

整体微分几何导引

方德植 梁益兴 编著



厦门大学出版社

O186.1
F17-3

465480

整体微分几何导引

方德植 梁益兴 编著



00465480

厦门大学出版社

DU99/26

内 容 简 介

微分几何有局部与整体之分,局部微分几何的完整理论是上世纪形成的.本世纪以来,由于拓扑学的发展,微分几何的研究起了巨大的变化,整体的研究成为现代微分几何的中心问题的主要课题之一.因此,本书可为我国读者进行这个方向的研究打下坚实的基础.

本书既适用于高等院校数学专业四年级及低年级研究生的教材或教学参考书,也可供一般微分几何工作者参考.

本书承福建省自然科学基金资助出版

整体微分几何导引

方德植 梁益兴 编著

*

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

三明地质印刷厂印刷

(地址:三明市富兴路15号 邮编:365001)

*

开本 850×1168 1/32 11 印张 2 插页 275 千字

1998 年 12 月第 1 版 1998 年 12 月第 1 次印刷

印数:1-1000 册

ISBN 7-5615-1436-0/O·92

定价:19.50 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

在我国近代微分几何的先驱者、国际上
著名的大数学家苏步青老师九秩寿辰之际，
献上此书，谨表祝贺！

方德植

一九九一年九月

序 言

众所周知局部几何是研究图形上一点邻域中的性质,而整个图形的性质,叫做整体性质.

以局部性质为基础来研究图形的整体性质的微分几何叫做整体微分几何.

本书是作者长期以来对于微分几何的教学经验与科研成果的总结.

在撰写过程中,主要是采用李(Lie)群论的观点与活动标架论的方法进行描述的.

专著中所包含的许多内容基本上是吸取了我在教学时常常采用的资料,同时也编入了国际上一些有关专著的内容,以资本专著更加完美.

由于整体微分几何是现代微分几何的中心问题的主要课题之一,所以首先有必要研究流形论的基础.研究流形的主要目标是经过坐标卡的变换而保持不变的性质,如切向量、微分形式等.这些概念经过几十年的演变过程才成定型,将来数学研究的对象必然是流形,本世纪内高维流形的发展是辉煌的.为了给描述专著全部的内容打

下坚实的基础,所以首先着手把流形理论另立一章,安排在开头介绍.

鉴于国内至今尚未看到这种专著,因此我最近五年内着手撰写这部专著.出版后,我国微分几何工作者的水平将会迅速的提高,这是我所希望的.

由于作者水平所限,会带来不少缺点甚至于许多错误之处,恳切地希望读者提出批评与指正!

方德植

1990年8月于厦门大学

目 录

第一章 微分流形	(1)
§ 1.1 预备知识	(1)
1 拓扑空间	(1)
2 曲线与线性连通	(3)
3 诱导拓扑	(3)
4 拓扑基与第二可数性公理	(3)
5 同胚映射	(4)
6 紧致拓扑空间	(4)
7 数空间	(4)
8 度量空间	(6)
9 度量空间的完备化	(8)
10 局部有限、仿紧空间	(9)
习 题 1.1	(10)
§ 1.2 微分流形	(10)
1 导引	(10)
2 定义	(19)
3 例子	(21)
习 题 1.2	(24)
4 切空间及余切空间	(24)

5	向量场	(27)
6	切丛及余切丛	(29)
7	微分映射	(30)
8	子流形	(32)
§ 1.3	流形上的微积分与 Stokes 定理	(35)
1	关于多变数的积分	(35)
2	外代数(又称为 Grassmann 代数)	(38)
	习 题 1.3	(44)
3	de Rham 群	(45)
4	流形上的微积分与 Stokes 定理	(46)
	习 题 1.4	(66)
§ 1.4	张量算法	(67)
1	张量代数	(67)
2	张量场	(73)
§ 1.5	李代数	(74)
1	李代数	(74)
2	子代数、商李代数、同态映射	(75)
3	李代数的自同构	(76)
4	表示	(79)
5	李代数的结构	(79)
	习 题 1.5	(81)
§ 1.6	单参数变换群与李导数	(81)
1	单参数变换群	(81)
2	李导数	(87)
	习 题 1.6	(92)
§ 1.7	李群	(93)
1	定义	(93)

