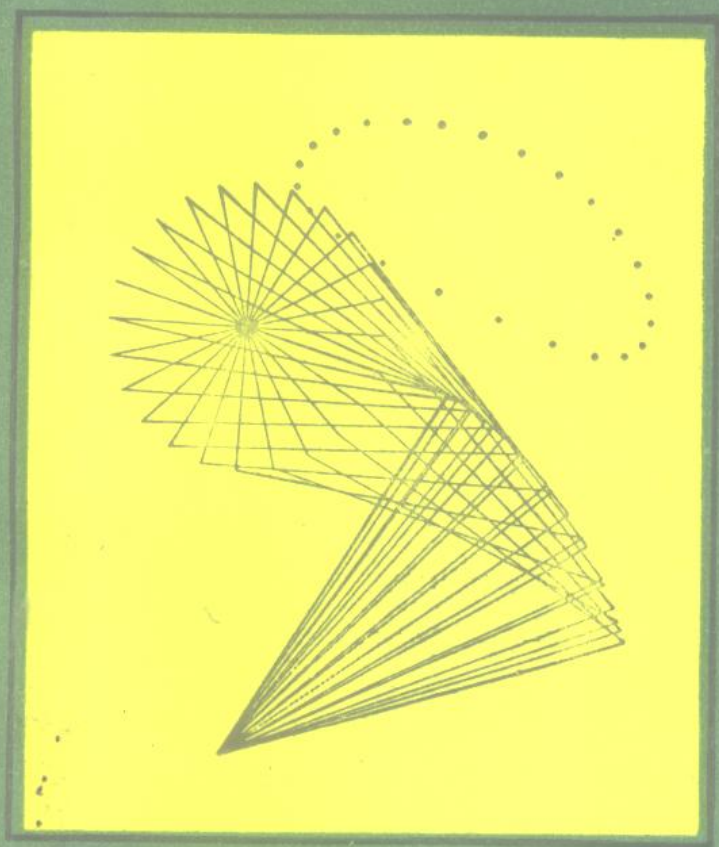


高等机构设计

—分析与综合

(第二卷)



[美] 乔治·N. 桑多尔 阿瑟·G. 厄尔德曼 著

庄细荣 杨上培译 张启先 校

高等教育出版社

372842

TH/12

5060

2

高等机构设计

——分析与综合

第二卷

[美]乔治·N·桑多尔 阿瑟·G·厄尔德曼 著

庄细荣 杨上培 译

张启先 校

高等教育出版社

(京)112号

内 容 简 介

本书共两卷,系1984年出版的美国大学本科(第一卷)和研究生(第二卷)机构学教材。本卷对平面机构运动综合、轨迹曲率理论和机构动力学的高深课题都作了系统、深入的探讨,对空间机构和机器人也作了一定深度的论述和介绍。全书介绍的各种方法均与电子计算机的应用相结合。计算公式、设计实例和每章末的实用习题较多。本书四章的内容是相对独立的,既可作为研究生的机构学教材,又可作为分专题的选修课教材,也可供从事机构分析、机构综合的研究及设计的工程技术人员参考。

D281/24

ADVANCED MECHANISM: ANALYSIS AND SYNTHESIS (VOL. 2)

George N. Sandor & Arthur Erdman

Original English Language edition published by Copyright © 1984 by Prentice Hall, Inc. All Right Reserved

高等机构设计 分析综合

[美]乔治·N·桑多尔 阿瑟·G·厄尔德曼 著

庄细梁 杨上熨 译
张启元 校

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 24.25 字数 550 000

1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷

印数 0001—1 105

ISBN7-04-003618-5/TH·288

定价 15.15 元

译 者 序

本书系美国大学的机构学教材。全书共两卷，本书为第二卷。本教材与机构学其它教材相比，具有显著的特点。首先，本书系统地论述了机构学中的几个高深课题。正如作者在序言中所说的：“这部著作体现了在运动学、动力学和动态弹性体动力学方面分析与综合的一般方法研究中所达到的最新成就。”在平面机构综合、轨迹曲率理论和动力学的高深课题中，作者在传统机构学的基础上，增加了许多新意和深度，体现了近年来美国机构学教学、科研的成果和经验。其次，全书以复数向量法为基本工具，突出了计算机在机构学中的应用，给传统的德国学派用运动几何学得到的机构学高深课题赋予相应的解析方法，把平面机构运动综合的布氏理论、轨迹曲率理论中的欧拉-萨伐里方程等的理论和计算公式以解析方法表达为可用计算机运算的新颖题材。第三，本书突出了应用与实践，即使是在论述高深课题中，作者仍以应用为基点，列举了大量来自生产和生活实践的生动例题和习题，启发读者对机构的亲切感和发明创新的认识。

译者有鉴于此，遂将本书译出，以供从事机构学教学、科研和机构设计的广大师生和工程技术人员参考。本书的序言、第一、二章分别与第一卷的序言、第一章、第八章相同。为节省篇幅，本中译本将第一、二章略去，仅将目录列出。后面各章中引用这两章的公式，请相应参阅第一卷第一章和第八章。本书第三、四章由庄细荣翻译，第五、六章由杨上培翻译，全书译稿由张启先校阅。由于译、校者的学识有限，译文中如有不当或谬误之处，望读者批评指正。

