整体微分几何导引

方德植　梁益兴　编著

厦门大学出版社

整体微分几何导引

方德植　梁益兴　编著

厦门大学出版社

内容简介

微分几何有局部与整体之分，局部微分几何的完整理论是上世纪形成的. 本世纪以来，由于拓扑学的发展，微分几何的研究起了巨大的变化，整体的研究成为现代微分几何的中心问题的主要课题之一. 因此，本书可为我国读者进行这个方向的研究打下坚实的基础.

本书既适用于高等院校数学专业四年级及低年级研究生的教材或教学参考书，也可供一般微分几何工作者参考.

本书承福建省自然科学著作出版基金资助出版

整体微分几何导引

方德植　梁益兴　编著

*

厦门大学出版社出版发行

（地址：厦门大学　邮编：361005）

三明地质印刷厂印刷

（地址：三明市富兴路 15 号　邮编：365001）

*

开本 850×1168　1/32　11 印张　2 插页　275 千字

1998 年 12 月第 1 版　1998 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—1000 册

ISBN 7-5615-1436-0/O・92

定价：19.50 元

在我国近代微分几何的先驱者、国际上著名的大数学家苏步青老师九秩寿辰之际，献上此书，谨表祝贺！

方德植

一九九一年九月

序　言

众所周知局部几何是研究图形上一点邻域中的性质，而整个图形的性质，叫做**整体性质**.

以局部性质为基础来研究图形的整体性质的微分几何叫做**整体微分几何**.

本书是作者长期以来对于微分几何的教学经验与科研成果的总结.

在撰写过程中，主要是采用李(Lie)群论的观点与活动标架论的方法进行描述的.

专著中所包含的许多内容基本上是吸取了我在教学时常常采用的资料，同时也编入了国际上一些有关专著的内容，以资本专著更加完美.

由于整体微分几何是现代微分几何的中心问题的主要课题之一，所以首先有必要研究流形论的基础. 研究流形的主要目标是经过坐标卡的变换而保持不变的性质，如切向量、微分形式等. 这些概念经过几十年的演变过程才成定型，将来数学研究的对象必然是流形，本世纪内高维流形的发展是辉煌的. 为了给描述专著全部的内容打

下坚实的基础，所以首先着手把流形理论另立一章，安排在开头介绍.

鉴于国内至今尚未看到这种专著，因此我最近五年内着手撰写这部专著. 出版后，我国微分几何工作者的水平将会迅速的提高，这是我所希望的.

由于作者水平所限，会带来不少缺点甚至于许多错误之处，恳切地希望读者提出批评与指正！

方德植

1990 年 8 月于厦门大学

目　　录

第一章　微分流形

随着科学的迅速发展，微分流形的概念不但是现代数学的许多分支的基础，而且在其他科学的分支中，例如在力学、理论物理学，特别是广义相对论及规范场论中，都得到了深刻而富有成效的重要应用. 微分流形是在微分几何与拓扑学两者的观点下发展起来的.

本章的主要内容是给出微分流形的定义并且比较详细地论述它们的性质，还定义流形上一点的切空间、余切空间、切丛、余切丛、以及微分映射与子流形，并着重地讲述流形上的微积分而证明了 stokes 定理，还扼要地介绍 Lie 群与 Lie 代数的一些基础知识，为了以后学习一般的联络论做好准备.

§1.1　预备知识

在讲上列内容之前，先叙述微分流形的预备知识，其中有些内容是带复习性的，因而基本上不作详细的论证.

1. **拓扑空间**　设集 M，一般地称其元素为点，且各点在某种意义下加以联系，这是 M 的**拓扑**. 以包含各点的 M 的某种子集

(邻域)为基础来考虑如下：

对于 M 的各点 P，考虑包含 P 的 M 的子集 $U(P)$，称为 P 的**邻域**，当这邻域的集 N 满足下列条件时，则称 M 为**拓扑空间**，详细地叫 **Hausdorff 拓扑空间**或**分离拓扑空间**：

1)对于 N 的任意两个 $U(P)$，$V(P)$，则有包含于 $U(P)\cap V(P)$ 中的 N 的元素 $W(P)$.

2)对于属于 $U(P)$ 的任意点 Q，有 $V(Q)\subset U(P)$ 的 $V(Q)$.

