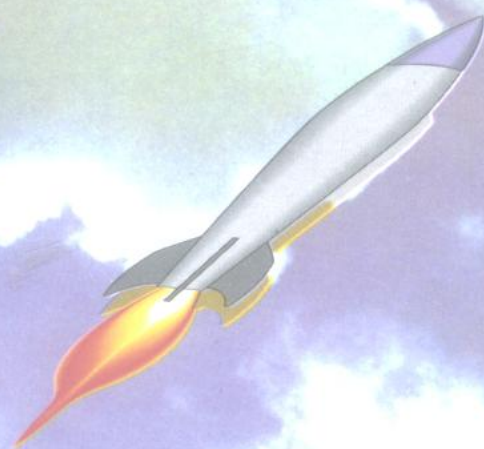


现代控制理论

● 于长官 主编



● 哈尔滨工业大学出版社

2271
777
(2)

现代控制理论

于长官 主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了现代控制理论的基本内容,包括控制系统的状态空间描述、运动分析与离散化、李亚普诺夫稳定性分析、能控性与能观测性、状态反馈与状态观测器、最优控制系统设计、卡尔曼滤波及自适应控制系统设计。每章配有一定例题,并附有给出答案的习题。

本书可作为非自动控制专业研究生的教材,也可供有关科技人员参考。

11/20/06

现代控制理论

Xiandai Kongzhi Lilun

于长官 主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

黑龙江大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 14 字数 357 千字

1997 年 7 月第 2 版 1997 年 7 月第 3 次印刷

印数 13 000—18 000

ISBN 7-5603-0421-4/TP·36 定价 16.50 元

前 言

60年代迅速发展起来的现代控制理论,解决了导弹制导、宇宙航引等领域中的一些高精度控制问题,在计算机应用空前发展的今天,它已广泛应用于工农业生产、交通运输及国民经济的各个部门。现代控制理论及其应用正越来越为广大工程技术人员所重视。

本书虽再版二次,并为不少高等学校用作现代控制理论课程的教材和工程人员的自学用书,得到读者的良好反映,但随着科学技术的发展及教学改革的要求,该书仍有不适应之处,为此我们又重编了现代控制理论。重编的现代控制理论,前七章以原书内容为背景,具体编写中做了大幅度修改,保留并增强了主要部分,删掉了次要部分,同时,增加与突出了对线性定常单输入-单输出系统的分析与设计方法,将古典控制理论与现代控制理论有机地联系起来;重编的现代控制理论,对第八章自适应控制进行了全新的编写,去掉了辨识,重点介绍与展开模型参考自适应控制,使这部分的教学具体化;重编的现代控制理论,在编写思路,完全从教学角度出发,使之具有鲜明的教学特点与自学特点,增加了本书的可操作性,便于教师,尤其是年轻教师,在教学时使用,而对广大读者来说,更具有可实施性。

本书以单输入-单输出线性定常系统为基本背景,介绍现代控制理论的基本内容与问题。第一章,介绍线性控制系统的状态空间描述;第二章,介绍线性控制系统运动与离散化;第三章,介绍控制系统的李亚普诺夫稳定性;第四章,介绍线性控制系统的能控性与能观测性;第五章,介绍状态反馈与状态观测器;第六章,介绍最优控制系统设计;第七章,介绍随机系统与卡尔曼滤波;第八章,介绍自适应控制系统设计。本书用作教材时,建议按60~80学时安排。

