

卫星转动动力学

雷郁
穆永
禄熙
著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书介绍世界最新的卫星科学技术研究成果,从卫星动力学的基本原理出发,讨论卫星姿态动力学的有关基础理论,如惯性矩张量,坐标变换,欧拉定律,欧拉方程的应用等。并详细研究了重心和质心的关系,卫星摆动对稳定的影响,卫星结构变形对稳定性的影响,介绍了预测卫星稳定性的新的共线原理,自旋卫星的具体的稳定方法。在论述重要概念之后,用实际的例子来加深读者对概念的理解和应用。每章之末提供许多有关卫星的实用而有趣的习题,给读者在研究,教学和设计人造卫星和其他飞行器时应用。书末附有习题答案。

责任编辑 张泉宝
封面设计 刘 伟

卫 星 转 动 动 力 学

上海交通大学出版社·出版

(上海市华山路1954号 邮政编码 200030)

新华书店上海发行所·发行

上海交通大学印刷厂·印刷

开本: 787×1092(毫米) 1/16 印张: 15 字数: 371000

版次: 1996年3月 第1版 印次: 1996年4月 第1次

印数: 1—1500

ISBN7-313-01599-2/V·01

定价: 11.80 元

目 录

第一章 转动体动力学基础	1
1.1 动量矩	1
1.2 动量矩的时间导数	2
1.3 惯量张量	3
1.4 平行轴定理	5
1.5 主惯性矩	6
1.6 动能	7
1.7 欧拉方程	8
1.8 用于主轴的欧拉方程	9
1.9 欧拉角	10
1.10 坐标变换.....	10
1.11 角速度的坐标变换.....	11
1.12 可积分性质.....	13
1.13 Magnus 形态三角形.....	14
习题.....	16
第二章 重心	24
2.1 棒形卫星	24
2.2 棒形小卫星	27
2.3 小卫星的重心	28
2.4 小卫星的开普勒力	30
2.5 相对于质心的力矩	31
2.6 势能	31
2.7 定向转动	32
2.8 定向转动的轨道周期	32
2.9 带杆件的航天飞行器	33
2.10 微重力.....	35
习题.....	37
第三章 摆动	43
3.1 在轨道平面内相对于位置向量的摆动	43
3.2 相对于径向方向的摆动(垂直于轨道平面)	44
3.3 相对于轨道切线方向的摆动	45
3.4 在轨道平面内相对于切线方向的姿态变化	46
3.5 姿态稳定性	47
3.6 月球的摆动	48

习题	48
第四章 在重力场中卫星姿态的稳定性	50
4.1 Cardan角	50
4.2 自旋的轴对称卫星	52
4.3 定向转动的任意卫星	56
4.4 椭圆轨道上拟定向转动的任意卫星	58
习题	59
第五章 无力矩转动体	62
5.1 无力矩转动体的欧拉方程解	62
5.2 相平面表示法	66
5.3 动能椭圆球和 Poinsot 椭圆球	69
5.4 角动量椭圆球	70
5.5 MacCullagh 椭圆球	71
5.6 无力矩转动体内部任意点的速度和加速度	71
5.7 刚性转动体围绕主轴转动的稳定性	72
5.8 变形的转动体围绕主轴转动时的稳定性	73
5.9 共线定理	77
习题	78
第六章 无力矩轴对称转动体	83
6.1 角速度分量	83
6.2 欧拉速度	85
6.3 任意点的速度和加速度	87
6.4 惯性力场	89
6.5 变化的惯性矩	90
6.6 抓取卫星	92
习题	94
第七章 变形的轴对称转动体	97
7.1 固体转动体	97
7.2 轴对称固体转动体	98
7.3 近似刚性转动体的惯量张量	98
7.4 浮动坐标系	99
7.5 辅助惯性积和惯性矩	100
7.6 变形体角动量	101
7.7 变形体的转动动能	104
7.8 功率	106
7.9 $\delta_u = 0$ 时的约束系统中的应用	106
7.10 $\delta_u = \delta_v = 0$ 时的约束系统中的应用	109
7.11 结论	118
习题	118