3)对不同两点 P，Q，有邻域 $U(P)$，$V(Q)$ 使得

$$U(P)\cap V(Q)=\varnothing$$

(见图 1.1).

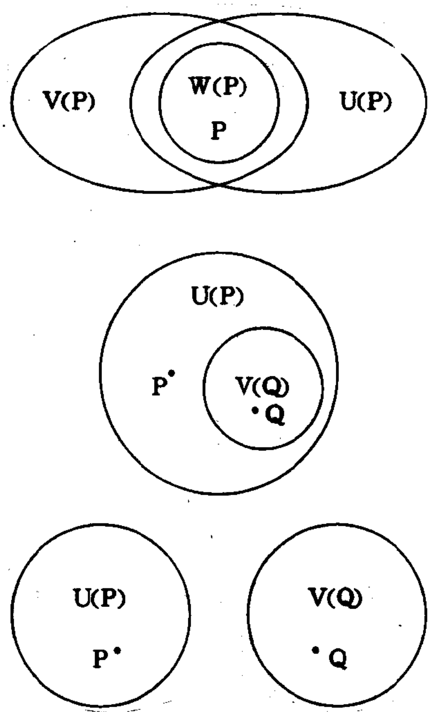

图 1.1

从这些条件可导出下列概念.

开集　对于集 A 的任意点，若有它的邻域包含于 A 中，则称 A 为**开集**.

闭集　所谓闭集 A 就是从 M 中去掉 A 所得的补集是开集.

紧致集　当 A 由无限个开集覆盖时，若能从这些开集中选出有限个，就可覆盖 A，则称 A 为**紧致集**.

连通集　若集 A 不能分为无公共点的开集时，则称 A 是**连通集**.

拓扑积 给定两个拓扑空间M_1,M_2，设$a_1\in M_1,a_2\in M_2$，考虑一切点偶(a_1,a_2)的集．在M_1和M_2中分别取开集O_1和O_2，令$b_1\in O_1$和$b_2\in O_2$，则一切点偶(b_1,b_2)的集构成集O_1和O_2的笛氏积$O_1\times O_2$.制作具有形式$O_1\times O_2$的和集，并定义$M_1\times M_2$内的拓扑，则不难证明$M_1\times M_2$构成一个拓扑空间，称之为空间M_1和M_2的**直积或拓扑积**.

欧氏平面E^2是两条直线的拓扑积，所以$E^2=E^1\times E^1$.

一般地，n维欧氏空间E^n可以作为n重拓扑积，$E^n=E^1\times E^1\times\cdots\times E$.

2. **曲线与线性连通** 如果用连续映射f把线段$I:a\leq t\leq b$映到拓扑空间M，它的象$f(t)$称为**曲线**，$f(a)$，$f(b)$叫做这条曲线的**端点**.

如果拓扑空间M的任意两点可以用连续曲线连结时，称M为**线性连通的**.

3. **诱导拓扑** 给定了一个拓扑空间M和M的开集族$\{U_i\}$，对于一个子集$N\subset M$，则不难看出，以$S=\{S_i:S_i=U_i\cap N\}$为开集族，现在验证N是一个拓扑空间.

1）$\varnothing=\varnothing\cap N$，$N=M\cap N$，所以$\varnothing$，$N$都属于$S$.

2）由$(U_1\cap N)\cap(U_2\cap N)=(U_1\cap U_2)\cap N$可知$N$中两开集的交仍为$N$中的开集.

3）由$\bigcup\limits_k(U_k\cap N)=(\bigcup\limits_k U_k)\cap N$可知$N$中有限个开集之和仍为$N$中的开集.

于是S定义了N中的一个拓扑结构，N的这个拓扑称为由M的拓扑诱导出来的拓扑，或简称**诱导拓扑**.

4. **拓扑基与第二可数性公理** 设拓扑空间M以G为其开集族，对于子族$B\subset G$，使得M的任意开集，可用B中的开集的和集来表示，则称B为M的一个**拓扑基**.

若拓扑空间 M 的一个拓扑基至多含有可数个集，则称满足**第二可数性公理**.

5. **同胚映射**　一个拓扑空间 M 到另一个拓扑空间 N 的映射

$$f: M \to N$$

$m \in M$，若对 $f(m) \in N$ 的每个邻域 V，都存在点 $m \in M$ 的一个邻域 U，使得 $f(U) \subset V$，则说 f 在点 m 处**连续**. 若 f 在 M 的每点都连续，则称 f 在 M 上**连续**.