本书由哈尔滨工业大学于长官教授主编,参加本书编写的还有樊茂林、王庆超、黄达清、王常虹、陈兴林、赵守智、邱华洲、王述一及赵空勤等同志。

由于成书匆忙,难免有疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

1997年3月

目 录

绪论	(1)
第一章 线性控制系统的状态空间描述	(4)
§ 1.1 状态空间描述的概念	(4)
§ 1.2 系统的一般时域描述化为状态空间描述	(8)
§ 1.3 系统的频域描述化为状态空间描述	(11)
§ 1.4 据状态变量图列写线性系统的状态空间描述	(16)
§ 1.5 据系统方块图导出状态空间描述	(22)
§ 1.6 将状态方程化为规范形式	(23)
习题	(32)
第二章 线性控制系统的运动与离散化	(36)
§ 2.1 线性定常系统的自由运动	(36)
§ 2.2 矩阵指数 $e^{A(t-t_0)}$ (或 e^{At}) 的计算方法	(37)
§ 2.3 线性定常系统的受控运动	(41)
§ 2.4 离散系统的状态空间描述	(44)
§ 2.5 离散时间系统状态方程求解	(47)
§ 2.6 线性连续系统的离散化	(51)
习题	(58)
第三章 控制系统的李亚普诺夫稳定性	(63)
§ 3.1 李亚普诺夫第二法的概述	(63)
§ 3.2 李亚普诺夫意义下的稳定性	(65)
§ 3.3 李亚普诺夫稳定性定理	(66)
§ 3.4 线性系统的李亚普诺夫稳定性分析	(69)
§ 3.5 变量梯度法	(75)
习题	(79)
第四章 线性控制系统的能控性与能观测性	(82)
§ 4.1 能控性和能观测性的概念	(82)
§ 4.2 线性定常系统的能控性判据	(83)
§ 4.3 线性定常系统的能观测性判据	(89)
§ 4.4 线性离散定常系统的能控能观测判据	(93)
§ 4.5 能控规范型和能观测规范型	(96)
§ 4.6 系统的能控性与能观测性的对偶原理	(103)
习题	(104)
第五章 状态反馈与状态观测器	(109)
§ 5.1 状态反馈与输出反馈	(109)
§ 5.2 单输入-单输出状态反馈系统的极点配置法	(111)
§ 5.3 状态重构问题	(118)

§ 5.4 观测器的极点配置	(122)
习题	(127)
第六章 最优控制系统设计	(129)
§ 6.1 最优控制的基本概念	(129)
§ 6.2 无约束最优控制的变分方法	(131)
§ 6.3 线性调节器问题	(133)
§ 6.4 受约束最优控制的极小值原理	(142)
§ 6.5 最小时间系统的控制问题	(144)
习题	(151)
第七章 随机系统与卡尔曼滤波	(154)
§ 7.1 线性估计问题	(154)
§ 7.2 线性最小方差估计	(156)
§ 7.3 随机线性系统的数学描述	(158)
§ 7.4 卡尔曼滤波的基本思想	(163)
§ 7.5 离散系统的卡尔曼滤波	(165)
§ 7.6 离散卡尔曼滤波的推广	(173)
§ 7.7 有色噪声情况下线性系统的滤波	(176)
§ 7.8 连续时间系统的卡尔曼滤波	(179)
§ 7.9 随机线性系统的最优控制	(186)
习题	(188)
第八章 自适应控制系统设计	(191)
§ 8.1 自适应控制系统概述	(191)
§ 8.2 用局部参数最优化法设计自适应控制系统	(196)
§ 8.3 基于李亚普诺夫稳定性理论的设计	(197)
§ 8.4 模型参考自适应控制的直接法	(201)
§ 8.5 超稳定性理论的应用	(205)
§ 8.6 适应式模型跟随系统的设计	(210)
§ 8.7 模型参考自适应控制系统的设计示例	(214)
习题	(217)
参考文献	(218)

绪 论

现代科学技术的迅速发展,对自动控制的程度、精度、速度、范围及其适应能力的要求越来越高,从而推动了自动控制理论和技术的迅速发展。特别是 60 年代以来,电子计算机技术的迅猛发展,奠定了自动控制理论和技术的物质基础,于是,现代控制理论逐步形成了一门现代科学分支。

一、控制理论的发展史

为了说明现代控制理论在整个控制理论中的地位,我们把控制理论的发展划为不同阶段。这种阶段性的发展过程是由简单到复杂、由量变到质变的辩证发展过程。

经典控制理论多半是用来解决单输入-单输出的问题,所涉及的系统大多是线性定常系统,非线性系统中的相平面法也只含两个变量。常接触到的系统,如机床和轧钢机中常用的调速系统、发电机的自动电压调节系统以及冶炼炉的温度自动控制系统等等,这些系统均被当作单输入-单输出的线性定常系统来处理。如果把某个干扰考虑在内,也只是将它们进行线性叠加而已。解决上述问题时,采用频率法、根轨迹法、奈氏稳定判据、期望对数频率特性综合等方法是比较方便的,这些方法均属于通常所说的古典控制论范畴,所得结果在对精确度、准确度要求不是很高的情况下是完全可用的。总之,经典控制论是与生产过程的局部自动化相适应的,它具有明显的依靠手工进行分析和综合的特点,这个特点是与 40~50 年代生产发展的状况,以及电子计算机技术的发展水平尚处于初期阶段密切相关的。

