高等数学自学丛书

一元函数积分学

陈玉波 编

山东教育出版社

高等数学自学丛书

一元函数积分学

陈 玉 波 编

山东教育出版社

责任编辑　徐世典

高等数学自学丛书书目

数学分析基础	线性代数
一元函数微分学	抽象代数
一元函数积分学	空间解析几何
无穷级数	概率论与数理统计
多项式代数	布尔代数

高等数学自学丛书

一元函数积分学

陈玉波 编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　14.25印张　301千字

1982年11月第1版　1982年11月第1次印刷

印数 1—5,000

书号 13275·7　定价 1.20 元

内 容 提 要

本书系统地讲解了一元函数积分学的基本知识，内容包括不定积分概念、积分法法则、定积分概念、可积性准则、定积分基本性质，微积分基本定理、有理函数的积分法、简单无理函数与超越函数的积分法、积分学在几何上的应用、积分学在物理上的应用、定积分的近似计算等。

本书适合中等学校数学教师、理工科大学生、工程技

阅读及青年自学之用。

出版说明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强。次序的编排尽量做到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点。在编写过程中，力求内容讲述详细，文字通俗流畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示。因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书。

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写。此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢。

一九八二年六月

目　　录

第一章　不定积分概念

积分学中有两个基本概念：不定积分和定积分。一元函数积分学的任务是研究这两个概念的性质、计算方法和应用。下面我们首先来研究不定积分的概念。

§1·1　原函数概念

在学习一元函数微分学的时候，我们已经知道在实际问题中经常遇到求一个给定函数的导函数问题。例如，已知物体的运动规律，即所走过的路程 S 与时间 t 的依赖关系为 $S=S(t)$，求运动的速度；已知曲线的方程为 $y=f(x)$，求在点 $(x,f(x))$ 上的切线斜率等。但在实际问题中，也常常遇到恰恰与此相反的问题：某函数的导函数为已知，求这个函数本身。例如，物体运动的速度为已知，求运动规律；已知曲线切线的某些性质，要求曲线方程等。

例1　匀速 $v=1$(公里/分)运行的列车，刹车后减速运行时速度为

$$v(t)=1-\frac{1}{3}t\text{（公里/分）}$$

问应在离站台多远处开始减速？

解：设开始减速时 $t=0$，则开始减速时的速度 $v=1$(公

里/分)，经 3 分钟后 $t=3$，$v=0$，即列车停止，为了使列车正好停在站台上，我们需要求出以 $v(t)=1-\frac{1}{3}t$ 为速度的列车在 3 分钟后走过多少路程(见图 1—1)。

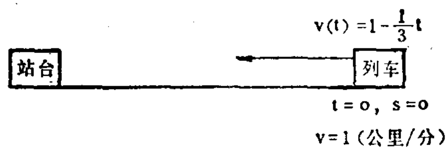

图 1—1

设从 $t=0$(开始减速的时刻) 起，经 t 秒钟后，列车所走过的路程为 $S(t)$。为了求 $S(3)$，不妨先求出函数 $S(t)$。于是，我们遇到了这样的问题：

已知速度为 $v(t)=1-\frac{1}{3}t$，求运动规律 $S(t)$，也就是已知函数 $S(t)$的导数为

$$S'(t)=1-\frac{1}{3}t, \text{ 而且 } S(0)=0$$

求这个函数 $S(t)$本身。

容易验证，函数

$$t-\frac{1}{6}t^2$$

就是所求的函数。当 $t=3$ 时，$S(3)=3-\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$(公里)，所以列车应在到站前 $\frac{3}{2}$ 公里处开始减速。

例 2　已知曲线 $y=f(x)$在各点 $P(x, f(x))$的切线斜率都等于 $2x$，试求这种曲线。

解：因为函数 $f(x)$在点 x 的导数就是曲线 $y=f(x)$在点

$P(x, f(x))$的斜率．容易看出，函数族

$$y = x^2 + c \quad (\text{其中 } c \text{ 是任意常数})$$

中任何一个函数，例如$y = x^2 + 1, y = x^2 - 1, y = x^2, y = x^2 + \frac{1}{3}$等等，都是导函数为 $2x$ 的函数．可以证明（参看§1·2），导函数为 $2x$ 的函数都包含在这族函数中．因此，抛物线族$y = x^2 + c$（c 是任意常数）就是所求的曲线族（见图 1—2）．