译 者

一九九〇年九月于北京

序 言

这部两卷本著作的完成历时 15 年。其内容包括：第一卷，机构设计——分析与综合；第二卷，高等机构设计——分析与综合。书中材料主要来源于作者的教学、科研与咨询实践，同时也来自作者的同事们的贡献和业已发表的论文。作者代表了在机构设计方面有 30 多年教学经验的一个集体，他们已共同为 35 个以上的公司在机械系统设计和分析方面提供了咨询服务。

这部著作体现了在运动学、动力学和动态弹性体动力学方面分析与综合的一般方法研究中所达到的最新成就。这些研究是从桑多尔博士(Dr. Sandor)在哥伦比亚大学弗洛伊登斯坦博士(Dr. Freudenstein)指导下的博士论文开始的，并且在以后接连发表的 100 多篇文章中继续下来。作者的目的是提供一部适时的教科书，该书要适合于使用计算机，易于教学，要有很多例题，且每一章末附有大量的习题。

这两卷教科书所包括题材的选取旨在：一方面，为学生理解当代的机构设计方法提供足够的理论基础；另一方面，使学生增强实际应用这些理论的技能。同时意在使这部书可供从事实际设计工作的人员参考，并为研究人员提供原始资料。因此，题材的处理以机构设计的计算机辅助方法(CAD)为特色。把有用的、能提供信息的、以图解为基础的方法与计算机辅助的方法，包括人机对话的计算机作图法的各种应用结合起来，这样，就为学生和设计师提供了有力的机构设计工具。作者力图以这样的方式使学生和忙碌的设计师能够容易地掌握所有现代的运动分析和综合方法，而不必查阅大量与之有关的论文和文章并消化其内容。

书里有很多工业上的设计实例和典型分析。这些实例说明连杆机构分析与综合的复数法和其它几种方法是有效的。此外，两卷书的各章末尾附有大量习题：每卷 250 多题，每题中大都还有几个小题。度量单位是国际单位制(SI)和英制混用的。

作者设想学生只具有数学、力学的基础知识。因此，第一卷全部可作为大学本科机构运动分析和综合课程全面的教科书。可以教一个学期，也可以教前后两个学期。例如，删掉了第六、第七章(凸轮和齿轮)就能构成一个学期用的、仍然自成体系的课程内容。第二卷包含了一个或两个学期研究生课程的内容。选择其中某些章节可用于一个季度^①或一个学期的专门课程。例如，第五章，机构动力学——几个高深专题，配合第二、第三章的部分内容，就是一门课的教材。这门课可涉及连杆机构的动态静力学、时间响应、振动、平衡、动态弹性体动力学，以及刚性回转件的平衡。

以上是如何使用本书的几个例子。不过，由于多数章节具有自成体系的特点，所以教师可以选取某几章或这些章的组合作为专门课题。书末开列的大量参考文献对于有兴趣的读者作进一步的学习、研究是很有帮助的。第二卷的第一、第二章与第一卷的第一、第八章的内容是相同

^① 对一学年分为四个学期的学校——译者注。

的,这样每一卷就自成整体,使用时不必互相参考。

每一卷的内容简述如下:第一卷,第一章,运动学与机构学绪论,是对机构设计中一些基本问题的概略介绍。第二章,机构设计的基本原理,涉及设计方法学,并指导读者选择本书个别有关章节去解决在机构设计或实际运转中出现的具体任务和具体问题。第三章,位移和速度分析,既讨论了图解法,也讨论了解析法来求绝对速度、相对速度、联接中的反力和机械效益;还包含有为了用复数法分析四杆机构而编制适用于各类计算机的程序所必需的全部资料。第四章,加速度分析,论述了确定加速度差、相对加速度和科氏加速度的图解法和解析法;解释了平面机构的速度等效问题,并用例子说明了这个概念。第五章介绍了用各种方法进行的动力分析和动态静力分析,并着重讲了机构各构件的分离体示力图。第六章阐述了简单的凸轮-从动件系统和用凸轮调节的连杆机构的设计方法。第七章介绍了渐开线齿轮及轮系,包括周转轮系的速比、力分析和功率流分析。第一卷的最后一章即第八章是平面机构尺度综合入门,既用图解法,也用解析法。解析法是以“标准型”复数法为基础的封闭型线性分析的方法,把单环和多环机构的综合作为具有一阶或高阶逼近的函数生成、轨迹生成和运动生成问题来处理。

