綫性算子与逼近論

帕·彼·柯罗夫金著

高等教育出版社

51.635
N9

綫性算子与逼近論

帕·伎·柯罗夫金著
郑 維 行 譯

高等教育出版社

本书是根据苏联国立物理数学出版社（Физматгиз）1959年出版的帕·彼·柯罗夫金（П. П. Коровкин）著“綫性算子与逼近論”（Линейные операторы и теория приближений）譯出的。

本书內容与其他逼近論方面的名著（例如：В. Л. 岡查罗夫的“內插法与逼近論”；И. П. 納唐松的“函数构造論”）不同。著者从泛函分析的观点来討論函数构造理論的某些問題，系統地引进了綫性正算子的概念。全书說理淺近，讀者不需要有綫性算子方面的預备知識。书中詳尽地討論了用多項式逼近函数的理論（杰克生和白恩斯坦等定理），函数用綫性正算子逼近的阶的求法，并討論了非正的綫性連續多項式算子。最后两章闡述了傅立叶級数和內插理論。在某些章的后面，附有习題，帮助讀者更好地了解这一学科。

綫性算子与逼近論

帕·彼·柯罗夫金著

郑 維 行 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印装 新华书店发行

統一书号 13010·752 开本 850×1168 1/32 印张 6 4/16

字数 148,000 印数 0001—6,500 定价（8）¥ 0.80

1960年3月第1版 1960年3月北京第1次印刷

序　言

逼近論与其他数学分支有着密切的联系。这可以用下列事实来說明：在其他数学分支的发展过程中提出并解决了逼近論的一些重要問題，并且相反地，逼近論的发展又促进了其他数学分支的发展，而有时竟确定了数学中完全新的方向的出現。

逼近論与泛函分析的联系尤为紧密。其实，所有用代数多項式或三角多項式（泰勒級数部分和，內插多項式，白恩斯坦多項式与郎道多項式，傅立叶級数部分和，費叶尔和及其他）来逼近函数的众所周知的工具都是些綫性算子。換句話說，若 $L(f;x)$ 为上面所列举的逼近工具之一的值，則

$$L(af+b\varphi;x)=aL(f;x)+bL(\varphi;x),$$

其中 a 与 b 为任何实数，而 $f(t)$ 与 $\varphi(t)$ 为属于算子 $L(f;x)$ 存在域的函数。

这些众所周知的逼近工具具有如此重要的一般性质，自然向我們启示，可以与研究泛函分析某些概念同时来研究逼近理論。

这种观点的系統引进使得本书有别于关于逼近理論的其他名著（B. Л. 崗査罗夫，“內插法与逼近論”；И. П. 納唐松，“函数构造論”）。

对有关的每一已知的綫性多項式算子序列 $\{L_n(f;x)\}$（如果算子 $L_n(f;x)$ 的值对于任何連續函数 $f(t)$ 都是不超过 n 次的代数多項式或三角多項式，則称这算子为多項式算子）应解决下列两个問題。

1. 如果 $f(x)$ 在代数的情形时是区間 $[a,b]$ 上的任何連續函数，而在三角的情形时是以 2π 为周期的任何連續函数，那么序

列 $L_n(f;x)$ 是否一致收斂于 $f(x)$？

2. 如果一致收斂性成立，那么差

$$L_n(f;x)-f(x)$$

收斂于零的速度如何？

在每一具体場合，若綫性算子序列收斂的条件已知，那么給出第一問題的答案就容易了。当序列中一切算子均为正算子情形这样的条件尤为簡单。对于这样的算子序列也容易对第二問題給出答案来。

正因如此我們从說明綫性正算子序列收斂条件开始进行逼近理論的叙述并且研究它的那些問題，在这些問題解决的基础上来利用这个或那个正多項式綫性算子序列。这样的問題有：关于函数用多項式一致逼近的外尔斯特拉斯定理（第一章），关于函数用多項式的最佳逼近的杰克生定理（第二章），关于具所給最佳逼近序列的函数的可微性質的白恩斯坦定理（第三章）。

但是，作为解决逼近論重要問題的良好輔助工具的綫性正多項式算子不能看成解决逼近論的一个基本問題——实际作出多項式算子序列使其所給逼近的阶与最佳逼近相同的工具。在第四章中将証明，綫性正多項式算子 $L_n(f;\ x)$ 所給逼近的阶甚至对于解析函数也不高于 $\frac{1}{n^2}$。

然而，对多項式綫性算子序列若不用正性能否給出逼近論基本問題的解呢？C. M. 洛辛斯基与 Ф. И. 哈尔舍拉杰曾建立了那样的定理，指出这样的序列不存在。除了这些定理以外，在第五章中我們还詳細地討論瓦勒布松算子。