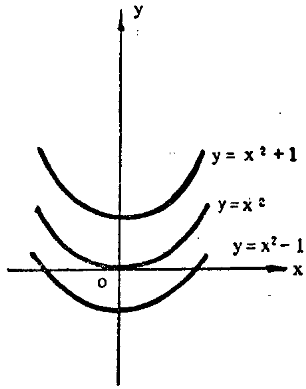

图 1—2

定义 1 设 $f(x)$是在某区间有定义的函数，如果一个函数 $F(x)$在这区间的每一点上都有

$$F'(x) = f(x)$$

则称函数 $F(x)$是函数 $f(x)$在该区间的原函数．

求导函数与求原函数是一对互逆的运算．两个函数 $f(x)$与 $F(x)$如果具有关系 $F'(x) = f(x)$，或说函数 $f(x)$ 是函数$F(x)$的导函数，或说函数 $F(x)$是函数 $f(x)$的原函数．例如：

由导数公式$(\sin x)' = \cos x$ 得知，函数 $\sin x$ 在整个数轴$(-\infty, +\infty)$上是函数 $\cos x$ 的一个原函数．

由$(\ln x)' = \frac{1}{x}$得知，函数 $\ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$内是函数$\frac{1}{x}$的原函数．

前面两例已经申述了求给定函数原函数的现实意义，现在很自然地提出这样的问题：

1. 是否任给一个函数都有原函数?

2. 一个给定的函数如果存在原函数,它的原函数究竟有多少个? 这些原函数之间有何联系?

3. 怎样去求一个给定函数的原函数?

这些就是整个"不定积分"理论所要讨论的问题.

第一个问题的回答是: 并非每一个函数都有原函数, 但是可以证明, 连续函数的原函数是一定存在的. 由于初等函数在其定义域内是连续函数, 因此, 初等函数一定具有原函数. 这个结论的证明我们将在第五章给出. 第三个问题将在第二、六、七章逐步讨论. 下面一节来回答第二个问题.

习 题 1·1

1. 验证 $-\cos x$ 在整个数轴$(-\infty, +\infty)$上是 $\sin x$ 的原函数.

2. 验证函数 $F(x)=\frac{x^2}{3}+x+c$(c 是任意常数)在整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 是函数 $f(x)=\frac{2x}{3}+1$ 的原函数.

§1·2 不定积分概念

一、不定积分概念

一个函数如果有原函数, 那么,它的原函数必不止一个, 而是一族. 例如, 我们来观察上一节的例 2. 显然, 除了函

数 x^2 在整个数轴$(-\infty,+\infty)$上是 $2x$ 的原函数之外，对于任意给定常数 c，函数 x^2+c 也是 $2x$ 的原函数（因为$(x^2+c)'=(x^2)'+(c)'=2x$）.现在要问，除了这个函数族

$$x^2+c \quad （c 是任意常数）$$

之外，函数 $2x$ 是否还有别的原函数？回答是否定的。我们有下面的

定理 1 如果函数 $F(x)$ 在某区间是函数 $f(x)$ 的一个原函数，那么，函数族

$$F(x)+c \quad （c 是任意常数） \tag{1}$$

中的每一个函数都是 $f(x)$的原函数，而且 $f(x)$的每一个原函数都包含在此族函数当中.

证明：因为 $F(x)$是 $f(x)$的原函数，所以在所讨论的区间有 $F'(x)=f(x)$.而常数的导数为零，所以，对任一给定的常数 c，都有$(F(x)+c)'=f(x)$。这就证明了函数族(1)中的每一个函数都是 $f(x)$的原函数。

设 $\Phi(x)$是函数 $f(x)$的另一个原函数，则 $\Phi'(x)=f(x)$。于是我们有

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

回顾微分学中拉格朗日中值定理的一个推论：如果函数 $\psi(x)$ 在某区间的导数处处为零，那么这个函数在该区间是一个常数。即见函数 $\Phi(x)-F(x)$在所讨论的区间是一个常数。换句话说，函数 $\Phi(x)$必可表成 $F(x)+c$ 的形式。这就证明了 $\Phi(x)$包含在函数类(1)当中。