若映射

$$f: M \to N$$

是双射的，且 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 f 为**同胚映射**或**拓扑映射**. 若存在拓扑映射

$$f: M \to N$$

则拓扑空间 M 和 N 称为**同胚的**，记作 $M \cong N$. 当 $f: M \to N$ 为拓扑映射时，把点 $m \in M$ 和点 $n = f(m)$ 看成同一点，就知道 M，N 具有同一拓扑，这时两个拓扑空间互为同胚. 在任一同胚映射下不变的性质，称为**拓扑性质**.

6. **紧致拓扑空间**　M 中一族开集 $\{U_\alpha\}$，若满足 $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$，则称 $\{U_\alpha\}$ 为 M 的一个**开覆盖**. 若开覆盖的集 U_α 是有限个，则称为**有限开覆盖**. 若 $\{U_\alpha\}$ 的一部分 $\{U_\beta\}$ 仍构成 M 的开覆盖，则称 $\{U_\beta\}$ 为 $\{U_\alpha\}$ 的**子覆盖**.

设 M 是一拓扑空间，若 M 的任一开覆盖必有有限子覆盖，则称 M 为**紧致拓扑空间**.

7. **数空间**　设 R 表示实数域，考虑由 n 个有序实数构成的一个数组的全体

$$R^n = \{x \mid x = (x^1, \cdots, x^n), x^i \in R\}$$

x 称为 R^n 的**点**或**向量**，称 x^i 为第 i 个**坐标**或**支量**. 把 R^n 用通常的方法定义拓扑使它构成拓扑空间，即 R^n 的子集 G 满足：对于任意

的 $x\in G$，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$|x^i-y^i|<\varepsilon(i=1,2,\cdots,n)\rightarrow y=(y^i,\cdots,y^n)\in G$$

时，称为**开集**. 直观地说，这样的拓扑要求当 x,y 的坐标充分接近时，则 x,y 就充分接近，具有这样拓扑的 R^n 称为 **n 维数空间**.

在 R^n 中若规定两点 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $y=(y^1,\cdots,y^n)$ 之间的距离 $d(x,y)=\sqrt{(x^1-y^1)^2+\cdots+(x^n-y^n)^2}\geqslant O$，则称 R^n 为 **n 维欧氏空间**，记作 E^n. 而 E^n 中一个向量 x 的**范数**或**长度**是从原点 $O=(O,\cdots,O)$ 到 x 的距离，记作 $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. E^n 到自身并保持距离不变的一个同胚 P，即 $d(P(x),P(y))=d(x,y)$ 叫做**运动**，E^n 中所有运动的集构成一个群，叫**运动群**，记作 $R(n)$.

如果一个拓扑空间 M 的每点具有与某一 n 维欧氏空间的开集同胚的一个**邻域**，就说 M 为**局部欧氏的**，并且称 M 是一个 **n 维流形**.

另一方面，在 R^n 中可引入线性运算：

$$C(x^1,\cdots,x^n)=(Cx^1,\cdots,Cx^n),(C\ \text{为实数})$$

$$(x^1,\cdots,x^n)+(y^1,\cdots,y^n)=(x^1+y^1,\cdots,x^n+y^n),$$

使 R^n 成为实数域 R 上的 **n 维线性空间**，这个线性空间可以给予直线与自身的 n-阶拓扑积的拓扑，关于这个拓扑，集 R^n 成一个拓扑线性空间，即由 $(C,x)\rightarrow Cx$ 给定的 $R^1\times R^n\rightarrow R^n$ 的映射和由 $(x,y)\rightarrow x+y$ 给定的 $R^n\times R^n\rightarrow R^n$ 的映射都是连续的. 这个拓扑线性空间就是 n 维线性空间记作 V^n. V^n 到自身的一个同胚，它保持这些运算，自然是与非奇异线性变换相同. V^n 中一切非奇异线性变换集构成一个群，叫做**一般线性群**.

应当指出，虽然我们在 V^n 上引入的拓扑是等价于 R^n 上的拓扑，我们没有假定 V^n 上存在一个度量. 实际上，我们的目的是要研究 R^n 上度量和 V^n 中代数运算之间的关系.

若在 R^n 中保持拓扑、直线概念和直线间平行概念，但丢掉度