第八章 无力矩耗散轴对称转动体的姿态缓慢漂移	122
8.1 姿态漂移速度和稳定性	122
8.2 姿态漂移过程	125
8.3 在 vz 平面中的圆	130
8.4 初始状态和最终稳定状态	131
8.5 弹性变形和姿态稳定性	134
8.6 变形对角速度的影响	136
8.7 变形对动能和应变能的影响	138
习题	139
第九章 消旋	143
9.1 溜溜球质量消旋	143
9.2 杆件伸张消旋	145
9.3 偏心安装伸张杆	147
9.4 转动体形状变化对欧拉方程的影响	148
习题	151
第十章 相对于轴对称卫星上固定轴的力矩	153
10.1 垂直于对称轴的力矩	153
10.2 相对于对称轴的力矩	155
习题	157
第十一章 刚性转子式卫星	159
11.1 角动量和欧拉方程	159
11.2 无力矩转子式卫星短期运行时的稳定性	161
11.3 无力矩轴对称转子式卫星	163
11.4 轴承摩擦	165
11.5 无力矩轴对称转子式卫星的欧拉角	167
11.6 惯性力场	168
11.7 在中心力场中自旋的轴对称转子式卫星	170
习题	173
第十二章 耗散能量的无力矩轴对称转子式卫星	175
12.1 近似刚性的转子和平台	175
12.2 具有耗散平台的卫星姿态的缓慢漂移	177
12.3 具有耗散转子的卫星的姿态缓慢漂移	180
12.4 具有耗散转子和耗散平台时的姿态缓慢漂移	182
习题	187
附录A 欧拉角	190
A.1 欧拉角	190
A.2 坐标转换关系式	191
A.3 转换矩阵	192
A.4 角速度分量的转换矩阵	193

A.5 坐标转换和向量转动	194
附录B 欧拉参数	196
B.1 欧拉参数	196
B.2 欧拉转动定理	198
习题	201
附录C Cardan角	202
C.1 Cardan角	202
C.2 坐标转换关系式	204
C.3 转换矩阵	204
C.4 横偏, 俯仰和滚动	207
习题	207
附录D 工程数据	210
D.1 典型物体的主惯性矩	210
D.2 $\rho/\rho_0 = \sqrt{1 + 2(x/\rho_0)\cos\alpha + (x^2/\rho_0^2)}$ 的展开式	212
附录E 符号表示	214
附录F 答案	217
参考文献	229

第一章 转动体动力学基础

本章阐述的转动体动力学的基本概念和理论,在以后各章中经常用到,其中最常用的是欧拉动量矩定律

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} \quad (1.1)$$

式中: \mathbf{M} 为作用于转动体的外力矩, $\dot{\mathbf{H}}$ 是动量矩 \mathbf{H} 相对于时间的一阶导数。力矩 \mathbf{M} 和角动量 \mathbf{H} 应取相同的参考点。欧拉角动量定律是牛顿第二定律的一个补充。后者控制直线运动,而前者控制旋转运动。

1.1 动量矩

质量为 m 的有限尺寸物体的动量矩 \mathbf{H} 是一个向量

$$\mathbf{H} = \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm \quad (1.2)$$

式中: \mathbf{r} 是质量单元 dm 的位置向量, $\dot{\mathbf{r}}$ 是该质量单元的速度(图1-1)。

对于任一刚体,如其惯量张量为

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

其转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = [e_x e_y e_z] \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

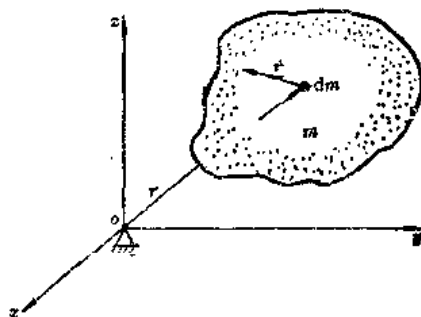


图1-1 质量单元的位置和速度

并成立 $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, 则动量矩成为

$$\mathbf{H} = [e_x e_y e_z] \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

上式可简写为

$$\mathbf{H} = \{e_i\}^T [I_{ij}] \{\omega_j\} \quad (1.6)$$

动量矩的分量列矩阵为

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

或简写成

$$\{H_i\} = [I_{ij}] \{\omega_j\} \quad (1.8)$$

惯量张量 $[I_{ij}]$ 将角速度 $\{\omega_j\}$ 变换到动量矩 $\{H_i\}$, 即 $I_i \omega \rightarrow H$ 。