这个定理告诉我们一个十分重要的事实：一个函数的原函数（如果存在的话）虽然不止一个，但是任何两个原函数之间只相差一个常数。因此，只要我们找得其中的任何一个，

再加上一个任意常数，便得到它的原函数全体。这显然大大地简化了求原函数的工作。

现在我们给原函数族起个名字，并在新的名词下复述一下前面的结果。

定义 2 一个函数 $f(x)$的所有原函数构成的函数族称为函数 $f(x)$的不定积分，记作

$$\int f(x)dx$$

其中 $\int$ 称为积分号，x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式。

前一段的例 1 与例 2 表明，有很多理论上或实践上的问题都要求我们去求一个给定函数的不定积分，而由定理 1，只要我们能找到 $f(x)$的随便一个原函数 $F(x)$，则加上一个任意常数 c 就得到 $f(x)$的不定积分，即

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

这里的任意常数 c 称为积分常数。

例 1 试求函数 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 与 e^x 的不定积分

解：因为$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$；$(e^x)' = e^x$，即 $\operatorname{tg} x$ 与 e^x 分别是函数 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 与 e^x 的原函数，所以我们有

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c; \quad \int e^x dx = e^x + c$$

二、积分法

求已知函数的不定积分是数学分析中另一个重要的运算。这一运算称为积分法。它和微分法（即求给定函数的导函数的运算）一起构成数学分析中一对基本运算。因此，研究积分法的理论是积分学中的主要课题之一。

那么怎样进行积分法的运算呢？或者说，怎样求一个给定函数的原函数呢？

为此，我们先指出一个事实：就象加法与减法互为逆运算一样，积分法与微分法互为逆运算。事实上，由不定积分的定义显然有

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)\quad(\text{或 } d\int f(x)dx=f(x)dx),$$

$$\int\frac{dF(x)}{dx}dx=F(x)+c\quad(\text{或 }\int dF(x)=F(x)+c)$$

第一个等式表明对一个函数 $f(x)$ 先施行积分法，然后施行微分法将回到函数 $f(x)$ 本身；第二个式子说明一个函数 $F(x)$ 先施行微分法，再施行积分法，所得到的函数与原来的函数 $F(x)$ 仅相差一个任意常数 c。

下一章专门研究怎样求不定积分的问题，以上指出的简单的事实是第二章全部积分法理论的基础。

习　题　1·2

验证下列式子：

1. $\int 3x^2dx=x^3+c$.　　2. $\int\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c$.

3. $\int(x^3-3x^2+4x-8)dx=\frac{1}{4}x^4-x^3+2x^2-8x+c$.

4. $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\text{arc tg}\,x+c$.

5. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\text{arc sin}\,x+c$.

本 章 提 要

一、本章提出了原函数、不定积分和积分法等概念．通过实际例子说明积分法与微分法一起是数学分析中一对重要的运算．因此，研究求不定积分的理论是积分学的重要课题之一．

二、研究了一个函数的原函数族（不定积分）的构造，指出了一个给定函数的原函数如果存在的话，它的原函数必有无穷多个，但任何两个原函数之间只相差一个常数．因此，只须求得一个原函数，再加上一个任意常数便得到原函数的全体．

三、指出了积分法与微分法互为逆运算．请注意这个事实是下一章研究积分法理论的基础．

复 习 题 一

1．一质点作直线运动，已知其加速度为 $a=3t^2$，如果当 $t=0$ 时速度 $v_0=5$，路程 $s_0=0$，求：

(1) v 和 t 间的函数关系；

(2) s 和 t 间的函数关系。

2. 在平面上有一运动着的质点，如果它在 x 轴方向和 y 轴方向的分速度分别为 $v_x=t^2$，$v_y=3t$，当 $t=0$ 时，$x=0, y=0$，求：

(1) 时间为 t 时质点所在的位置；

(2) 运动的轨迹方程。

3. (1) 试证 $y=\ln ax$ 和 $y=\ln x$ 是同一函数的原函数。

(2) 试证 $y=(e^x+e^{-x})^2$ 和 $y=(e^x-e^{-x})^2$ 是同一函数的原函数。