卫星转动动力学

雷穆禄 郁永熙 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书介绍世界最新的卫星科学技术研究成果，从卫星动力学的基本原理出发，讨论卫星姿态动力学的有关基础理论，如惯性矩张量，坐标变换，欧拉定律，欧拉方程的应用等。并详细研究了重心和质心的关系，卫星摆动对稳定的影响，卫星结构变形对稳定性的影响，介绍了预测卫星稳定性的新的共线原理，自旋卫星的具体的稳定方法。在论述重要概念之后，用实际的例子来加深读者对概念的理解和应用。每章之末提供许多有关卫星的实用而有趣的习题，给读者在研究，教学和设计人造卫星和其他飞行器时应用。书末附有习题答案。

责任编辑　张泉宝
封面设计　刘　纬

卫 星 转 动 动 力 学

上海交通大学出版社・出版
（上海市华山路 1954 号　　邮政编码　200030）
新华书店上海发行所・发行
上海交通大学印刷厂・印刷
开本：787×1092(毫米)　1/16　　印张：　15　字数：371000
版次：1996 年 3 月　　第 1 版　　印次：1996 年 4 月　　第 1 次
印数：1—1500
ISBN7-313-01599-2/V・01　　　　定价：11.80 元

目　录

第一章　转动体动力学基础

本章阐述的转动体动力学的基本概念和理论，在以后各章中经常用到，其中最常用的是欧拉动量矩定律

$$\boldsymbol{M}=\dot{\boldsymbol{H}} \tag{1.1}$$

式中：$\boldsymbol{M}$为作用于转动体的外力矩，$\dot{\boldsymbol{H}}$是动量矩$\boldsymbol{H}$相对于时间的一阶导数。力矩$\boldsymbol{M}$和角动量$\boldsymbol{H}$应取相同的参考点。欧拉角动量定律是牛顿第二定律的一个补充。后者控制直线运动，而前者控制旋转运动。

1.1　动　量　矩

质量为m的有限尺寸物体的动量矩$\boldsymbol{H}$是一个向量

$$\boldsymbol{H}=\int_m \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}m \tag{1.2}$$

式中：$\boldsymbol{r}$是质量单元$\mathrm{d}m$的位置向量，$\dot{\boldsymbol{r}}$是该质量单元的速度(图1-1)。

对于任一刚体，如其惯量张量为

$$[I]=\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

其转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{e}_x\,\boldsymbol{e}_y\,\boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \tag{1.4}$$

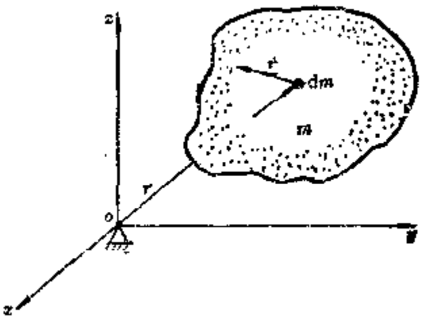

图1-1　质量单元的位置和速度

并成立 $\dot{\boldsymbol{r}}=\omega\times\boldsymbol{r}$，则动量矩成为

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \tag{1.5}$$

上式可简写为

$$\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{e}_i\}^{\mathrm{T}}[I_{ij}]\{\omega_j\} \tag{1.6}$$

动量矩的分量列矩阵为

$$\begin{bmatrix}H_x\\ H_y\\ H_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