若坐标系原点在物体的质心 C (图1-2a), 则从式(1.6)得动量矩

$$\mathbf{H}_C = \{\mathbf{e}\}^T [I] \{\omega\}$$

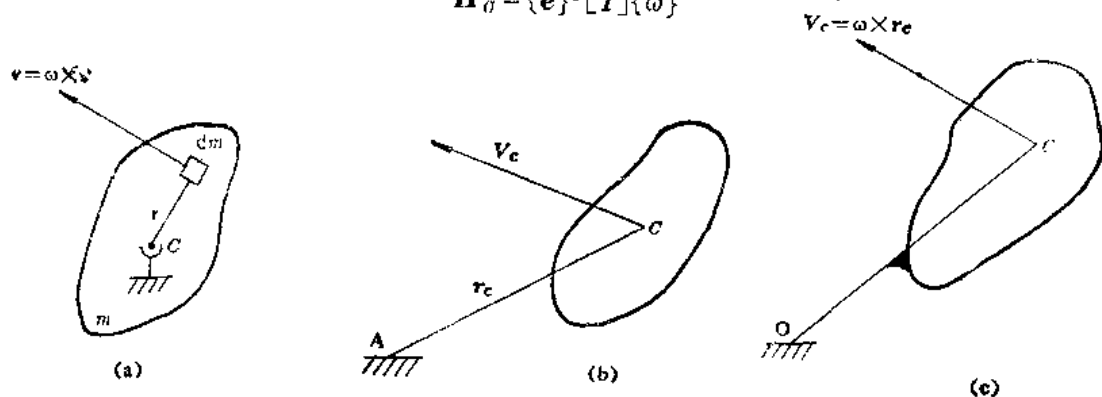


图1-2 (a) 相对于 C 点的角动量; (b) 相对于 A 点的角动量; (c) 相对于 O 点的角动量

但是, 在转动体动力学中也要求计算相对于非质心点的动量矩。相对于非质心点 A (图1-2b) 的动量矩是

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_C + m \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C \quad (1.9)$$

如果 \mathbf{r}_C 是固定于物体 m 上的直线 (即 $\ddot{\mathbf{r}}_C = 0$), 而 O 是在空间的一个固定点 (图1.2c), 则

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C = \mathbf{r}_C \times (\omega \times \mathbf{r}_C) \quad (1.10)$$

因而

$$\mathbf{H}_O = \{\mathbf{e}\}^T [I]_O \{\omega\} \quad (1.11)$$

式中: $[I]_O$ 将由后面的式(1.37)定义。

1.2 动量矩的时间导数

如果取等式(1.6)的两边对时间的导数, 则可得

$$\dot{\mathbf{H}} = \{\mathbf{e}_i\}^T [I_{ij}] \{\dot{\omega}_j\} + \{\mathbf{e}_i\}^T [\dot{I}_{ij}] \{\omega_j\} + \{\dot{\mathbf{e}}_i\}^T [I_{ij}] \{\omega_j\} \quad (1.12)$$

上式等号右边前两项代表相对变化率(相对于所用的坐标系)。如果用 $\dot{\mathbf{H}}$ 代表右边前两项, 则得

$$\dot{\mathbf{H}} = \{\mathbf{e}_i\}^T [[I_{ij}] \{\dot{\omega}_j\} + [\dot{I}_{ij}] \{\omega_j\}] \quad (1.13)$$

式(1.12)右边第三项代表坐标框架的变化率, 由坐标系本身的转动而引起, 它可用下式表示

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = \{\mathbf{e}_i\}^T [I_{ij}] \{\dot{\omega}_j\} \quad (1.14)$$

式中: $\boldsymbol{\Omega}$ 是坐标系的角速度, 它可等于也可不等于由式(1.4)给出的转动体角速度 ω 。将式(1.13)和(1.14)代入式(1.12)后可得

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \quad (1.15)$$

此式也可用下面的方法求得: \mathbf{H} 可以写成如下形式

$$\mathbf{H} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

上式两边对时间取导数以后得

$$\dot{\mathbf{H}} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix} + [\dot{\mathbf{e}}_x \ \dot{\mathbf{e}}_y \ \dot{\mathbf{e}}_z] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