现代控制理论主要用来解决多输入-多输出系统的问题,系统可以是线性或非线性的、定常或时变的。例如,现在对加工机械有了更高的要求,反映在磨床上,只靠恒速或恒转速,即使加上砂轮自动补偿也是不够的。因为磨床在磨削过程中,砂轮质量是不断变化的,砂轮的半径越来越小,切线速度处在变化中,如果保持恒转速,磨削效率就会越来越低。为了提高效率,可以使转速提高,但在恒功率条件下,这样做的结果必然导致转速减小,因此需要调速。但这种调速与通常的调速含义不同,而且由于考虑了另一个变量(砂轮),所以系统已是一个时变系统。显然,其它加工机械都有类似情况,在精密加工机械的使用中,有的控制变量多达七个,古典法显然对此无能为力,因此,不仅在航天飞行器、导弹、火炮的控制方面需要现代控制理论,而且随着工业生产对产品的质量和产量要求的提高,现代控制理论也日渐为人们所关注。现代控制理论的研究方法在本质上是一种时域方法,即所谓状态空间法,它的分析和综合目标是要揭示系统的内在规律,实现系统在一定意义下的最佳化;它的构成不仅限于单纯的闭环,而且可扩展为适应环、学习环等。总之,现代控制理论,是 60 年代人类探索空间的需要,也是电子计算机的飞速发展和普及的产物。

大系统理论和智能控制理论的出现,使控制理论发展到一个新阶段。所谓大系统,是指规模庞大、结构复杂、变量众多的信息与控制系统,它涉及生产过程、交通运输、生物控制、计划管理、环境保护、空间技术等多方面的控制和信息处理问题。而智能控制系统是具有某些仿人智能的工程控制与信息处理系统,其中最典型的是智能机器人。

二、现代控制理论与经典控制理论

一般来说,经典控制理论只是对单输入-单输出线性定常系统的分析与综合是有成效的。现代控制理论则可适用于线性和非线性、定常和时变、单变量和多变量、连续和离散系统。现代控制理论适用领域的扩大,使其成为更有普遍性的理论。

由于经典控制理论主要限于处理单变量的线性定常问题,反映到数学上就是单变量的常系数微分方程问题,因此拉氏变换就成了它的主要数学工具,数学模型是传递函数。现代控制理论要处理多变量问题,因此矩阵和向量空间理论是它的主要数学基础。

经典控制理论是一种频域方法,它以系统的输出输入特性作为研究的依据;而现代控制理论的本质是一种时域方法,它是建立在状态变量描述方法基础上的。因此,经典控制理论着眼于系统的输出,而现代控制理论则着眼于系统的状态。

经典控制理论是在给定一类特定的输入情况下,分析输出的响应。在综合问题上,是根据给定的某种指标来设计系统的校正网络。总之,经典控制理论着眼于系统外部联系。而现代控制理论则主要揭示系统对控制和初始状态的依赖关系,指出其可能影响的性质和程度,揭示系统在一定的指标提法和和其它限制条件下可能达到的最佳状态,即最优控制。

经典控制理论的控制器即校正装置,是由能实现典型控制规律的调节器构成的。而现代控制理论的控制器则是能实现任意控制规律的数字机。

经典控制理论的基本内容有时域法、频率法、根轨迹法、描述函数法、相平面法、代数与几何稳定判据、校正网络设计等,研究的主要问题是稳定性问题。现代控制理论的基本内容有线性系统基本理论、系统辨识、最优控制问题、自适应控制问题及最佳滤波问题等,研究的主要问题是最佳优化问题。

三、现代控制理论的基本内容

现代控制理论是对系统的状态进行分析和综合的理论。

系统辨识:要研究系统的状态,首先要建立系统在状态空间中的数学模型,由于系统比较复杂,所以往往不能通过解析的方法直接建立其数学模型,而主要通过试验或运行的数据来估计出控制对象的数学模型及参数,这就是系统辨识问题。

最优控制问题:简单地说,就是在给定限制条件和评价函数下,寻找使系统性能指标最佳的控制规律问题。这里的限制条件即约束条件,就是物理上对系统所施加的一些限制;评价函数即性能指标,是为评价系统的优劣所规定的标准,也称为目标函数,要寻求的控制规律也就是综合控制器。在解决最优控制问题中,庞德亚金(Понтрагин)的极大值原理和贝尔曼(Bellman)的动态规划是重要的两种方法。

自适应控制问题:是指一类控制系统,既能适应内部参数变化,又能适应外部环境变化,而自动调整控制作用,使系统达到一定意义下的最优或满足对这一类系统的要求。

线性系统基本理论:包括系统的数学模型、运动的分析、稳定性的分析、能控与能观测性及状态反馈与观测器等问题。

最佳滤波或称最佳估计:当系统中有随机干扰时,其综合就必须同时应用概率和统计的方法来进行,即在系统数学模型已经建立的基础上,通过对系统输入输出数据的测量,利用统计方法对系统的状态进行估计。古典的维纳(Wiener)滤波理论阐述的是对平稳随机过程按均方意义的最佳滤波。而现代的卡尔曼(Kalman)滤波理论克服了维纳滤波理论的局限性,在很多