或简写成

$$\{H_i\}=[I_{ij}]\{\omega_j\} \tag{1.8}$$

惯量张量$[I_{ij}]$将角速度$\{\omega_j\}$变换到动量矩$\{I_i\}$，即$I:\omega\to H$。

若坐标系原点在物体的质心C(图1-2a),则从式(1.6)得动量矩

$$\boldsymbol{H}_C=\{\boldsymbol{e}\}^T[I]\{\omega\}$$

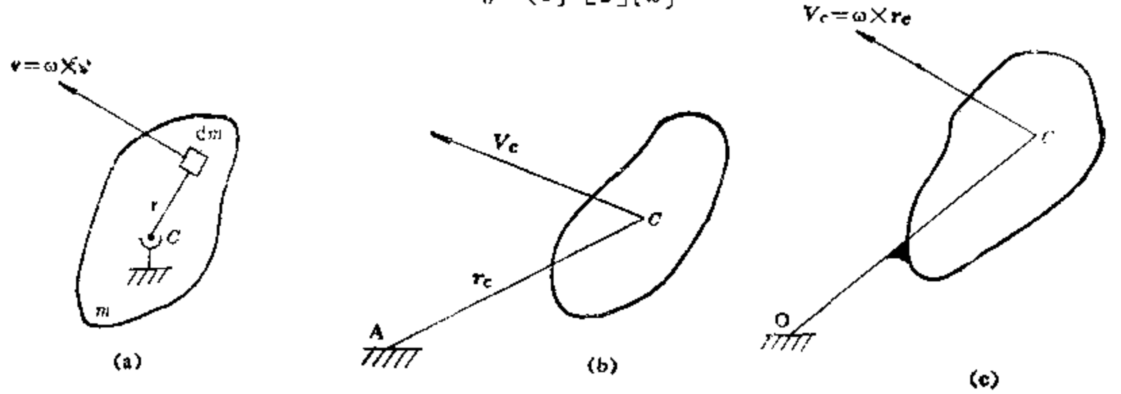

图1-2 (a) 相对于C点的角动量；(b) 相对于A点的角动量；(c) 相对于O点的角动量

但是，在转动体动力学中也要求计算相对于非质心点的动量矩。相对于非质心点A(图1-2b)的动量矩是

$$\boldsymbol{H}_A=\boldsymbol{H}_C+m\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_C \tag{1.9}$$

如果$\boldsymbol{r}_C$是固定于物体m上的直线(即$\ddot{\boldsymbol{r}}_C=0$),而$O$是在空间的一个固定点(图1.2c),则

$$\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{r}_C\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C) \tag{1.10}$$

因而

$$\boldsymbol{H}_0=\{\boldsymbol{e}\}^T[I]_O\{\omega\} \tag{1.11}$$

式中:$[I]_O$将由后面的式(1.37)定义。

1.2 动量矩的时间导数

如果取等式(1.6)的两边对时间的导数,则可得

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\{e_i\}^T[I_{ij}]\{\dot{\omega}_j\}+\{e_i\}^T[\dot{I}_{ij}]\{\omega_j\}+\{\dot{\boldsymbol{e}}_i\}^T[I_{ij}]\{\omega_j\} \tag{1.12}$$

上式等号右边前两项代表相对变化率(相对于所用的坐标系)。如果用$\mathring{H}$代表右边前两项，则得

$$\mathring{\boldsymbol{H}}=\{e_i\}^T[[I_{ij}]\{\dot{\omega}_j\}+[\dot{I}_{ij}]\{\omega_j\}] \tag{1.13}$$

式(1.12)右边第三项代表坐标框架的变化率,由坐标系本身的转动而引起,它可用下式表示

$$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{H}=\{\dot{e}_i\}^T[I_{ij}]\{\omega_j\} \tag{1.14}$$

式中： $\boldsymbol{\Omega}$ 是坐标系的角速度，它可等于也可不等于由式(1.4)给出的转动体角速度$\boldsymbol{\omega}$。将式(1.13)和(1.14)代入式(1.12)后可得

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\mathring{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{H} \tag{1.15}$$

上式也可用下面的方法求得：$\boldsymbol{H}$可以写成如下形式

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{e}_x\ \ \boldsymbol{e}_y\ \ \boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{bmatrix} \tag{1.16}$$

上式两边对时间取导数以后得

$$\dot{\boldsymbol{H}}=[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix}\dot{H}_x\\ \dot{H}_y\\ \dot{H}_z\end{bmatrix}+[\dot{\boldsymbol{e}}_x\ \dot{\boldsymbol{e}}_y\ \dot{\boldsymbol{e}}_z]\begin{bmatrix}H_x\\ H_y\\ H_z\end{bmatrix} \tag{1.17}$$

引入相对于xyz坐标系的相对速率

$$\mathring{\boldsymbol{H}}=[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix}\dot{H}_x\\ \dot{H}_y\\ \dot{H}_z\end{bmatrix} \tag{1.18}$$

及代表坐标系转动速度的矢量积

$$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{H}=[\dot{\boldsymbol{e}}_x\ \dot{\boldsymbol{e}}_y\ \dot{\boldsymbol{e}}_z]\begin{bmatrix}H_x\\ H_y\\ H_z\end{bmatrix} \tag{1.19}$$

然后将式(1.18)和(1.19)代入式(1.17)得到

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\mathring{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{H} \tag{1.20}$$