引入相对于 xyz 坐标系的相对速率

$$\dot{\mathbf{H}} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

及代表坐标系转动速度的矢量积

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = [\dot{\mathbf{e}}_x \ \dot{\mathbf{e}}_y \ \dot{\mathbf{e}}_z] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

然后将式(1.18)和(1.19)代入式(1.17)得到

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \quad (1.20)$$

1.3 惯量张量

张量

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

称为惯量张量。矩阵(1.21)中对角元素称为转动惯量或极惯性矩，其余元素称为惯性积、离心转动惯量或离心矩。

转动惯量定义为

$$I_{xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm \quad (1.22)$$

$$I_{yy} = \int_m (z^2 + x^2) dm \quad (1.23)$$

$$I_{zz} = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad (1.24)$$

惯性积定义为

$$I_{xy} = - \int_m xy dm = I_{yx} \quad (1.25)$$

$$I_{yz} = - \int_m yz dm = I_{zy} \quad (1.26)$$

$$I_{zx} = - \int_m xz dm = I_{xz} \quad (1.27)$$

惯量张量中的每一个元素，均可写成以下三种形式之一：

$$I_{ij} = \int_m ((x^2 + y^2 + z^2)\delta_{ij} - ij) dm \quad (1.28)$$

$$I_{ij} = \int_m (r^2 \delta_{ij} - ij) dm \quad (1.29)$$

及

$$I_{ij} = \int_m (r_i r_k \delta_{ki} - r_i r_j) dm \quad (1.30)$$

式中: i, j 和 k 轮流等于 x, y 和 z ; r_i 和 r_j 也轮流等于 x, y 和 z ; 当 $i = j$ 时 $\delta_{ij} = 1, i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$ 。

下面用一平行六面体(图 1-3) 作为例子求惯量张量。该六面体用均质材料制成, 其总质量为 m 。相对于参考坐标系的惯量张量是

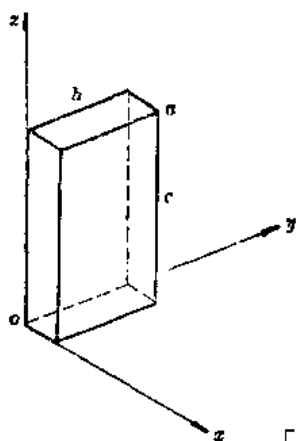


图1-3 平行六面体

$$[I_{ij}] = m \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{4}ac \\ -\frac{1}{4}ab & \frac{1}{3}(a^2 + c^2) & -\frac{1}{4}bc \\ -\frac{1}{4}ac & -\frac{1}{4}bc & \frac{1}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

值得指出的是, 惯性积的定义式(1.25), (1.26)和(1.27)不是唯一的。例如, 在某些文献中定义为

$$P_{xy} = \int_m xy dm$$

$$P_{yz} = \int_m yz dm$$

$$P_{xz} = \int_m xz dm$$

如果采用这些定义, 则惯量张量的形式为

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

如果所取的 $Oxyz$ 坐标系使得惯性积的值为零, 则称相应的 x, y 和 z 轴为主轴, 此时的转动惯量称为主惯量或主惯性矩。在本书中分别用 A, B 和 C 表示。相应的惯量张量具有如下的形式

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

根据式(1.22), (1.23)和(1.24)可知

$$\int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \quad (1.34)$$

各转动惯量之间还存在如下的关系式

$$I_{xx} + I_{yy} \geq I_{zz} \quad (1.35a)$$

$$I_{yy} + I_{zz} \geq I_{xx} \quad (1.35b)$$

$$I_{zz} + I_{xx} \geq I_{yy} \quad (1.35c)$$

从以上关系式知道,当 $I_{zz} = 0$ 时,要求 $I_{xx} = I_{yy}$,另外,如果 I_{zz} 是三个转动惯量中最大的一个及 $I_{xx} = I_{yy}$,则要求 $I_{zz} > I_{xx} = I_{yy} > \frac{1}{2} I_{zz}$ 。