第二卷以和第一卷相同的绪论即第一章开头。第二卷的第二章与第一卷的第八章一样。第三章将平面机构运动综合的解析法扩展到精确条件多于三个的问题,是用非线性封闭型解法,包括布尔梅斯特(Burmester)理论来实现的;为了减轻繁重的计算工作,叙述了一套名为“LINCAGES”的计算机软件包;摆线-曲柄机构和齿轮-连杆机构也在这一章。第四章提出了一个适用于计算机的、用复数来研究平面轨迹-曲率理论的新方法,它以新的显函数形式来表述欧拉-萨伐里公式(Euler-Savary Equation)(ESE),同时叙述了博比利尔作图法(Bobillier's Construction)(BC)的各种变化形式,论述了欧拉-萨伐里公式和博比利尔作图法这两种方法的等效性。第五章是对机构动力学的综合论述,涉及了矩阵法、拉格朗日法、自由振动、阻尼振动、隔振、刚性回转件的平衡、连杆机构震动力和震动力矩的平衡,每一部分都联系到计算机程序。这一章还讲到了初步的动态弹性体动力学(KED),这是用来研究高速机构的。这里,必须放弃通常关于刚性构件的假设,来考虑弹性构件由惯性力引起的应力和应变。为了帮助解决这个复杂问题,把刚体运动学和动力学与弹性体的有限元法结合起来。第二卷的最后一章,第六章,涉及了用矩阵法作三维空间机构、包括机器人操作手的位移、速度和加速度分析,欧拉角处理得易于教学且比较直观。这一章的也是这本书的结尾,是空间机构运动综合的一些方法及其应用的介绍,并用例子作了说明。

考虑到工程、技术教学条件鉴定委员会(ABET)规定的在机械工程的课程里加重设计方面的内容的要求,这两卷书为从设计角度来学习机构学提供了一个极好的工具。本书也符合工程方面的课程要着重计算机辅助设计和制造(CAD/CAM)以及计算机辅助工程(CAE)的要求。很多计算机程序或者以配有示范的输入-输出数据表的流程图形式附在课文中,或者可通过作者得到。

复数法被本书用作人机对话计算机程序的基础,这种程序利用图形输出和阴极射线管(CRT)显示终端。设计师不必研究这些程序所依据的理论就能在图示屏幕前同计算机对话,并可在

寻求设计问题的最优解中探索几千个可能的方案。这样，设计师只要在每个需要根据人的判断作出决策的环节上留在人机对话的“回路”里，而把繁重的计算任务交给计算机。

作者想对许多同事和学生表示感激。但是，在本书写作中以评论、建议、求解和校对例题以及提供某些章节的初稿等方式作出贡献的人太多，不胜一一列举。在提供初稿的人中有阿肖克·米德哈博士(Dr. Ashok Midha)(动态弹性体动力学一节)、黛安妮·里科(Dianne Rekow)(平衡一节)、罗伯特·威廉斯博士(Dr. Robert Williams)(空间机构)和讲授了本教科书的最初几稿并提出了很多改进建议的唐纳德·R·瑞利博士(Dr. Donald R. Riley)。其他做出了很大贡献的有约翰·古斯塔夫森(John Gustafson)、李·亨特(Lee Hunt)、汤姆·卡尔森(Tom Carlson)、雷·吉斯(Ray Giese)、比尔·达赫洛夫(Bill Dahlof)、汤姆·蔡斯(Tom Chase)、王森洪(Sern Hong Wang)、桑贾伊·G·丹德博士(Dr. Sanjay G. Dhade)、帕特里克·斯塔尔博士(Dr. Patrick Starr)、威廉·卡森博士(Dr. William Carson)、查尔斯·F·莱因霍尔茨博士(Dr. Charles F. Reinholtz)、曼纽尔·赫尔南德茨博士(Dr. Manuel Hernandez)、马丁·狄吉罗拉莫(Martin Digirelamo)、庄细荣和杨上培，等等。

还要感谢国家自然科学基金会土木与机械工程处机械系统项目审核组，由于他们的支持，给予佛罗里达大学MEA-8025812号研究项目拨款，曲率问题一章的部分内容才得以酝酿问世并在杂志上发表一些文章。例题和典型分析的出处均在课文中和图名里加以注明。其他支持者在作者的很多期刊论文里(列在本书的参考文献中)曾有过鸣谢。这些论文中的一些材料经过改写已编入本书。

作者及其合作者在继续研究新的课题，以便在可能时充实到将来的版本中。因此，对本书读者的意见和建议，作者将非常感激。

乔治·N·桑多尔(George N. Sandor)阿瑟·G·厄尔德曼(Arthur G. Erdman)