1.3 惯 量 张 量

张量

$$[I]=\begin{bmatrix}I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz}\end{bmatrix} \tag{1.21}$$

称为惯量张量。矩阵(1.21)中对角元素称为转动惯量或极惯性矩，其余元素称为惯性积、离心转动惯量或离心矩。

转动惯量定义为

$$I_{xx}=\int_m(y^2+z^2)\mathrm{d}m \tag{1.22}$$

$$I_{yy}=\int_m(z^2+x^2)\mathrm{d}m \tag{1.23}$$

$$I_{zz}=\int_m(x^2+y^2)\mathrm{d}m \tag{1.24}$$

惯性积定义为

$$I_{xy}=-\int_m xy\mathrm{d}m=I_{yx} \tag{1.25}$$

$$I_{yz}=-\int_m yz\mathrm{d}m=I_{zy} \tag{1.26}$$

$$I_{xz}=-\int_m xz\mathrm{d}m=I_{zx} \tag{1.27}$$

惯量张量中的每一个元素，均可写成以下三种形式之一：

$$I_{ij}=\int_m((x^2+y^2+z^2)\delta_{ij}-ij)\mathrm{d}m \tag{1.28}$$

$$I_{ij}=\int_m (r^2\delta_{ij}-ij)\mathrm{d}m \tag{1.29}$$

及

$$I_{ij}=\int_m (r_k r_k\delta_{ij}-r_i r_j)\mathrm{d}m \tag{1.30}$$

式中：i，j和 k 轮流等于x，y和 z；r_i 和 r_j 也轮流等于x，y和 z；当$i=j$时 $\delta_{ij}=1$，$i\neq j$ 时$\delta_{ij}=0$。

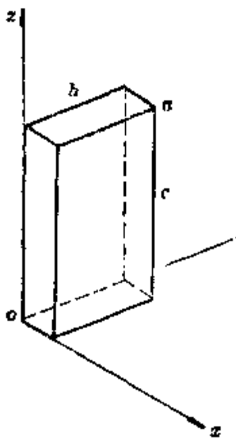

图1-3 平行六面体

下面用一平行六面体(图 1-3) 作为例子求惯量张量。该六面体用均质材料制成，其总质量为 m。相对于参考坐标系的惯量张量是

$$[I_{ij}]=m\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(b^2+c^2) & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{4}ac \\ -\frac{1}{4}ab & \frac{1}{3}(a^2+c^2) & -\frac{1}{4}bc \\ -\frac{1}{4}ac & -\frac{1}{4}bc & \frac{1}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

值得指出的是，惯性积的定义式(1.25)，(1.26)和(1.27)不是唯一的。例如，在某些文献中定义为

$$P_{xy}=\int_m xy\mathrm{d}m$$

$$P_{yz}=\int_m yz\mathrm{d}m$$

$$P_{xz}=\int_m xz\mathrm{d}m$$

如果采用这些定义，则惯量张量的形式为

$$[I]=\begin{bmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

如果所取的$Oxyz$坐标系使得惯性积的值为零，则称相应的x，y和 z 轴为主轴，此时的转动惯量称为主惯量或主惯性矩．在本书中分别用A，B和C表示。相应的惯量张量具有如下的形式

$$[I]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

根据式(1.22)，(1.23)和(1.24)可知

$$\int_m (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}m=\frac{1}{2}(I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}) \tag{1.34}$$

各转动惯量之间还存在如下的关系式

$$I_{xx}+I_{yy}\geqslant I_{zz} \tag{1.35a}$$

$$I_{yy}+I_{zz}\geqslant I_{xx} \tag{1.35b}$$

$$I_{zz}+I_{xx}\geqslant I_{yy} \tag{1.35c}$$

从以上关系式知道，当$I_{zz}=0$时，要求$I_{xx}=I_{yy}$。另外，如果I_{zz}是三个转动惯量中最大的一个及$I_{xx}=I_{yy}$，则要求$I_{zz}>I_{xx}=I_{yy}>\frac{1}{2}I_{zz}$。