由于 $(y-z)^2 \geq 0$,由此得 $y^2 + z^2 \geq 2yz$ 。因此可以得到

$$I_{xx} \geq 2|I_{yz}| \quad (1.36a)$$

$$I_{yy} \geq 2|I_{xz}| \quad (1.36b)$$

$$I_{zz} \geq 2|I_{xy}| \quad (1.36c)$$

式(1.35)也适用于主惯量,所以

$$A + B \geq C$$

$$B + C \geq A$$

$$C + A \geq B$$

1.4 平行轴定理

由Huygens和Steniner首先提出的平行轴定理表述如下:若坐标系 $Oxyz$ 平行于原点在质心 C 的坐标系 $C\xi\eta\zeta$ (图1-4),则相对于坐标系 $Oxyz$ 的惯量张量可以从下式求得为

$$[I]_O = [I]_C + m \begin{bmatrix} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) & -\bar{xy} & -\bar{xz} \\ -\bar{xy} & (\bar{z}^2 + \bar{x}^2) & -\bar{yz} \\ -\bar{xz} & -\bar{yz} & (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

作为例子,现在讨论图1-4上的平行六面体。相对于坐标系 $C\xi\eta\zeta$ 的惯量张量为(参考附录D)

$$[I_C] = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(c^2 + a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

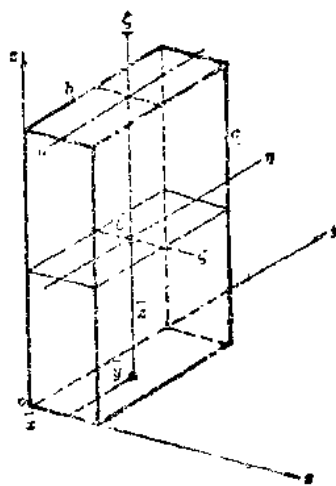


图1-4 坐标轴平行的两个坐标系

由于 $\bar{x} = a/2$, $\bar{y} = b/2$ 及 $\bar{z} = c/2$, 则式(1.37)右边第二个矩阵成为

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{4}(b^2 + c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{4}(c^2 + a^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{4}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

将式(1.38)右边的矩阵和式(1.39)相加,即可得到平行六面体相对于 $Oxyz$ 坐标系的惯量张量为

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{3}(b^2+c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(c^2+a^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

1.5 主惯性矩

参考坐标系转动后,相应的惯量张量 $[I_{ij}]$ 可以变换成形式

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

即式(1.33)。主惯性矩可从求解特征方程

$$\det([I_{ij}] - \lambda[\delta_{ij}]) = 0 \quad (1.41)$$

得到。式(1.41)是 λ 的三次方程,所得到的特征值

$$\lambda_1 = A$$

$$\lambda_2 = B$$

$$\lambda_3 = C$$

即为主惯性矩。

现在举例如下:设惯量张量为

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & -2 & 0 \\ -2 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

特征方程式为

$$\begin{bmatrix} 20-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 30-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 40-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

由此得

$$(20-\lambda)(30-\lambda)(40-\lambda) - 4(40-\lambda) = 0$$

解上式得三个根: $\lambda_1 = 30.385$, $\lambda_2 = 19.615$ 和 $\lambda_3 = 40$ 。因此主惯量张量为

$$\begin{bmatrix} 30.385 & 0 & 0 \\ 0 & 19.615 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

解下式可得主轴 i 的方向:

$$\begin{bmatrix} I_x - \lambda_i & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y - \lambda_i & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_i \\ \cos\beta_i \\ \cos\gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

所求的方向角余弦还必须满足

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1 \quad (1.43)$$

对于上面例子,求第一根主轴方向角的方程式为

$$\begin{bmatrix} 20 - 30.385 & -2 & 0 \\ -2 & 30 - 30.385 & 0 \\ 0 & 0 & 40 - 30.385 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此求得 $\alpha_1 = 79.1^\circ$, $\beta_1 = 169.1^\circ$ 和 $\gamma_1 = 90^\circ$ 。用类似方法可求得第二根主轴的方向角 $\alpha_2 = 10.9^\circ$, $\beta_2 = 79.1^\circ$ 和 $\gamma_2 = 90^\circ$; 第三根主轴的方向角 $\alpha_3 = 90^\circ$, $\beta_3 = 90^\circ$ 和 $\gamma_3 = 0^\circ$ 。