目 录

第一章 运动学与机构学绪论(略)1	
1.1 引言.....1	
1.2 运动.....1	
1.3 四杆机构.....1	
1.4 相对运动学.....1	
1.5 运动简图.....1	
1.6 六杆运动链.....1	
1.7 自由度.....1	
1.8 分析与综合.....1	
习题.....1	
第二章 运动综合概论——图解法与线性解析法(略)2	
2.1 引言.....2	
2.2 运动综合的任务.....2	
2.3 数综合:关联杆系概念.....2	
2.4 尺度综合的工具.....2	
2.5 图解法综合——运动生成:两个预定位置.....2	
2.6 图解法综合——运动生成:三个预定位置.....2	
2.7 按轨迹生成的图解法综合:三个预定位置.....2	
2.8 带有预定标时的轨迹生成:三个预定位置.....2	
2.9 按轨迹生成(无预定标)的图解法综合:四个位置.....2	
2.10 函数生成:三个精确点.....2	
2.11 复盖法.....2	
2.12 解析综合方法.....2	
2.13 运动综合中的复数模型.....2	
2.14 双矢组或标准型.....2	
2.15 预定位置和自由选择数的关系.....2	
2.16 按运动、轨迹和函数生成的三个预定位置的综 合.....2	
2.17 相应于四杆机构三个精确点的综 合程序.....2	
2.18 三个精确点综合:解析法与 图解法比较.....2	
2.19 三个精确点综合 向多环机构的推广.....2	
2.20 圆点和中心点圆.....2	
2.21 指定固定铰链的位置.....2	
2.22 按三点函数生成的弗罗伊登斯坦方程.....2	
2.23 环封闭方程法.....2	
2.24 阶综合:四杆函数生成.....3	
附录:实例研究——竖铰链窗机构的 型综合习题.....3	
第三章 连杆机构的运动综合:几个高深问题4	
3.1 引言.....4	
3.2 四个预定位置:运动生成.....4	
3.3 按四个预定位置求解的方法.....6	
3.4 四个预定精确点的计算机程序.....9	
3.5 四个有限分离预定位置的运动生成:两 个三精确点情况的叠加.....12	
3.6 四位置综合的特殊情况.....14	
3.7 运动生成:五个位置.....20	
3.8 按五个预定位置求解的方法.....22	
3.9 布尔梅斯特理论的扩展:带预定标 的轨迹生成和函数生成.....24	
3.10 布尔梅斯特理论的进一步扩展.....30	
3.11 多环连杆机构的综合.....33	
3.12 双功能多环机构的应用.....35	
3.13 齿轮连杆机构的运动综合.....41	
3.14 复合分离位置综合的讨论.....48	
附录:A3.1 LINCAGES 程序包.....58	
附录:A3.2.....64	
习题.....65	
第四章 轨迹曲率理论92	
4.1 引言.....92	
4.2 定瞬心线和动瞬心线.....92	
4.3 速度.....94	
4.4 加速度.....100	
4.5 转折点和转折圆.....102	
4.6 欧拉-萨伐里公式.....105	

4.7	博比利尔作图法	110
4.8	共线轴	112
4.9	博比利尔定理	111
4.10	哈特曼作图法	111
4.11	布雷塞圆	117
4.12	加速度场	118
4.13	回归圆	119
4.14	尖点生成点	121
4.15	叉点生成点	121
4.16	ρ 曲线	122
4.17	运动平面四个无限接近位置的曲率驻点三次曲线, 即布尔梅斯特圆点和圆心点曲线	123
4.18	四个无限接近位置的圆点曲线和圆心点曲线	128
4.19	鲍尔点	130
	习题	131
	练习	135
第五章	机构动力学——高深内容	138
5.1	引言	138
5.2	应用矩阵法进行动态静力分析的复习	139
5.3	时间响应	144
5.4	机构时间响应的改善	152
5.5	虚功	154
5.6	拉格朗日运动方程	159
5.7	单自由度系统的自由振动	170
5.8	自由振动的衰减	173
5.9	单自由度系统的受迫振动	175
5.10	转子的平衡	182
5.11	机构的力和力矩平衡简介	187
5.12	力的平衡	188
5.13	震动力矩的平衡	195
5.14	力矩平衡对输入扭矩的作用	208
5.15	机构平衡的其它方法	213
5.16	力和力矩平衡的计算程序	215
5.17	平衡——附录 A: 物理摆	223
5.18	平衡——附录 B: 配重形状对平衡的影响	225
5.19	高速弹性机构的分析	226
5.20	平面运动中的弹性梁单元	228
5.21	梁单元的位移场	230
5.22	单元的质量和刚度矩阵	232
5.23	系统的质量和刚度矩阵	234
5.24	弹性连杆机构模型	235
5.25	整个系统矩阵的建立	236
5.26	运动方程	239
5.27	机构中的阻尼	240
5.28	刚体加速度	242
5.29	应力计算	243
5.30	解法	244
	习题	258
第六章	空间机构——兼介绍机器人学	266
6.1	引言	266
6.2	描述平面有限位移的变换	272
6.3	平面有限变换	272
6.4	单位矩阵变换	273
6.5	有限旋转的平面矩阵算子	274
6.6	齐次坐标和有限的平面平移	275
6.7	几个有限位移的并置运算	276
6.8	绕不通过原点的轴的旋转	278
6.9	刚体的变换	279
6.10	空间变换	280
6.11	空间机构的分析	295
6.12	用基本矩阵来对构件和联接建模	301
6.13	工业机器人的运动分析	311
6.14	位置分析	323
6.15	速度分析	327
6.16	加速度分析	328
6.17	三维空间内点的运动学	330
6.18	例: 一个三维机构的运动分析	333
6.19	空间机构的综合	337
6.20	空间机构的向量综合	341
	习题	348
	练习	355
	参考文献	357