在第六章与第七章中研究了那些多項式算子序列（傅立叶級数部分和与内插多項式），它們的范是无限增大的。

本书是为了拟初步熟悉逼近論的讀者而編写的，因而作者十分惋惜地放弃了这一分支的很多有趣問題甚至是其整个章节的叙

述①。例如，这里未考虑直交多项式理論，它的系統研究在我国首先由П. Л. 切彼曉夫(实变数場合)与B. И. 斯米尔諾夫(复变数場合)开始的。

C. M. 洛辛斯基与 И. П. 納唐松教授为了使本书增色曾細心地校閱了手稿并提出了一系列宝貴的意見，謹向他們表示我的深切謝意。

作者感謝編輯 B. C. 維金斯基对本书叙述上所提的許多宝貴意見。

最后，特别要向对作者这一工作寄予莫大关怀的我的老师 B. И. 斯米尔諾夫致謝。

帕·柯罗夫金

① 如果讀者对本书所未講到的某些問題感到兴趣的話，除了已經提出的 B. Л. 岡查罗夫与 И. П. 納唐松的著作以外，我們还推荐 Н. И. 阿希澤尔的著作"逼近論講义"(譯者按：这三本书均有科学出版社出版的中譯本)。

目 录

第一章　綫性正泛函数与綫性正算子

§1. 綫性正泛函数

对于經常变化着的与相互依賴着的自然界的現象的研究引导出現代数学中最重要的概念——变量与函数。

函数是什么呢？

如果对实数 x 所成的集 X 的每一值 x 都有一实数 y 与之相应，$y=f(x)$，則說在集 X 上确定了函数 $f(x)$。換句話說，如果 1)給出了某个实数 x 的集 X，2)指出这样的一个规律，按照它由集 X 中的每一数 x 都相应于一个实数 y，$y=f(x)$，那么，函数便給定了。

現在我們考慮某些对函数所作的运算，它們給我們导出泛函数概念。

1. 令 $M(f)=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$。在量 $M(f)$ 与函数之間有什么共同之处，又有什么不同之处？

量 $M(f)$ 不是独立变量。例如，如果 $f_1(x)=x+1$，而 $f_2(x)==x^2+6$，則 $M(f_1)=2$，$M(f_2)=7$。函数也不是独立变量。量 $M(f)$ 与函数之間的不同点不是很实質的：不同之处就在于这些量的变元的性質相异。点（数）是函数的变元，在区間$[0,1]$上的有界函数是量 $M(f)$ 的变元。在区間$[0,1]$上有界的函数 $f(x)$ 所成的集 F 是量 $M(f)$ 的存在域。

2. 設 $\psi(x)$ 是在区間$[a,b]$上的連續函数。令

$$I(f)=\int_a^b f(x)\psi(x)dx.$$

量 $I(f)$，其值依賴于 $f(x)$（$\psi(x)$ 是固定的函数），是确定于在区間$[a,b]$上可积的函数 $f(x)$ 所成的集 F 上。把这些例子一般化，我們来引进泛函数概念。

定义　如果对給定集 F 的每一函数 $f(x)$，$f(x) \in F$，都有一个实数 Φ 与之相应，$\Phi=\Phi(f)$，則我們說在函数 $f(x)$ 所成的集 F 上定义了一个泛函数 $\Phi(f)$。集 F 称为泛函数的存在域。

附注　由这一定义推出，泛函数与函数之間的不同点只在于这些量的存在域不同：点集为函数的存在域，函数集为泛函数的存在域。这两个概念之間的其他区别是沒有的。正因为如此，就常常毋須乎运用新的术語"泛函数"，而說确定在函数 $f(x)$ 所成的集 F 上的函数。

定义　泛函数 $\Phi(f)$ 称为綫性的，如果当函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都属于它的存在域时 $af(x)+b\varphi(x)$ 亦然，并且等式

$$\Phi(af+b\varphi)=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)$$

成立，其中 a, b 为任何两个实数。

1.　$\Phi(f)=Af(\alpha)$.