1.6 动 能

任何一个转动物体上任意质量单元 dm 的动能为

$$\frac{1}{2} dm |\dot{\mathbf{r}}|^2 \quad (1.44)$$

当坐标系原点的速度为零时,质量单元 dm 的速度 $\dot{\mathbf{r}}$ (见图1-5)由下式给出:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.45)$$

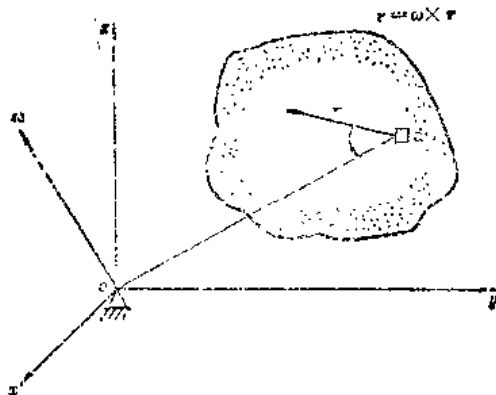


图1-5 纯转动时质量单元的位置和速度

整个转动体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_m |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 dm \quad (1.46)$$

将式(1.46)积分后,得到相对于原点(不动点) O 移动的物体的动能为

$$T = \frac{1}{2} (I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{zx}\omega_z\omega_x) \quad (1.47)$$

当坐标系 $Oxyz$ 的坐标轴与转动体主轴重合时,则动能为

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \quad (1.48)$$

尺寸不变的转动体的动能,还可用角动量 \mathbf{H} 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的点积表示,现推导于后。式(1.46)可以改写成

$$T = \frac{1}{2} \int_m \dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (1.49)$$

利用混合三重积等式 $\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$, 并注意到所有质量单元 dm 的角速度都是相同的, 则可得到

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm \quad (1.50)$$

上式右边的积分部分代表转动体相对于坐标原点 O 的角动量 \mathbf{H} 。因此,动能可以写成

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H} \quad (1.51)$$

最后,必须记住推导出上述动能公式的前题是:转动体的形状和大小均保持不变,同时组成转动体的各部分之间不能作相对运动(即 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 中的 $\dot{\mathbf{r}} = 0$)。

由于 $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i\}^T [I_{ij}] \{\omega_j\}$, 动能还可表示为

$$T = \frac{1}{2} \{\omega_i\}^T [I_{ij}] \{\omega_j\} \quad (1.52)$$

1.7 欧拉方程

现在讨论在实际应用中很重要的一种情况:坐标系的原点与转动体的质心 C 相重合。坐标系 $Cxyz$ 的角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$ 。

欧拉角动量定律表明,作用于转动体的力矩等于角动量相对于时间的导数,即

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} \quad (1.53)$$

将上式写成分量的形式为

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{H})_x \\ (\dot{H})_y \\ (\dot{H})_z \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

在实际应用时还常写成

$$\dot{H}_x = \frac{d}{dt} H_x = (H_x) \quad (1.55)$$

即 \dot{H}_x 代表角动量 \mathbf{H} 在 x 坐标上分量 H_x 的时间导数。为了区分 $\dot{\mathbf{H}}$ 的 x 坐标上分量与 \mathbf{H} 的 x 坐标上分量的时间导数,必须将 \mathbf{H} 的 x 坐标上的分量写成

$$\mathbf{e}_x (\dot{H})_x = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H} \right)_x \quad (1.56)$$

正如在式(1.51)中一样。

对于转动的坐标系,在

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \quad (1.57)$$

中包含相对变化率

$$\dot{\mathbf{H}} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

及坐标框架引起的变化率

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (1.59)$$

解方程式(1.57)可得

$$\begin{bmatrix} (\dot{H})_x \\ (\dot{H})_y \\ (\dot{H})_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{H}_x + \Omega_y H_z - \Omega_z H_y \\ \dot{H}_y + \Omega_z H_x - \Omega_x H_z \\ \dot{H}_z + \Omega_x H_y - \Omega_y H_x \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