第一章 运动学与机构学绪论(略)^①

- 1.1 引言
- 1.2 运动
- 1.3 四杆机构
- 1.4 相对运动学
- 1.5 运动简图
- 1.6 六杆运动链
- 1.7 自由度
- 1.8 分析与综合
习题

^① 本章与本书第一卷(《机构设计——分析与综合》)中第一章重复,为节省中译本篇幅,减轻读者负担,本卷不再编入。读者在阅读后续章节中凡遇本章内容,请参阅第一卷中译本中第一章的相应内容。

第二章 运动综合概论——图解法与线性解析法(略)^①

- 2.1 引言
- 2.2 运动综合的任务
- 2.3 数综合: 关联杆系概念
- 2.4 尺度综合的工具
- 2.5 图解法综合——运动生成: 两个预定位置
- 2.6 图解法综合——运动生成: 三个预定位置
- 2.7 按轨迹生成的图解法综合: 三个预定位置
- 2.8 带有预定时标的轨迹生成: 三个预定位置
- 2.9 按轨迹生成(无预定时标)的图解法综合: 四个位置
- 2.10 函数生成: 三个精确点
- 2.11 复盖法
- 2.12 解析综合方法
- 2.13 运动综合中的复数模型
- 2.14 双矢组或标准型
- 2.15 预定位置和自由选择数的关系
- 2.16 按运动、轨迹和函数生成的三个预定位置的综合
- 2.17 相应于四杆机构三个精确点的综合程序
- 2.18 三个精确点综合: 解析法与图解法比较
- 2.19 三个精确点综合向多环机构的推广
- 2.20 圆点和中心点圆
- 2.21 指定固定铰链的位置
- 2.22 按三点函数生成的弗罗伊登斯坦方程

^① 本章与本书第一卷(《机构设计——分析与综合》)中第八章重复,为节省中译本篇幅,减轻读者负担,本卷不再编入。读者在阅读后续章节中凡遇本章内容,请参阅第一卷中译本中第八章相应内容。例如,本卷中所述“表 2.1”系指第一卷中“表 8.1”;“图 2.14”系指第一卷中“图 8.14”,等等。

2.23 环封闭方程法

2.24 阶综合: 四杆函数生成

附录: 实例研究——竖铰链窗机构的型综合
习题

第三章 连杆机构的运动综合： 几个高深问题

3.1 引言

第二章介绍了连杆机构的各种综合方法。重点叙述了三个预定位置的运动生成、轨迹生成和函数生成,因为这个精确点数目是对应于以标准双矢组形式综合四杆机构时,可用线性方法求解的最多预定位置数的(见表 2.1)。本章扩展了第二章介绍的复数法和标准双矢组形式,用以研究四个和五个精确点的情况。由于大多数平面连杆机构都可用这个标准型算法设计,所以,这里将不继续研究运动综合的其它方法在这两种情况下的应用。我们将看到:在四个精确点的情况下,利用计算机作图程序,发挥计算机能以人机对话方式显示结果的能力,一眼就能观察到无限多个解(表 2.1)。

3.2 四个预定位置:运动生成

图 2.35 至 2.38 提供了按两个和三个预定位置的共平面运动生成来综合双杆组的几何说明。图 3.1a 和 b 表示处于两个或三个位置的运动平面 π 。本章所用符号与运动学文献相一致,即:定销轴用 m (代表德文“Mittelpunkt”这个词,意思是“圆心点”)标出;而绕定销轴回转的双副杆上的动销轴标为 k (代表“Kreispunkt”这个词,意思是“圆点”)。

回想一下,对于两个预定位置,有三阶无穷多个 k 和 m 点对,因为 k_1 (动销轴在其第一个位置)可以位于平面 π (处于第一个位置)上的任何地方,而 m 在 k_1, k_2 (k 的第一和第二位置)的垂直平分线上又可以是任意的。例如,在图 3.1a 中表示了两个这样的 k - m 点对,即 $k_1^1 m^1$ 和 $k_2^1 m^2$ 。对于三个位置(图 3.1b), k_1^1 的位置表示有两阶无穷多个选择,但 $k_1^1 k_2^1$ 和 $k_2^1 k_3^1$ 的两条垂直平分线的交点则仅给出一个圆心点,即 m^1 。

图 3.1c 表示一个平面的上述三个预定位置(π_1, π_2 和 π_3)加一个附加位置 π_4 。图中还表示了在前三个预定位置上对应于动销轴 k^1 和 k^2 的两个定销轴 m^1 和 m^2 。 k_2^1, k_4^1 和 k_2^2, k_4^2 的垂直平分线 $k_2^1 k_4^1$ 和 $k_2^2 k_4^2$ 也表示出来了。注意,这两条垂直平分线并不通过 m^1 和 m^2 。这就是说,无论是 k^1 还是 k^2 都不能作为这四个位置的动销轴。但表 2.1 却指出,一般有无穷多个解——这是不是矛盾呢?不矛盾。问题的提法应该是:“物体 π 上有没有一些点 k , 当 π 有四个任意的预定位置时,它们相应的四个位置落在固定平面内的一个圆周上?”布尔梅斯特在 1876 年就提出了这样的问题并且作了肯定的回答。下面用复数建立的布尔梅斯特理论和他用几何方法发现的理论是一样的。