由于$(y-z)^2\geqslant 0$，由此得$y^2+z^2\geqslant 2yz$。因此可以得到

$$I_{xx}\geqslant 2|I_{yz}| \tag{1.36a}$$

$$I_{yy}\geqslant 2|I_{xz}| \tag{1.36b}$$

$$I_{zz}\geqslant 2|I_{xy}| \tag{1.36c}$$

式(1.35)也适用于主惯量，所以

$$A+B\geqslant C$$
$$B+C\geqslant A$$
$$C+A\geqslant B$$

1.4 平行轴定理

由Huygens和Steniner首先提出的平行轴定理表述如下：若坐标系$Oxyz$平行于原点在质心C的坐标系$C\xi\eta\zeta$(图1-4)，则相对于坐标系$Oxyz$的惯量张量可以从下式求得为

$$[I]_O=[I]_C+m\begin{bmatrix}(\bar{y}^2+\bar{z}^2) & -\bar{x}\bar{y} & -\bar{x}\bar{z}\\ -\bar{x}\bar{y} & (\bar{z}^2+\bar{x}^2) & -\bar{y}\bar{z}\\ -\bar{x}\bar{z} & -\bar{y}\bar{z} & (\bar{x}^2+\bar{y}^2)\end{bmatrix} \tag{1.37}$$

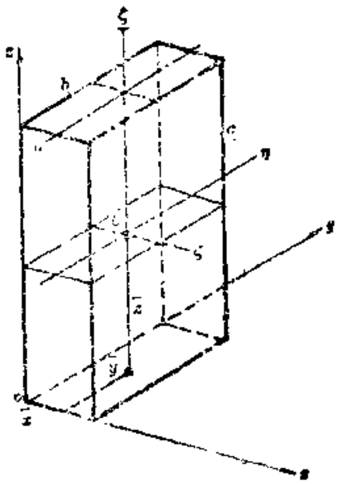

图1-4 坐标轴平行的两个坐标系统

作为例子，现在讨论图1-4上的平行六面体。相对于坐标系$C\xi\eta\zeta$的惯量张量为(参考附录D)

$$[I_C]=\begin{bmatrix}\frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}(c^2+a^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2)\end{bmatrix} \tag{1.38}$$

由于$\bar{x}=a/2$，$\bar{y}=b/2$及$\bar{z}=c/2$，则式(1.37)右边第二个矩阵成为

$$\begin{bmatrix}\frac{m}{4}(b^2+c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac\\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{4}(c^2+a^2) & -\frac{m}{4}bc\\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{4}(a^2+b^2)\end{bmatrix} \tag{1.39}$$

将式(1.38)右边的矩阵和式(1.39)相加,即可得到平行六面体相对于$Oxyz$坐标系的惯量张量为

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{3}(b^2+c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(c^2+a^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix} \tag{1.40}$$

1.5 主 惯 性 矩

参考坐标系转动后,相应的惯量张量$[I_{ij}]$可以变换成形式

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

即式(1.33)。主惯性矩可从求解特征方程

$$\det([I_{ij}]-\lambda[\delta_{ij}])=0 \tag{1.41}$$

得到。式(1.41)是λ的三次方程,所得到的特征值

$$\lambda_1=A$$
$$\lambda_2=B$$
$$\lambda_3=C$$

即为主惯性矩。

现在举例如下:设惯量张量为

$$[I_{ij}]=\begin{bmatrix} 20 & -2 & 0 \\ -2 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

特征方程式为

$$\begin{vmatrix} 20-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 30-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 40-\lambda \end{vmatrix}=0$$

由此得

$$(20-\lambda)(30-\lambda)(40-\lambda)-4(40-\lambda)=0$$

解上式得三个根:$\lambda_1=30.385$,$\lambda_2=19.615$和$\lambda_3=40$。因此主惯量张量为

$$\begin{bmatrix} 30.385 & 0 & 0 \\ 0 & 19.615 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

解下式可得主轴i的方向:

$$\begin{bmatrix} I_x-\lambda_i & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y-\lambda_i & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z-\lambda_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha_i \\ \cos\beta_i \\ \cos\gamma_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

所求的方向角余弦还必须满足

$$\cos^2\alpha_i+\cos^2\beta_i+\cos^2\gamma_i=1 \tag{1.43}$$

对于上面例子，求第一根主轴方向角的方程式为

$$\begin{bmatrix} 20-30.385 & -2 & 0 \\ -2 & 30-30.385 & 0 \\ 0 & 0 & 40-30.385 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此求得$\alpha_1=79.1°$，$\beta_1=169.1°$ 和$\gamma_1=90°$。用类似方法可求得第二根主轴的方向角 $\alpha_2=10.9°$，$\beta_2=79.1°$和$\gamma_2=90°$；第三根主轴的方向角$\alpha_3=90°$，$\beta_3=90°$和$\gamma_3=0°$。