将式(1.60)代入式(1.54)后可得三个欧拉方程

$$M_x = \dot{H}_x + \Omega_y H_z - \Omega_z H_y \quad (1.61)$$

$$M_y = \dot{H}_y + \Omega_z H_x - \Omega_x H_z \quad (1.62)$$

$$M_z = \dot{H}_z + \Omega_x H_y - \Omega_y H_x \quad (1.63)$$

1.8 用于主轴的欧拉方程

在许多实际应用中,坐标系不仅固定于转动体上,而且坐标轴与转动体的主轴相重合。在这种情况下,坐标系的角速度与转动体的角速度相等,即

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \quad (1.64)$$

同时,转动体的惯量张量为

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

角动量为

$$\mathbf{H} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} A\omega_x \\ B\omega_y \\ C\omega_z \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

相对变化率成为

$$\dot{\mathbf{H}} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} A\dot{\omega}_x \\ B\dot{\omega}_y \\ C\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

欧拉方程具有如下形式

$$M_x = A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z \quad (1.68)$$

$$M_y = B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x \quad (1.69)$$

$$M_z = C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y \quad (1.70)$$

1.9 欧拉角

为了确定转动体在绝对空间中的姿态，必须要用到三个角坐标，即所谓欧拉角（见附录A和B）。许多作者用不同的转动次序及不同的符号表示这些欧拉角，因此在文献中是不统一的。本书用如下符号表示欧拉角： ψ 代表进动角， ν 代表章动角和 σ 代表自旋角。

在图1-6上转动体的姿态 $\psi = 0, \nu = 0$ 和 $\sigma = 0$ 。在图1-7上的姿态角 ψ, ν 和 σ 均不等于零。坐标系 $CXYZ$ 固定于空间，而坐标系 $Cxyz$ 固定于转动体上。直线 x_2 代表 xy 平面和 XY 平面的交线，并称为节线。欧拉角对时间的导数称为欧拉速度（或欧拉频率）。 $\dot{\psi}$ 称为进动速度， $\dot{\nu}$ 称

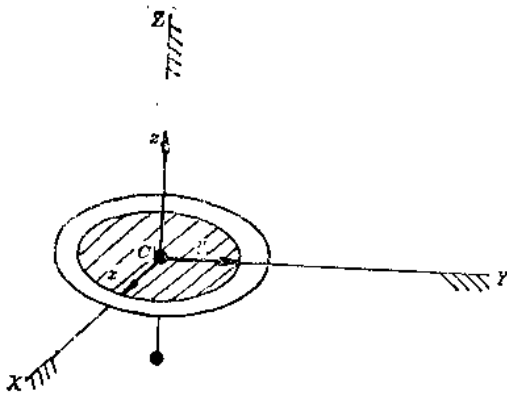


图1-6 位于参考平面中的圆盘形转动体

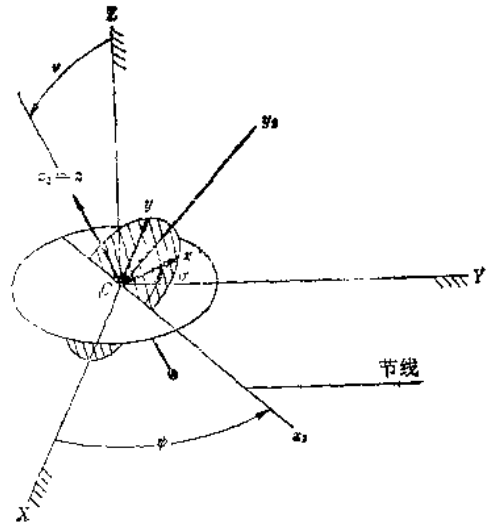


图1-7 圆盘形转动体的位置：章动角 ν ，进动角 ψ ，自旋角 σ

为章动速度， $\dot{\sigma}$ 称为自旋速度。这里所用的术语都是古典力学中的术语。工程技术人员常将不受外力矩作用的转动体（以后简称无力矩转动体）自身产生的速度称为章动速度，而外力矩产生的速度称为进动速度。本书不采用这种表示法。