这里将再次推导一下标准型双矢组公式(见图 2.56 和图 2.57)。图 3.2 表示运动平面 π 的两

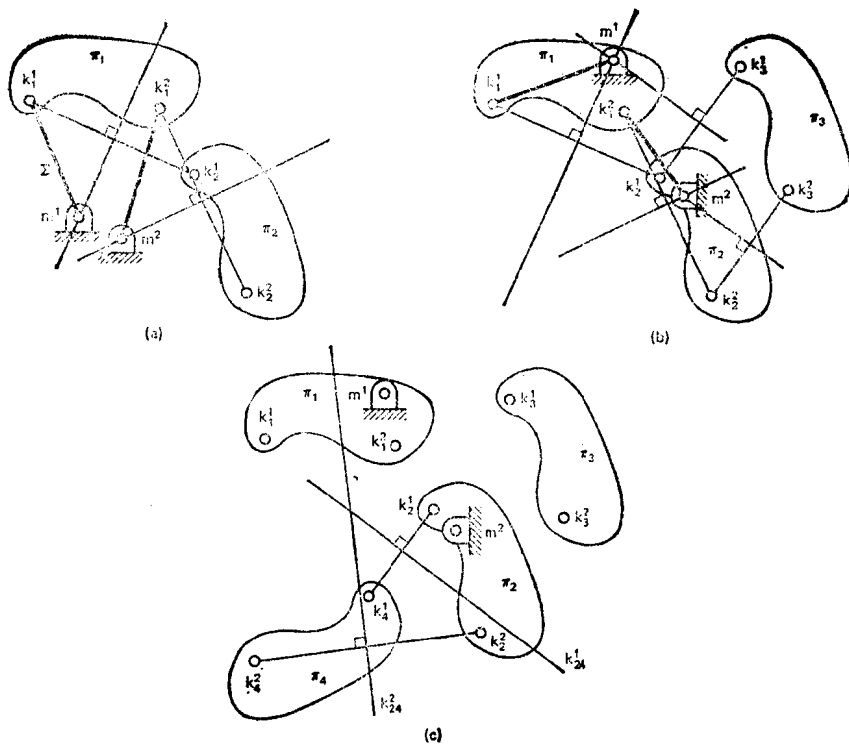


图 3.1 (a) 运动平面 π 的两个共平面预定位置; (b) 三个预定位置; (c) 四个预定位置: 对第二和第四两个位置所作的垂直平分线 ($k_1^1k_1^2$ 和 $k_2^1k_2^2$) 并不通过由前三个位置得到的定销轴 m^1 和 m^2

个预定位置 π_1 和 π_j 。这个平面的位置可用设在它上面的轨迹点 P 和有向线段 Pa (也设在运动平面上) 的位置来规定。 P 的两个位置 P_1 和 P_j 可以相对于一个任意的固定坐标系分别用 R_1 和 R_j 来定位。轨迹位移向量 $\delta_j = R_j - R_1$ 决定了 P_j 相对于 P_1 的位置。该平面从位置 1 到 j 的转动与有向线段 Pa 的转动相等, 标作 α_j 。

令点 k_1 (设在运动平面上) 是可能为圆点的未知位置, m 是相应的未知圆心点 (设在固定平面上)。由于 k 和 P 都同属于运动平面, 所以在 π_1 内从 k_1 到 P_1 可以画一个未知向量 Z 。还有, 我们可以用另一个未知向量 W 来规定圆点 k_1 相对于圆心点 m 的位置。这样, 当平面 π 从 π_1 运动到 π_j 时, 向量 W 就绕 m 回转一个未知角 β_j , 而 P_1a_1 则转过角 α_j 到达 P_ja_j 。

注意, 上面定义的向量构成了一个包括第一和第 j 位置的闭环:

$$W e^{i\beta_j} + Z e^{i\alpha_j} - \delta_j - Z - W = 0 \quad (3.1)$$

归并同类项, 得到

$$W (e^{i\beta_j} - 1) + Z (e^{i\alpha_j} - 1) = \delta_j \quad (3.2)$$

注意, 这一方程就是“标准型”[见方程 (2.16)], 因为 δ_j 和 α_j 可从 π 的预定位置已知。对于四个位置, 式 (3.2) 那样的方程将有三个 ($j=2, 3, 4$):