泛函数 $\Phi(f)$ 在那些于点 $x=\alpha$ 有定义的函数 $f(x)$ 所成的集 F 上有意义。它的綫性可由下列等式推得：

$$\Phi(af+b\varphi)=A[af(\alpha)+b\varphi(\alpha)]=aAf(\alpha)+bA\varphi(\alpha)=$$
$$=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi).$$

2.　$\Phi(f)=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+\cdots\cdots+A_nf(x_n)=$

$$=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k).$$

泛函数 $\Phi(f)$ 在那些于諸点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 上有定义的函数 $f(x)$ 所成的集 F 上有意义。由等式

$$\Phi(af+b\varphi)=\sum_{k=1}^{n}A_k[af(x_k)+b\varphi(x_k)]=a\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)+$$
$$+b\sum_{k=1}^{n}A_k\varphi(x_k)=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)$$

推出其綫性。

3. $\Phi(f)=\int_c^d f(x)\psi(x)dx,$

这里 $\psi(x)$ 为在区間 $[c,d]$ 上的連續函数。泛函数的綫性可由等式

$$\Phi(af+b\varphi)=\int_c^d[af(x)+b\varphi(x)]\psi(x)dx=a\int_c^d f(x)\psi(x)dx+$$

$$+b\int_c^d\varphi(x)\psi(x)dx=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)$$

推得。

定义 如果对于每一正函数 $f(x)$（称不取負值的函数为正函数）都有 $\Phi(f)\geqslant 0$，則称綫性泛函数 $\Phi(f)$ 为正的。

容易看出，綫性正泛函数 $\Phi(f)$ 的值当其变元增大时不减小。其实，若 $f_1(x)\geqslant f_2(x)$，則 $f_1(x)-f_2(x)\geqslant 0$，所以

$$0\leqslant\Phi(f_1-f_2)=\Phi(f_1)-\Phi(f_2)\text{ 且 }\Phi(f_1)\geqslant\Phi(f_2).$$

由于这一情况我們可以称綫性正泛函数为单調增大的。

例

1. 泛函数 $\Phi(f)=Af(a)$ 是正的，如果 $A\geqslant 0$。

2. 泛函数 $\Phi(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$ 是正的只当 $A_k\geqslant 0$ 时，$k=1,2,\cdots\cdots,n$。

其实，若 $A_k\geqslant 0$, $k=1,2,\cdots\cdots,n$，且 $f(x)\geqslant 0$，則

$$\Phi(f)=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)\geqslant 0.$$

如果，例如，$A_1<0$，則令 $f(x_1)=1$ 与 $f(x)=0$，$x\neq x_1$，便得到 $\Phi(f)=A_1<0$，虽然 $f(x)$ 是正函数。

3. 泛函数 $\Phi(f)=\int_a^b f(x)\psi(x)dx$ 是正的，这里 $\psi(x)$ 是在区間

$[a,b]$上的連續函数，只当在这区間上 $\psi(x)\geqslant 0$ 时。

其实，若 $\psi(x_0)<0$，$a\leqslant x_0\leqslant b$，則由于 $\psi(x)$ 是連續的，就可以找到区間 $a\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta\leqslant b$，$\alpha<\beta$，于其上 $\psi(x)$ 是負的。現在令

$$f(x)=\begin{cases}1, & \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\\ 0, & x<\alpha;\quad x>\beta,\end{cases}$$

就得到

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)\psi(x)dx=\int_\alpha^\beta \psi(x)dx<0,$$

虽然 $f(x)$ 是正函数。

現在我們来研究綫性正泛函数序列 $\{\Phi_n(f)\}$ 的收斂性，并且使我們感兴趣的是那样的条件，当它們滿足时等式

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha), \tag{1}$$

例如，对于一切于点 $x=\alpha$ 連續并在实軸上有界的函数成立。自然，这些条件的性質可以有极大的差异。我們将在(1)对某些极簡单的函数滿足的前提下，来找使(1)对一切于点 $x=\alpha$ 連續的函数成立的条件。

定理 1（**柯罗夫金**）　若对于綫性正泛函数 $\Phi_n(f)$ 下列两条件滿足：

$$\Phi_n(1)\to 1,\quad \Phi_n(\psi)\to 0\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}, \tag{2}$$

其中 $\psi(x)=(x-\alpha)^2$，則对于任何于点 $x=\alpha$ 連續且在实軸上有界的函数 $f(x)$ 都有①

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha). \tag{3}$$

---

① 定理1—4的証明思路与 С. Н. 白恩斯坦曾借助于概率論用以証明外尔斯特拉斯定理时所应用的思路相似。不等式(6)对应于古典的切彼曉夫不等式(原編者注)。关于这些定理，可参看П.П. Коровкин 的論文 О сходимости лeнейных положительных опeратров в пространстве нипрерывных функций, ДАН СССР, 1953, 90, No. 6, 961—964——譯者注。

附注 这里应假定函数 $f(x)$ 属于序列中一切泛函数的定义域，虽然在定理中并未說明这一点。函数 $f(x)\equiv 1$ 与 $\psi(x)=(x-\alpha)^2$ 都属于这些存在域，虽然后者在实軸上是无界的。