2	李群的实例	(96)
3	局部李群	(99)
4	流形上向量场的李代数	(100)
5	李变换群	(103)
6	李群的李子群	(109)
7	双不变形式	(110)
8	指数映射补遗	(113)
§ 1.8	外导数、外微分问题补遗	(115)
1	定义与基本定理	(115)
2	外微分的性质	(119)
3	外微分算子 d 与向量场的括号积	
	$[X, Y] = XY - YX$ 的关系	(121)
第二章	仿射联络空间	(124)
§ 2.1	仿射联络的定义	(125)
§ 2.2	仿射联络的公理化	(128)
§ 2.3	自平行曲线	(133)
§ 2.4	Cartan 结构方程	(134)
	习 题	(139)
第三章	黎曼空间	(141)
§ 3.1	黎曼度量及其存在性	(142)
§ 3.2	黎曼联络	(146)
§ 3.3	联络与展开	(148)
§ 3.4	测地线上的共轭点	(163)
	习 题 3.1	(166)
	习 题 3.2	(167)
§ 3.5	和乐群	(168)
§ 3.6	齐性空间与对称空间	(172)

1 对称黎曼空间	(173)
2 格拉斯曼流形	(175)
§ 3.7 空间型问题	(176)
§ 3.8 嵌入问题	(177)
§ 3.9 调和积分	(177)
习 题 3.3	(180)
第四章 极小曲面与柏拉图问题	(182)
§ 4.1 极小曲面的唯一性问题	(182)
§ 4.2 渐近曲线、球面表示	(187)
§ 4.3 极小螺旋面与悬链面	(188)
§ 4.4 柏拉图问题	(190)
第五章 平面曲线的整体性质	(191)
§ 5.1 闭曲线	(191)
1 卵形线	(191)
2 四顶点定理	(193)
3 等阔曲线	(198)
4 卵形线上的反极点	(200)
5 支持函数	(201)
6 卵形线的最小和最大曲率圆	(203)
习 题 5.1	(205)
§ 5.2 等周问题	(207)
1 等周不等式	(207)
2 Crofton 公式	(210)
3 切线旋转定理	(213)
习 题 5.2	(221)
复习提纲与总习题	(222)
第六章 空间曲线的整体性质	(224)

§ 6.1	球面的 Crofton 公式	(224)
§ 6.2	Fenchel 定理	(226)
§ 6.3	闭曲线的全挠率	(231)
§ 6.4	Fary—Milnor 定理	(234)
§ 6.5	A. Schur 定理	(236)
	习 题	(241)
第七章	曲面的整体性质	(242)
§ 7.1	欧氏空间中的曲面	(242)
§ 7.2	闭曲面	(247)
§ 7.3	欧拉示性数	(248)
	习 题 7.1	(250)
§ 7.4	整体高斯——波恩涅定理	(251)
	习 题 7.2	(252)
§ 7.5	卵形面	(253)
1	卵形面的刚性	(257)
2	Minkowski 定理	(265)
	习 题 7.3	(267)
§ 7.6	Hopf—Rinow 定理与 Hadamard 定理	(268)
第八章	等距变换群	(271)
§ 8.1	整体黎曼几何导引	(271)
§ 8.2	完备性	(279)
§ 8.3	等距变换	(282)
§ 8.4	变分法初步	(285)
§ 8.5	法坐标系	(288)
§ 8.6	常曲率空间的特征	(292)
§ 8.7	齐次空间	(297)
§ 8.8	对称空间	(303)

习 题 8.1	(310)
§ 8.9 截面曲率	(311)
§ 8.10 变分法续论	(315)
1 Fermi 坐标	(315)
2 测地线的相对最短线	(318)
习 题 8.2	(324)
第九章 运动群	(326)
§ 9.1 闭曲线的伴随合同变换	(326)
§ 9.2 齐次运动群	(330)
§ 9.3 运动群 H^0	(341)

第一章 微分流形

随着科学的迅速发展,微分流形的概念不但是现代数学的许多分支的基础,而且在其他科学的分支中,例如在力学、理论物理学,特别是广义相对论及规范场论中,都得到了深刻而富有成效的重要应用.微分流形是在微分几何与拓扑学两者的观点下发展起来的.

本章的主要内容是给出微分流形的定义并且比较详细地论述它们的性质,还定义流形上一点的切空间、余切空间、切丛、余切丛、以及微分映射与子流形,并着重地讲述流形上的微积分而证明了 Stokes 定理,还扼要地介绍 Lie 群与 Lie 代数的一些基础知识,为了以后学习一般的联络论做好准备.

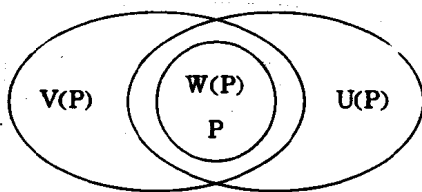
§ 1.1 预备知识

在讲上列内容之前,先叙述微分流形的预备知识,其中有些内容是带复习性的,因而基本上不作详细的论证.