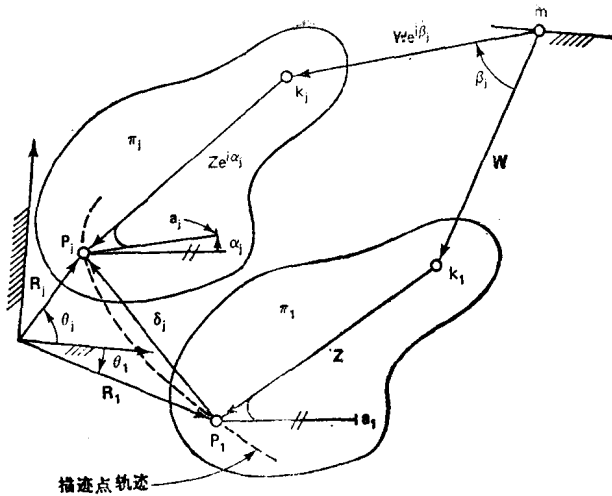


图 3.2 未知双矢组 W 、 Z ，它们可引导运动平面 π 从第一位置运动到第 j 位置。点 m 和 k_1 是一个未知的布尔梅斯特点对

$$\begin{aligned} W(e^{i\beta_2} - 1) + Z(e^{i\alpha_2} - 1) &= \delta_2 \\ W(e^{i\beta_3} - 1) + Z(e^{i\alpha_3} - 1) &= \delta_3 \\ W(e^{i\beta_4} - 1) + Z(e^{i\alpha_4} - 1) &= \delta_4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

从表 2.1 回想到，对于四个预定位置，为了平衡方程数与未知量数，必须作一个自由选择。如果选定 W 的一个转角，比如说 β_2 ，则必须从该方程组解出六个未知实数，即： Z 、 W 和角度 β_3 、 β_4 。方程 (3.3) 是 β_3 和 β_4 的非线性（超越）方程。

3.3 按四个预定位置求解的方法

我们暂时把方程 (3.3) 看作一组含有两个复未知量 Z 和 W 的三个线性非齐次复数方程。为了使这一组三个方程有 Z 和 W 的联立解，其中一个复数方程必须与另外两个线性相关；也就是说，这些方程的系数必须满足某些“相容”关系。满足了这些关系，上述方程就有解。

方程 (3.3) 可用如下矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

方程左边项的系数矩阵的第二列以及方程右边项所包含的均是给定的输入数据，而系数矩阵的第一列则包含未知转角 β_3 和 β_4 。只有当系数“增广矩阵”的秩^①为 2 时，这个方程组才有解。增广矩阵 M 是由方程组 (3.4) 左边项的系数矩阵加右边项的一列组成的。因此，该方程组的增广矩阵的行列式必须等于零，即：

① 一个矩阵，如果它至少有一个 $(r \times r)$ 阶的子行列式的值不是零，而所有 $[(r+1) \times (r+1)]$ 以及更高阶的子行列式都是零，则该矩阵的秩就是 r 。

$$\det M = \det \begin{bmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

方程(3.5)是一个复数方程,包含两个独立的标量方程,因此可以解出两个未知标量 β_3 和 β_4 。鉴于未知量出现在矩阵 M 的第一列,所以把行列式按第一列展开:

$$\Delta_2 e^{i\beta_2} + \Delta_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_4} + \Delta_1 = 0 \quad (3.6)$$

式中

$$\Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 \quad (3.7)$$

以及 Δ_j ($j=2, 3, 4$) 是第一列各元素的余子项:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_4} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix} \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_3} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

这些 Δ 是已知的,因为它们仅包含已知输入数据。方程(3.6)称作相容方程,因为满足这个方程的各组 β_2 、 β_3 和 β_4 的值将使方程组(3.3)成为“相容的”,就是说,这个方程组将给出 W 和 Z 的联立解。

在相容方程内,未知量在指数上。这一超越方程可以通过图解法加以简化,而求解步骤可如表 3.1 所示(同时参看图 3.3)编成计算机程序。

方程(3.6)可用符号进一步简化如下^①:

$$\Delta_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_4} = -\Delta, \quad \text{式中} \quad -\Delta = -\Delta_1 - \Delta_2 e^{i\beta_2} \quad (3.9)$$

于是,对于一个任意选定的 β_2 , $-\Delta$ 与 Δ_3 、 Δ_4 都已知,并可按比例作出,如图 3.3 所示。注意,在方程(3.9)中, Δ_3 被乘以转动算子 $e^{i\beta_3}$, Δ_4 也乘以 $e^{i\beta_4}$ 。由方程(3.9)可知,当 Δ_3 回转 β_3 、 Δ_4 回转 β_4 以后,这两个向量与 Δ 形成一个闭环。

方程(3.6)可以看作是一个四杆机构的“闭合方程”。这个四杆机构就是所谓的“相容连杆机构”,其“固定杆”为 Δ_1 ,“运动杆”为 Δ_j ($j=2, 3, 4$),从该相容连杆机构的初始位置开始度量的“杆转角”为 β_j 。这个相容连杆机构是由方程(3.7)作为它在起始位置的闭合方程定义出来的。这个概念如图 3.3 所示。图中,起始位置以实线表示。把 Δ_2 看作“驱动曲柄”,则任意假定的 β_2 就相当于加给 Δ_2 的一个转动位移,它的新位置以虚线表示。 Δ_3 和 Δ_4 位移后的相应位置也以虚线出现。然而, Δ_3 和 Δ_4 分别回转 β_3 和 β_4 以后所到达的点划线位置也满足方程(3.6)。所以,一般地说,对于 β_2 的每一个假定值,将有两组 β_j ($j=3, 4$) 的值。