1.6 动　　能

任何一个转动物体上任意质量单元dm的动能为

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}m\,|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 \tag{1.44}$$

当坐标系原点的速度为零时，质量单元dm的速度$\dot{\boldsymbol{r}}$(见图1-5)由下式给出：

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\omega\times\boldsymbol{r} \tag{1.45}$$

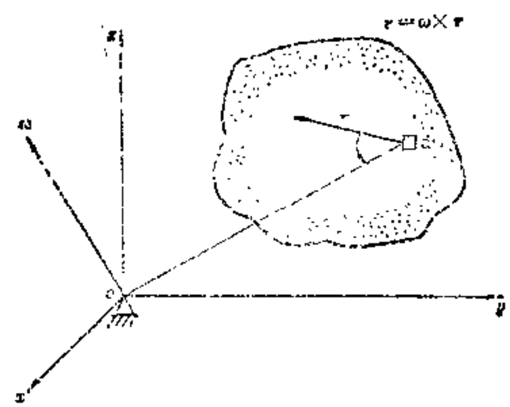

图1-5　纯转动时质量单元的位置和速度

整个转动体的动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_m|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|^2\mathrm{d}m \tag{1.46}$$

将式(1.46)积分后，得到相对于原点(不动点)O移动的物体的动能为

$$T=\frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2+I_{yy}\omega_y^2+I_{zz}\omega_z^2+2I_{xy}\omega_x\omega_y+2I_{xz}\omega_x\omega_z+2I_{yz}\omega_y\omega_z) \tag{1.47}$$

当坐标系$Oxyz$的坐标轴与转动体主轴重合时，则动能为

$$T=\frac{1}{2}(A\omega_x^2+B\omega_y^2+C\omega_z^2) \tag{1.48}$$

尺寸不变的转动体的动能,还可用角动量$\boldsymbol{H}$和角速度$\boldsymbol{\omega}$的点积表示,现推导于后。式(1.46)可以改写成

$$T=\frac{1}{2}\int_m \dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m \tag{1.49}$$

利用混合三重积等式 $\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})$,并注意到所有质量单元d$m$的角速度都是相同的,则可得到

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\int_m \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}m \tag{1.50}$$

上式右边的积分部分代表转动体相对于坐标原点O的角动量$\boldsymbol{H}$。因此,动能可以写成

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H} \tag{1.51}$$

最后,必须记住推导出上述动能公式的前题是:转动体的形状和大小均保持不变,同时组成转动体的各部分之间不能作相对运动(即$\dot{\boldsymbol{r}}=\mathring{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$中的 $\mathring{\boldsymbol{r}}=0$)。

由于$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{H}=\{\omega_i\}^T\{H_i\}=\{\omega_i\}^T[I_{ij}]\{\omega_j\}$,动能还可表示为

$$T=\frac{1}{2}\{\omega_k\}^T[I_{ij}]\{\omega_j\} \tag{1.52}$$

1.7 欧 拉 方 程

现在讨论在实际应用中很重要的一种情况:坐标系的原点与转动体的质心C相重合。坐标系$Cxyz$的角速度为$\boldsymbol{\Omega}$。

欧拉角动量定律表明,作用于转动体的力矩等于角动量相对于时间的导数,即

$$\boldsymbol{M}=\dot{\boldsymbol{H}} \tag{1.53}$$

将上式写成分量的形式为

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\dot{H})_x \\ (\dot{H})_y \\ (\dot{H})_z \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

在实际应用时还常写成

$$\dot{H}_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_x=(H_x)^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{1.55}$$

即$\dot{H}_x$代表角动量$\boldsymbol{H}$在x坐标上分量H_x的时间导数。为了区分$\dot{\boldsymbol{H}}$的x坐标上分量与$\boldsymbol{H}$的x坐标上分量的时间导数,必须将$\dot{\boldsymbol{H}}$的x坐标上的分量写成

$$\boldsymbol{e}_x(\dot{H})_x=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}\right)_x \tag{1.56}$$

正如在式(1.[illegible])中的一样。

对于转动的坐标系,在

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\mathring{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{H} \tag{1.57}$$

中包含相对变化率

$$\mathring{\boldsymbol{H}} = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