这一附注不仅对这里而且对下面的所有定理都适用。在下面的所有定理叙述中我們也假定那里所提的量存在。但为了叙述简便起見以后我們将不再說明这一点。

証 首先根据对函数 $f(x)$ 所予条件可得两个不等式。据函数 $f(x)$ 的有界性，$-M<f(x)<M$，得到

$$-2M<f(x)-f(\alpha)<2M, \text{对于一切 } x. \tag{4}$$

据函数在点 $x=\alpha$ 的連續性，得到

$$-\varepsilon<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon, \quad \text{当 } |x-\alpha|<\delta \text{ 时。} \tag{5}$$

由这些不等式将推得不等式

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\delta^2}\psi(x)<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\psi(x), \text{对于一切 } x. \tag{6}$$

其实，若 $|x-\alpha|<\delta$，則由(5)推出(6)，这是由于 $\psi(x)=(x-\alpha)^2\geqslant\geqslant 0$；若 $|x-\alpha|\geqslant\delta$，則

$$\frac{2M}{\delta^2}\psi(x)\geqslant\frac{2M}{\delta^2}\delta^2=2M,$$

因而由(4)推出(6)，这是由于 $\varepsilon>0$。

現在，利用不等式(6)以及綫性正泛函数的单調性，得到

$$-\varepsilon\Phi_n(1)-\frac{2M}{\delta^2}\Phi_n(\psi)\leqslant\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)\leqslant\varepsilon\Phi_n(1)+$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\Phi_n(\psi). \tag{7}$$

据条件(2)上述不等式右边趋于 ε 而左边趋于 $-\varepsilon$。由此可以求出这样的序标 $N(\varepsilon)$，使不等式

$$-2\varepsilon<\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)<2\varepsilon$$

对于一切 $n>N(\varepsilon)$ 都成立。由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以 $\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)=\gamma_n\to 0$。最后，由于 $\Phi_n(1)\to 1$，所以 $\Phi_n(f)=f(\alpha)\Phi_n(1)+\gamma_n\to f(\alpha)$.

推論　若对于綫性正泛函数序列 $\Phi_n(f)$ 下列三条件满足:

$$\Phi_n(1)\to 1,\quad \Phi_n(x)\to\alpha,\quad \Phi_n(x^2)\to\alpha^2, \tag{8}$$

則对于任何在实軸上有界并于点 $x=\alpha$ 連續的函数 $f(x)$，序列 $\Phi_n(f)$ 收斂于 $f(\alpha)$。

証　令

$$\psi(x)=(x-\alpha)^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2.$$

由(8)推出

$$\Phi_n(\psi)=\Phi_n(x^2)-2\alpha\Phi_n(x)+\alpha^2\Phi_n(1)\to\alpha^2-2\alpha\cdot\alpha+\alpha^2\cdot 1=0,$$

亦即满足定理 1 的条件，从而得出这个推論。

定理 2（柯罗夫金）　若对于綫性正泛函数序列 $\Phi_n(f)$ 下列两条件满足:

$$\Phi_n(1)\to 1,\quad \Phi_n(\psi)\to 0, \tag{9}$$

其中 $\psi(x)=\sin\dfrac{x-\alpha}{2}$，則如果 $f(x)$ 有周期 2π，于点 $x=\alpha$ 連續且是有界函数;

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha).$$

証　由于 $f(x)$ 满足定理 1 中条件，故不等式(4)与(5)，亦即

$$-2M<f(x)-f(\alpha)<2M \text{ 对于一切 } x, \tag{4}$$

$$-\varepsilon<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon \text{ 对于 } |x-\alpha|<\delta \tag{5}$$

成立。現在取一个长为 2π 的半开区間 $\alpha-\delta<x\leqslant 2\pi+\alpha-\delta$。在这半开区間上不等式

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x)<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x) \tag{10}$$

成立。其实，若$|x-\alpha|<\delta$，则因$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}\geqslant 0$，由不等式(5)便推出不等式(10)。若$\delta\leqslant x-\alpha\leqslant 2\pi-\delta$，则$\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{x-\alpha}{2}\leqslant\pi-\frac{\delta}{2}$，因而 $\sin\frac{x-\alpha}{2}\geqslant\sin\frac{\delta}{2}$，$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}\geqslant\sin^2\frac{\delta}{2}$，$\frac{2M\psi(x)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\geqslant$ $\geqslant 2M$，于是由于$\varepsilon>0$由不等式(4)推出不等式(10)。

