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \tag{0.2.29}$$

$$N(x;\ 0,\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x. \tag{0.2.30}$$

手册上给出的是标准正态分布的分布函数数值表(见书末附表Ⅲ). 若 $\mu\neq 0, \sigma^2\neq 1$,只要把随机变量 x 作线性变换

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}, \tag{0.2.31}$$

则随机变量 u 便遵从标准正态分布,且有

$$n(x;\ \mu,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sigma}\, n(u;\ 0,\ 1); \tag{0.2.32}$$

$$N(x;\ \mu,\ \sigma^2) = N(u;\ 0,\ 1). \tag{0.2.33}$$

这样便可利用标准正态分布求概率分布.

例 某随机变量 x 遵从正态分布,试利用标准正态分布表分别求出 x 落在期望值 μ 附近 $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$ 和 $\pm 3\sigma$ 的概率含量.

由式(0.2.31)可知,当 x 偏离期望值 $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$ 和 $\pm 3\sigma$ 时,标准正态分布随机变量取值分别为 ± 1, ± 2 和 ± 3,故查标准正态分布表求随机变量落在区间 $[-1,\ 1]$、$[-2,\ 2]$ 和 $[-3,\ 3]$ 内的概率即可.

当随机变量等于 1 时,标准正态分布表给出 $N(u;\ 0,1) = 0.8413$,这是图 0.2.6 曲线下的阴影部分(区间为 $[-\infty,1]$),而我们求的是图 0.2.7 曲线下的阴影部分(区间为 $[-1,1]$),即

$$\begin{aligned} N(u;\ 0,\ 1) - [1 - N(u;\ 0,\ 1)] &= 2N(u;0,1) - 1 = 2\times 0.8413 - 1 \\ &= 0.6826 \approx 68.3\%. \end{aligned}$$

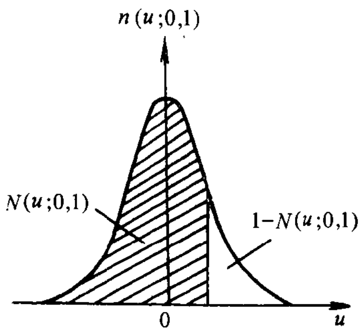

图 0.2.6　标准正态分布的分布函数

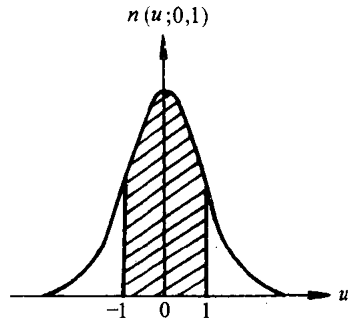

图 0.2.7　$N(u;\ 0,1)=\int_{-1}^{1}n(u;\ 0,1)\mathrm{d}x$

同理，标准正态分布的随机变量等于 2 和 3 时，分别有

$$2N(u;\ 0,\ 1)-1=2\times 0.9772-1=0.9544\approx 95.4\%;$$

$$2N(u;\ 0,\ 1)-1=2\times 0.9987-1=0.9973\approx 99.7\%.$$

故 x 落在区间 $[\mu-\sigma,\ \mu+\sigma]$ 内的概率含量为 68.3%；落在区间 $[\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma]$ 内的概率含量为 95.4%；落在区间 $[\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma]$ 内的概率含量为 99.7%.

理论上可以证明，若一个随机变量是由大量的、相互独立的、微小的因素所合成的总效果，则这个随机变量就近似地服从正态分布. 这就是说，由不能控制的大量的偶然因素造成的随机误差会遵从或近似遵从正态分布. 另外，许多非正态分布也常以正态分布为极限或很快趋于正态分布. 例如，对于泊松分布，若期望值 m 足够大时，它趋近于形式

$$p(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\exp\left[-\frac{(k-m)^2}{2m}\right].$$

而泊松分布的 $\sigma=\sqrt{m}$，故上式与正态分布的形式相同. 虽然泊松分布中的 k 是离散型变量，但当 $m\geqslant 10$ 时泊松分布已很接近于正态分布. 又例如，对于二项式分布，当 N 足够大时，也趋于形式为 $n(k;\ \mu,\sigma^2)$ 的正态分布，只不过 $\mu=NP$，$\sigma^2=NP(1-P)$ 而已.

§3　随机误差的统计分析

前面讨论了随机变量的总体分布，现在我们讨论随机误差的估计问题. 在实际测量中，只能得到有限次测量值，即随机样本. 我们研究随机误差是以随机样本为依据的，也就是说，是从随机样本来估计总体分布的参数. 在此我们假定系统误差不存在或已经修正，实验者是用相同的方法和仪器在相同的条件下作重复而相互独立的测量，得到一组等精度测量值. 这就是说，我们是讨论等精度测量中随机误差的数字特征问题.

一、正态分布参数的最大似然估计

首先介绍参数估计的最大似然法. 设某物理量 X 的 N 个等精度测量值为 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，它是总体 X 中容量为 N 的样本，我们把它看作 N 维的随机变量. 为了由样本估计总体参数，把 N 维随机变量的联合概率密度定义为样本的似然函数. 由式(0.2.8)得知，相

互独立随机变量的联合概率密度等于各个随机变量概率密度的乘积.设 x 的概率密度函数为 $p(x;\theta)$,θ 为该分布的特征参数(参数个数由分布而定),则联合概率密度函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N;\theta)=p(x_1;\theta)\cdot p(x_2;\theta)\cdots p(x_N;\theta)=\prod_{i=1}^{N}p(x_i;\theta),$$

即这个样本的似然函数定义为

$$L(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_N;\theta)=\prod_{i=1}^{N}p(x_i;\theta).\tag{0.3.1}$$

似然函数 L 可提供哪些信息呢?若参数 θ 已知,则 L 的大小说明哪些样本有较大的可能性;若参数 θ 未知,只知样本数据 $(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,则采用 θ 不同估计值会使得 L 有不同的数值,L 的大小说明哪些 θ 值有较大的可能性.最大似然法就是选择使实测数值有最大概率密度的参数值作为 θ 的估计值.若估计值 $\hat{\theta}$ 使似然函数最大,即

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_N;\theta)\big|_{\theta=\hat{\theta}}=L_{\max},$$

则 $\hat{\theta}$ 称为参数 θ 的最大似然估计.而要使似然函数最大,可通过 L 对 θ 求极值的方法而得到.为计算方便起见,可取 L 的对数求导数,即

$$\left.\frac{\partial\ln L(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_N;\ \theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0.\tag{0.3.2}$$

由于似然函数 L 与它的对数 $\ln L$ 是同时达到最大值的,故求解式(0.3.2)便可得到 θ 的最大似然估计值.

现在用最大似然法来估计正态分布的特征参数.由正态分布的概率密度函数式(0.2.26),得正态样本的似然函数

$$\begin{aligned}L(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_N;\ \ \mu,\ \sigma^2)&=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]\\&=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right].\end{aligned}$$

取似然函数 L 的对数

$$\ln L=-\frac{N}{2}\ln 2\pi-\frac{N}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2.$$

按照式(0.3.2)求 $\ln L$ 对 μ 和 σ^2 的偏导数

$$\left.\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\hat{\mu})^2=0,$$

$$\left.\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2}=-\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{\hat{\sigma}^2}+\frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\hat{\mu})^2=0.$$

将这两个方程联立求解,可得期望值和方差的估计:

$$\hat{\mu}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i=\overline{x};\tag{0.3.3}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2.\tag{0.3.4}$$

从而标准误差的估计为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2}.\tag{0.3.5}$$