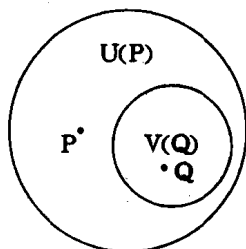
1. 拓扑空间 设集 M ,一般地称其元素为点,且各点在某种意义下加以联系,这是 M 的拓扑.以包含各点的 M 的某种子集

(邻域)为基础来考虑如下:

对于 M 的各点 P , 考虑包含 P 的 M 的子集 $U(P)$, 称为 P 的邻域, 当这邻域的集 N 满足下列条件时, 则称 M 为拓扑空间, 详细地叫 Hausdorff 拓扑空间或分离拓扑空间:

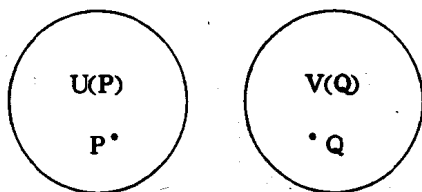


1) 对于 N 的任意两个 $U(P), V(P)$, 则有包含于 $U(P) \cap V(P)$ 中的 N 的元素 $W(P)$.



2) 对于属于 $U(P)$ 的任意点 Q , 有 $V(Q) \subset U(P)$ 的 $V(Q)$.

3) 对不同两点 P, Q , 有邻域 $U(P), V(Q)$ 使得



$$U(P) \cap V(Q) = \emptyset$$

(见图 1.1).

图 1.1

从这些条件可导出下列概念.

开集 对于集 A 的任意点, 若有它的邻域包含于 A 中, 则称 A 为开集.

闭集 所谓闭集 A 就是从 M 中去掉 A 所得的补集是开集.

紧致集 当 A 由无限个开集覆盖时, 若能从这些开集中选出有限个, 就可覆盖 A , 则称 A 为紧致集.

连通集 若集 A 不能分为无公共点的开集时, 则称 A 是连通集.

拓扑积 给定两个拓扑空间 M_1, M_2 , 设 $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2$, 考虑一切点偶 (a_1, a_2) 的集. 在 M_1 和 M_2 中分别取开集 O_1 和 O_2 , 令 $b_1 \in O_1$ 和 $b_2 \in O_2$, 则一切点偶 (b_1, b_2) 的集构成集 O_1 和 O_2 的笛氏积 $O_1 \times O_2$. 制作具有形式 $O_1 \times O_2$ 的和集, 并定义 $M_1 \times M_2$ 内的拓扑, 则不难证明 $M_1 \times M_2$ 构成一个拓扑空间, 称之为空间 M_1 和 M_2 的直积或拓扑积.

欧氏平面 E^2 是两条直线的拓扑积, 所以 $E^2 = E^1 \times E^1$.

一般地, n 维欧氏空间 E^n 可以作为 n 重拓扑积, $E^n = E^1 \times E^1 \times \cdots \times E^1$.

2. 曲线与线性连通 如果用连续映射 f 把线段 $I: a \leq t \leq b$ 映到拓扑空间 M , 它的象 $f(t)$ 称为曲线, $f(a), f(b)$ 叫做这条曲线的端点.

如果拓扑空间 M 的任意两点可以用连续曲线连结时, 称 M 为线性连通的.

3. 诱导拓扑 给定了一个拓扑空间 M 和 M 的开集族 $\{U_i\}$, 对于一个子集 $N \subset M$, 则不难看出, 以 $S = \{S_i: S_i = U_i \cap N\}$ 为开集族, 现在验证 N 是一个拓扑空间.

1) $\emptyset = \emptyset \cap N, N = M \cap N$, 所以 $\emptyset, N$ 都属于 S .

2) 由 $(U_1 \cap N) \cap (U_2 \cap N) = (U_1 \cap U_2) \cap N$ 可知 N 中两开集的交仍为 N 中的开集.

3) 由 $\bigcup_k (U_k \cap N) = (\bigcup_k U_k) \cap N$ 可知 N 中有限个开集之和仍为 N 中的开集.

于是 S 定义了 N 中的一个拓扑结构, N 的这个拓扑称为由 M 的拓扑诱导出来的拓扑, 或简称诱导拓扑.

4. 拓扑基与第二可数性公理 设拓扑空间 M 以 G 为其开集族, 对于子族 $B \subset G$, 使得 M 的任意开集, 可用 B 中的开集的和集来表示, 则称 B 为 M 的一个拓扑基.