及坐标框架引起的变化率

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \tag{1.59}$$

解方程式(1.57)可得

$$\begin{bmatrix} (\dot{H})_x \\ (\dot{H})_y \\ (\dot{H})_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{H}_x + \Omega_y H_z - \Omega_z H_y \\ \dot{H}_y + \Omega_z H_x - \Omega_x H_z \\ \dot{H}_z + \Omega_x H_y - \Omega_y H_x \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

将式(1.60)代入式(1.54)后可得三个欧拉方程

$$M_x = \dot{H}_x + \Omega_y H_z - \Omega_z H_y \tag{1.61}$$

$$M_y = \dot{H}_y + \Omega_z H_x - \Omega_x H_z \tag{1.62}$$

$$M_z = \dot{H}_z + \Omega_x H_y - \Omega_y H_x \tag{1.63}$$

1.8 用于主轴的欧拉方程

在许多实际应用中,坐标系不仅固定于转动体上,而且坐标轴与转动体的主轴相重合。在这种情况下,坐标系的角速度与转动体的角速度相等,即

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \tag{1.64}$$

同时,转动体的惯量张量为

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \tag{1.65}$$

角动量为

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix} A\omega_x \\ B\omega_y \\ C\omega_z \end{bmatrix} \tag{1.66}$$

相对变化率成为

$$\mathring{\boldsymbol{H}} = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix} A\dot{\omega}_x \\ B\dot{\omega}_y \\ C\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \tag{1.67}$$

欧拉方程具有如下形式

$$M_x = A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z \tag{1.68}$$

$$M_y = B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x \tag{1.69}$$

$$M_z = C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y \tag{1.70}$$

1.9 欧 拉 角

为了确定转动体在绝对空间中的姿态，必须要用到三个角坐标，即所谓欧拉角（见附录A和B）。许多作者用不同的转动次序及不同的符号表示这些欧拉角，因此在文献中是不统一的。本书用如下符号表示欧拉角：ψ代表进动角，ν代表章动角和σ代表自旋角。

在图1-6上转动体的姿态$\psi=0,\nu=0$和$\sigma=0$。在图1-7上的姿态角 ψ,ν 和 σ 均不等于零。坐标系$CXYZ$固定于空间，而坐标系$Cxyz$固定于转动体上。直线x_2代表xy平面和XY平面的交线，并称为节线。欧拉角对时间的导数称为欧拉速度（或欧拉频率）。$\dot{\psi}$称为进动速度，$\dot{\nu}$称

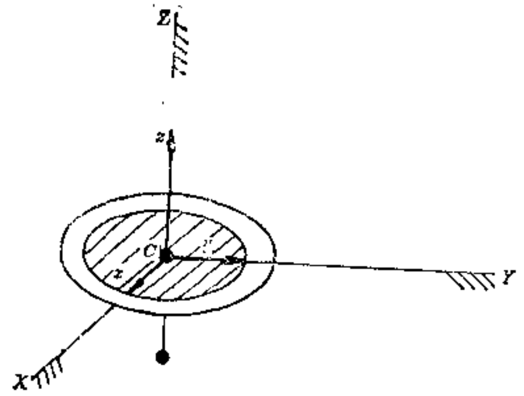

图1-6 位于参考平面中的圆盘形转动体

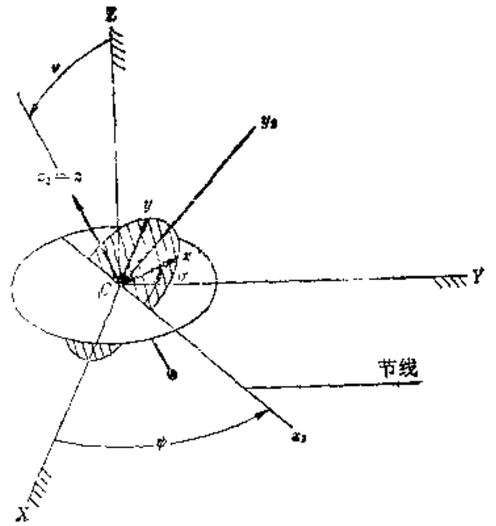

图1-7 圆盘形转动体的位置：章动角ν，进动角ψ，自旋角σ

为章动速度；$\dot{\sigma}$称为自旋速度。这里所用的术语都是古典力学中的术语。工程技术人员常将不受外力矩作用的转动体（以后简称无力矩转动体）自身产生的速度称为章动速度，而外力矩产生的速度称为进动速度。本书不采用这种表示法。