① 注意,这一方程与按三个精确点的“定销轴位置规定”法导出的方程[方程(2.57)]形式相同。

表3.1 根据几何作图按相容方程(3.6)求 β_j ($j=3, 4$)的解析解法

对 β_2 的一个给定值求 $\beta_3, \beta_4, \tilde{\beta}_3$ 和 $\tilde{\beta}_4$ 的算法(见图3.3)

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 e^{i\beta_2}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\Delta_3^2 - \Delta_1^2 - \Delta^2}{2\Delta_1\Delta}, \text{ 式中 } \Delta_j = |\Delta_j| \text{ 和 } \Delta = |\Delta|$$

$$\sin\theta_3 = |(1 - \cos^2\theta_3)^{1/2}| \geq 0$$

令 $\cos\theta_3 = x, \sin\theta_3 = y > 0$ 据此,用(FORTRAN IV或WAT IV的)ATAN2函数求 $0 \leq \theta_3 \leq \pi$ 。

$$\beta_3 = \arg\Delta + \theta_3 - \arg\Delta_3$$

$$\tilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3$$

$$\tilde{\beta}_3 = \arg\Delta + \tilde{\theta}_3 - \arg\Delta_3$$

$$\cos\theta_4 = \frac{\Delta_4^2 - \Delta_1^2 - \Delta^2}{2\Delta_1\Delta}$$

$$\sin\theta_4 = |(1 - \cos^2\theta_4)^{1/2}| \geq 0$$

令 $\cos\theta_4 = x, \sin\theta_4 = y > 0$ 用 ATAN2 函数求 $0 \leq \theta_4 \leq \pi; \tilde{\theta}_4 = -\theta_4$ 。

$$\beta_4 = \arg\Delta - \theta_4 - \arg\Delta_4$$

$$\tilde{\beta}_4 = \arg\Delta + \theta_4 - \arg\Delta_4 + \pi$$

β_2 可以假设的取值范围由相容连杆机构的可动性限度来决定,可按图3.3用图解法来求,也可用解析法(见第一卷节3.1和3.3)求之。对 β_2 的一个给定值计算 $\beta_3, \beta_4, \tilde{\beta}_3$ 和 $\tilde{\beta}_4$ 的解析式列在表3.1内。 $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ 和 $\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4$ 这两组中的每一组内,任何两个 β 值都可代入三个标准型方程[式(3.3)]中的两个方程,然后,可用解线性方程组的克莱姆法则或任何别的方法解出 Z 和 W ,从而可求出圆点

$$k_1 = R_1 - Z \quad (3.10)$$

和圆心点

$$m = k_1 - W \quad (3.11)$$

当 β_2 一步步地从零变到 2π 时,它的每一个值(如果相容连杆机构闭合)将给出两组布尔梅斯特特点对,每一点对由一个圆点 k_1 和一个圆心点 m 组成。注意,圆点 k_1 是运动平面在第一个预定位置上的点。画出对应于 β_2 每一个值的圆心点,将描出两支圆心点曲线,一支相应于 β_3, β_4 ,另一支相应于 $\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4$ 。如果图3.3中的“相容连杆机构”允许 Δ_2 整周转动,则两支曲线将会合。圆点也可同样地画出来,以得到圆点曲线。典型的圆心点曲线和圆点曲线的一部分表示在图3.4(见节3.5,这一节讲到生成布尔梅斯特曲线的另一种方法)。圆心点曲线上的每一点都代表一个可能的定销轴。这一定销轴可与它的共轭点,即这一具体布尔梅斯特特点对中的圆点连结起来,同时与预定的第一个轨迹点相连。这将形成一个双杆组,具有定销轴 m 、曲柄 W 、铰销 k_1 、浮动

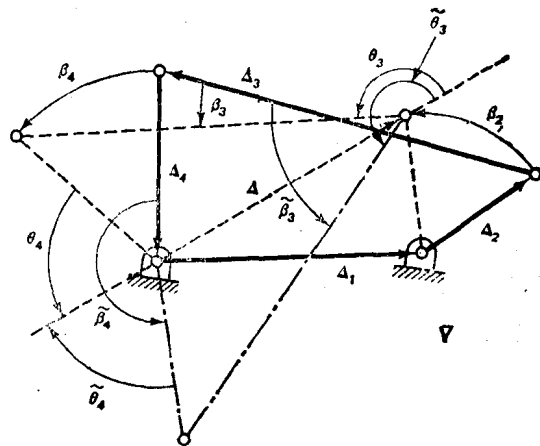


图3.3 按相容方程(3.6)求未知角 β_j ($j=3, 4$)的几何解法