于是，借以証明定理的不等式(10)，暂时还不是对一切x而只是对长为2π的半开区間$(\alpha-\delta, 2\pi+\alpha-\delta]$中的$x$被建立了。

为要断定这些不等式对一切x都正确，我們指出，函数

$$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}=\frac{1-\cos(x-\alpha)}{2}$$

有周期2π，且据定理条件，$f(x)$也有周期2π，亦即

$$\psi(x+2k\pi)=\psi(x),\quad f(x+2k\pi)=f(x),$$
$$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots$$

据此由不等式(10)得到

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x+2k\pi)\leqslant f(x+2k\pi)-f(\alpha)\leqslant\varepsilon+$$
$$+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(x+2k\pi). \tag{11}$$

但如果x在半开区間$(\alpha-\delta,\ 2\pi+\alpha-\delta]$中变动时则$x+2\pi$便在半开区間$(2\pi+\alpha-\delta,\ 4\pi+\alpha-\delta]$中变动，$x+4\pi$便在$(4\pi+\alpha-\delta, 6\pi+\alpha-\delta]$中变动，一般地，$x+2k\pi$便在半开区間

$$(2k\pi+\alpha-\delta, 2k\pi+2\pi+\alpha-\delta],\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

中变动，这些半开区間全体复盖整个实軸无遺，因而由(11)推知对每一半开区間都成立的不等式(10)，对于一切x都成立获証。

現在已容易証明定理。其实，利用不等式(10)与泛函数$\Phi_n(f)$

的单調性，便得到

$$-\varepsilon\Phi_n(1)-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Phi_n(\psi)\leqslant\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\Phi_n(1)+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Phi_n(\psi).$$

根据关系式(9)上述不等式右边趋于 ε 而左边趋于 $-\varepsilon$。因而可以求出这样的序标 $N(\varepsilon)$，使不等式

$$-2\varepsilon<\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)<2\varepsilon$$

对于一切 $n>N(\varepsilon)$ 都成立。由于 ε 是任意的，所以 $\Phi_n(f)-f(\alpha)\Phi_n(1)=\gamma_n\to0$，

$$\Phi_n(f)=f(\alpha)\Phi_n(1)+\gamma_n\to f(\alpha).$$

推論 若对于綫性正泛函数序列下列三条件满足:

$$\Phi_n(1)\to1,\ \Phi_n(\cos x)\to\cos\alpha,\ \Phi_n(\sin x)\to\sin\alpha, \tag{12}$$

則如果周期函数 $f(x)$ 于点 $x=\alpha$ 連續且有界，

$$\Phi_n(f)\to f(\alpha).$$

証 令

$$\psi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}=\frac{1-\cos(x-\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x).$$

据(12)以及泛函数 $\Phi_n(f)$ 的綫性有

$$\Phi_n(\psi)=\frac{1}{2}\{\Phi_n(1)-\cos\alpha\Phi_n(\cos x)-\sin\alpha\Phi_n(\sin x)\}$$

$$\to\frac{1}{2}(1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$

亦卽定理 2 的条件满足，从而便得出这一推論。

§2. 綫性正算子

我們由例子开始，从它們来引出与函数概念相近的算子概念。設 $u_1(x)$，$u_2(x)$，……，$u_n(x)$为給定在集 E 上的函数并設 t_1，t_2，……，t_n 为实数。令

$$H(f;x)=H(f(t);x)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)u_k(x)=\varphi(x).$$

用上面的等式，对每一确定在点集 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n$ 上的函数 $f(t)$都建立了相应的一个函数 $\varphi(x)=H(f;x)$。

定义 我們說，在函数$f(t)$所成的集F上給定了算子$H(f;x)=H(f(t);x)$，如果对集 F 中每一函数 $f(t)$都有一个函数 $\varphi(x)$，$\varphi(x)=H(f;x)$与之相应的話。

附注 算子与函数的差别在于，这些量具有不同的存在域与不同的变化域：函数的存在域与变化域为数集，而算子的存在域与变化域为函数集。

定义 算子 $L(f;x)$称为綫性的，如果随着 $f(t)$与 $\varphi(t)$属于它的存在域，$af(t)+b\varphi(t)$也属于它的存在域并且等式

$$L(af+b\varphi;x)=aL(f;x)+bL(\varphi;x)$$

成立的話，其中 a 与 b 为任何两个实数。

例

1. 設 $u_1(x), u_2(x), \cdots\cdots, u_n(x)$为定义于集$E$上的函数。令

$$L(f;x)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)u_k(x).$$

我們有

$$L(af+b\varphi;\ x)=\sum_{k=1}^{n}(af(t_k)+b\varphi(t_k))u_k(x)=$$