1.10 坐标变换

从坐标系 0（即$Cx_0y_0z_0$）变换到坐标系 1（即$Cx_1y_1z_1$）的任何坐标变换都根据下式进行

$$\{r\}_1=[T]_{1\leftarrow0}\{r\}_0 \tag{1.71}$$

若作三次连续的变换（图1-8），可得

$$\{r\}_3=[T]_{3\leftarrow2}[T]_{2\leftarrow1}[T]_{1\leftarrow0}\{r\}_0 \tag{1.72}$$

式中：

$$[T]_{1\leftarrow 0}=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.73}$$

$$[T]_{2\leftarrow 1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\nu & \sin\nu\\ 0 & -\sin\nu & \cos\nu\end{bmatrix} \tag{1.74}$$

$$[T]_{3\leftarrow 2}=\begin{bmatrix}\cos\sigma & \sin\sigma & 0\\ -\sin\sigma & \cos\sigma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.75}$$

如果将式(1.72)写成

$$\{r\}_3=[T]_{3\leftarrow 0}\{r\}_0 \tag{1.76}$$

则

$$[T]_{3\leftarrow 0}=[T]_{3\leftarrow 2}[T]_{2\leftarrow 1}[T]_{1\leftarrow 0} \tag{1.77}$$

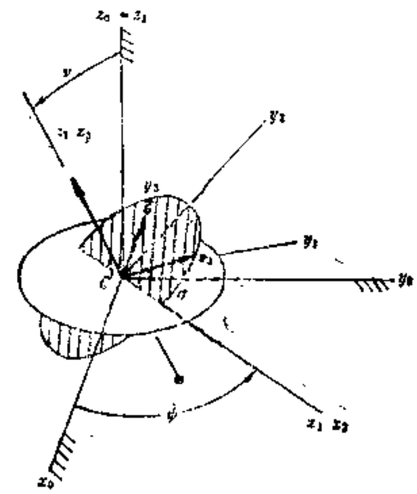

图1-8 坐标变换次序：0→1通过角ψ；1→2通过角ν；2→3通过角σ

将式(1.73)，(1.74)和(1.75)代入上式后得到

$$[T]_{3\leftarrow 0}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\sigma-\sin\psi\cos\nu\sin\sigma & \sin\psi\cos\sigma+\cos\psi\cos\nu\sin\sigma & \sin\nu\sin\sigma\\ -\cos\psi\sin\sigma-\sin\psi\cos\nu\cos\sigma & -\sin\psi\sin\sigma+\cos\psi\cos\nu\cos\sigma & \sin\nu\cos\sigma\\ \sin\psi\sin\nu & -\cos\psi\sin\nu & \cos\nu\end{bmatrix} \tag{1.78}$$

逆向变换的关系式是

$$\{r\}_0=[T]_{0\leftarrow 3}\{r\}_3$$

式中：$[T]_{0\leftarrow 3}=[T]^T_{3\leftarrow 0}$，且

$$[T]_{0\leftarrow 3}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\sigma-\sin\psi\cos\nu\sin\sigma & -\cos\psi\sin\sigma-\sin\psi\cos\nu\cos\sigma & \sin\psi\sin\nu\\ \sin\psi\cos\sigma+\cos\psi\cos\nu\sin\sigma & -\sin\psi\sin\sigma+\cos\psi\cos\nu\cos\sigma & -\cos\psi\sin\nu\\ \sin\nu\sin\sigma & \sin\nu\cos\sigma & \cos\nu\end{bmatrix}$$

1.11 角速度的坐标变换

我们经常要将转动体角速度ω的分量ω_x，ω_y和ω_z变换到欧拉速度$\dot{\psi}$，$\dot{\nu}$和$\dot{\sigma}$，或者作相反的变换。先选取一正交坐标系，它由节线x_2，垂直方向的y_2及z轴组成(图1-9)，即右旋正交坐标系$Cx_2y_2z_2$。欧拉速度的投影如下：在节线x_2上为$\dot{\nu}$，在z轴上为$\dot{\psi}\cos\nu+\dot{\sigma}$，在$y_2$轴上为$\dot{\psi}\sin\nu$，另外一种投影是向固定于转动体上的$x$和$y$轴的投影(图1-10)。由此可得到所要求的变换：

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\nu\sin\sigma & \cos\sigma & 0\\ \sin\nu\cos\sigma & -\sin\sigma & 0\\ \cos\nu & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\nu}\\ \dot{\sigma}\end{bmatrix} \tag{1.79}$$