1.10 坐标变换

从坐标系 0（即 $Cx_0y_0z_0$ ）变换到坐标系 1（即 $Cx_1y_1z_1$ ）的任何坐标变换都根据下式进行

$$\{r\}_1 = [T]_{1 \leftarrow 0} \{r\}_0 \quad (1.71)$$

若作三次连续的变换（图1-8），可得

$$\{r\}_3 = [T]_{3 \leftarrow 2} [T]_{2 \leftarrow 1} [T]_{1 \leftarrow 0} \{r\}_0 \quad (1.72)$$

式中：

$$[T]_{1 \leftarrow 0} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

$$[T]_{2 \leftarrow 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\nu & \sin\nu \\ 0 & -\sin\nu & \cos\nu \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

$$[T]_{2 \leftarrow 2} = \begin{bmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma & 0 \\ -\sin\sigma & \cos\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

如果将式(1.72)写成

$$\{r\}_2 = [T]_{2 \leftarrow 0} \{r\}_0 \quad (1.76)$$

则

$$[T]_{2 \leftarrow 0} = [T]_{2 \leftarrow 1} [T]_{1 \leftarrow 0} \quad (1.77)$$

将式(1.73), (1.74)和(1.75)代入上式后得到

$$[T]_{2 \leftarrow 0} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\sigma - \sin\psi\cos\nu\sin\sigma & \sin\psi\cos\sigma + \cos\psi\cos\nu\sin\sigma & \sin\nu\sin\sigma \\ -\cos\psi\sin\sigma - \sin\psi\cos\nu\cos\sigma & -\sin\psi\sin\sigma + \cos\psi\cos\nu\cos\sigma & \sin\nu\cos\sigma \\ \sin\psi\sin\nu & -\cos\psi\sin\nu & \cos\nu \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

逆向变换的关系式是

$$\{r\}_0 = [T]_{0 \leftarrow 2} \{r\}_2$$

式中: $[T]_{0 \leftarrow 2} = [T]_{2 \leftarrow 0}^T$, 且

$$[T]_{0 \leftarrow 2} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\sigma - \sin\psi\cos\nu\sin\sigma & -\cos\psi\sin\sigma - \sin\psi\cos\nu\cos\sigma & \sin\psi\sin\nu \\ \sin\psi\cos\sigma + \cos\psi\cos\nu\sin\sigma & -\sin\psi\sin\sigma + \cos\psi\cos\nu\cos\sigma & -\cos\psi\sin\nu \\ \sin\nu\sin\sigma & \sin\nu\cos\sigma & \cos\nu \end{bmatrix}$$

1.11 角速度的坐标变换

我们经常要将转动体角速度 ω 的分量 ω_x , ω_y 和 ω_z 变换到欧拉速度 $\dot{\psi}$, $\dot{\nu}$ 和 $\dot{\sigma}$, 或者作相反的变换。先选取一正交坐标系, 它由节线 x_2 , 垂直方向的 y_2 及 z 轴组成(图 1-9), 即右旋正交坐标系 $C_{x_2 y_2 z_2}$ 。欧拉速度的投影如下: 在节线 x_2 上为 $\dot{\nu}$, 在 z 轴上为 $\dot{\psi}\cos\nu + \dot{\sigma}$, 在 y_2 轴上为 $\dot{\psi}\sin\nu$, 另外一种投影是向固定于转动体上的 ω 和 y 轴的投影(图 1-10)。由此可得到所要求的变换:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\nu\sin\sigma & \cos\sigma & 0 \\ \sin\nu\cos\sigma & -\sin\sigma & 0 \\ \cos\nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

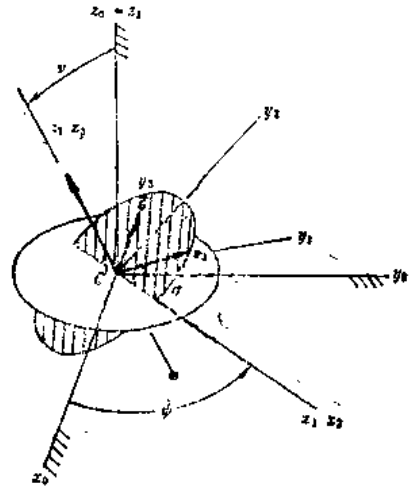


图1-8 坐标变换次序: 0→1通过角 ψ ; 1→2通过角 ν ; 2→3通过角 σ