若拓扑空间 M 的一个拓扑基至多含有可数个集, 则称满足第二可数性公理.

5. 同胚映射 一个拓扑空间 M 到另一个拓扑空间 N 的映射

$$f: M \rightarrow N$$

$m \in M$, 若对 $f(m) \in N$ 的每个邻域 V , 都存在点 $m \in M$ 的一个邻域 U , 使得 $f(U) \subset V$, 则说 f 在点 m 处连续. 若 f 在 M 的每点都连续, 则称 f 在 M 上连续.

若映射

$$f: M \rightarrow N$$

是双射的, 且 f 和 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 为同胚映射或拓扑映射. 若存在拓扑映射

$$f: M \rightarrow N$$

则拓扑空间 M 和 N 称为同胚的, 记作 $M \cong N$. 当 $f: M \rightarrow N$ 为拓扑映射时, 把点 $m \in M$ 和点 $n = f(m)$ 看成同一点, 就知道 M, N 具有同一拓扑, 这时两个拓扑空间互为同胚. 在任一同胚映射下不变的性质, 称为拓扑性质.

6. 紧致拓扑空间 M 中一族开集 $\{U_\alpha\}$, 若满足 $\bigcup U_\alpha = M$, 则称 $\{U_\alpha\}$ 为 M 的一个开覆盖. 若开覆盖的集 U_α 是有限个, 则称为有限开覆盖. 若 $\{U_\alpha\}$ 的一部分 $\{U_\beta\}$ 仍构成 M 的开覆盖, 则称 $\{U_\beta\}$ 为 $\{U_\alpha\}$ 的子覆盖.

设 M 是一拓扑空间, 若 M 的任一开覆盖必有有限子覆盖, 则称 M 为紧致拓扑空间.

7. 数空间 设 R 表示实数域, 考虑由 n 个有序实数构成的一个数组的全体

$$R^n = \{x | x = (x^1, \dots, x^n), x^i \in R\}$$

x 称为 R^n 的点或向量, 称 x^i 为第 i 个坐标或支量. 把 R^n 用通常的方法定义拓扑使它构成拓扑空间, 即 R^n 的子集 G 满足: 对于任意

的 $x \in G$, 存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$|x^i - y^i| < \epsilon (i=1, 2, \dots, n) \rightarrow y = (y^1, \dots, y^n) \in G$$

时, 称为开集. 直观地说, 这样的拓扑要求当 x, y 的坐标充分接近时, 则 x, y 就充分接近, 具有这样拓扑的 R^n 称为 n 维数空间.

在 R^n 中若规定两点 $x = (x^1, \dots, x^n)$ 和 $y = (y^1, \dots, y^n)$ 之间的距离 $d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2} \geq 0$, 则称 R^n 为 n 维欧氏空间, 记作 E^n . 而 E^n 中一个向量 x 的范数或长度是从原点 $O = (0, \dots, 0)$ 到 x 的距离, 记作 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. E^n 到自身并保持距离不变的一个同胚 P , 即 $d(P(x), P(y)) = d(x, y)$ 叫做运动, E^n 中所有运动的集构成一个群, 叫运动群, 记作 $R(n)$.

如果一个拓扑空间 M 的每点具有与某一 n 维欧氏空间的开集同胚的一个邻域, 就说 M 为局部欧氏的, 并且称 M 是一个 n 维流形.

另一方面, 在 R^n 中可引入线性运算:

$$C(x^1, \dots, x^n) = (Cx^1, \dots, Cx^n), (C \text{ 为实数})$$

$$(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n),$$

使 R^n 成为实数域 R 上的 n 维线性空间, 这个线性空间可以给予直线与自身的 n -阶拓扑积的拓扑, 关于这个拓扑, 集 R^n 成一个拓扑线性空间, 即由 $(C, x) \rightarrow Cx$ 给定的 $R^1 \times R^n \rightarrow R^n$ 的映射和由 $(x, y) \rightarrow x + y$ 给定的 $R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 的映射都是连续的. 这个拓扑线性空间就是 n 维线性空间记作 V^n . V^n 到自身的一个同胚, 它保持这些运算, 自然是与非奇异线性变换相同. V^n 中一切非奇异线性变换集构成一个群, 叫做一般线性群.

应当指出, 虽然我们在 V^n 上引入的拓扑是等价于 R^n 上的拓扑, 我们没有假定 V^n 上存在一个度量. 实际上, 我们的目的是要研究 R^n 上度量和 V^n 中代数运算之间的关系.

若在 R^n 中保持拓扑、直线概念和直线间平行概念, 但丢掉度