领域中得到广泛应用。卡尔曼滤波理论的提出,奠定了现代控制理论的基础。

现代控制理论的出现,是人类探索空间的客观需要。随着社会的发展与科学技术的进步,控制理论将不断完善。具体来说,状态与状态空间概念和方法的引入,在现代控制理论中起了很重要的作用,如果说经典控制理论是研究控制系统输出的分析与综合的理论,那么可以说,现代控制理论是研究控制系统状态的分析与综合的理论。

第一章 线性控制系统的状态空间描述

确定控制系统的状态空间描述,即建立在状态空间中的数学模型,是一个基本问题,也是现代控制理论中分析和综合控制系统的前提,其重要性就像经典控制理论中确定系统的传递函数一样。

§ 1.1 状态空间描述的概念

一、基本定义

在经典控制理论中,分析非线性系统所采用的相平面就是一个特殊的二维状态空间。

例 1.1 设有如图 1.1 所示的 R-L-C 网络, u 为输入变量, u_c 为输出变量。试求其数学描述。

解 可得到三种形式的数学描述。列方程

$$\begin{cases} C \frac{du_c}{dt} = i \\ L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u \end{cases} \quad (1.1)$$

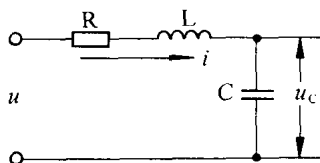


图 1.1 R-L-C 网络

消去中间量

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u \quad (1.2)$$

用传递函数形式表示

$$\frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (1.3)$$

式(1.1)、(1.2)、(1.3)均可表示系统的状态。分析式(1.1),可用它的两个一阶微分方程表示

$$\begin{cases} \dot{u}_c = \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C}i \\ \dot{i} = \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}u_c - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \end{cases}$$

用向量矩阵方程表示

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u]$$

在此 R-L-C 网络中,若已知电流的初值 $i(t_0)$ 、电压的初值 $u_c(t_0)$ 以及 $t \geq t_0$ 时的输入电压 $u(t)$,则 $t \geq t_0$ 时的状态可完全确定,因此 $i(t)$ 、 $u_c(t)$ 是这个系统的一组状态变量。

综上所述,可建立如下基本概念的定义:

状态变量: 动力学系统的状态是指能完整地、确定地描述系统的时域行为的最小一组变

量。如果给定了 $t=t_0$ 时刻这组变量的值和 $t \geq t_0$ 时输入的时间函数,那么系统在 $t \geq t_0$ 的任何瞬时的行为就完全确定了,这样的一组变量称为状态变量。

状态向量:以状态变量为元所组成的向量,称为状态向量。如 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是系统的一组状态变量,则状态向量就是以这组状态变量为分量的向量,即

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ 或 } X^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]$$

状态空间:以状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为坐标轴组成的 n 维正交空间称为状态空间。状态空间中的每一点都代表了状态变量的唯一的、特定的一组值。

状态方程与输出方程:在状态空间中建立的描述系统性能的数学模型,称为状态方程与输出方程。

二、被控过程的状态空间描述

在引入了状态和状态空间概念的基础上,建立被控过程在状态空间中的数学模型。被控过程及其方块图如图 1.2 和图 1.3 所示。

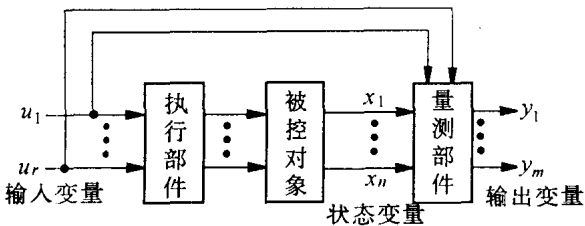


图 1.2 被控过程的动力学描述

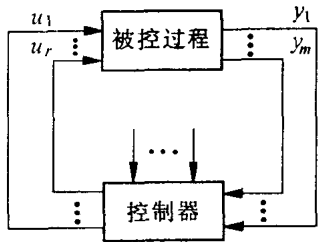


图 1.3 控制系统方块图

从动力学观点来看,一个基于反馈建立起来的控制系统由被控过程和控制器两部分组成。被控过程由执行机构、被控对象、量测机构组成,一般情况下,控制器是一台电子计算机。

由例 1.1 很容易得知,列写状态方程就是把一个高阶微分方程化为所确定的状态变量相应的一阶微分方程组,然后用向量矩阵形式表示。下面将按上述步骤举例列写状态方程,进而得出被控过程状态空间描述的形式与规律。

例 1.2 R-C-L 网络如图 1.4 所示。其中 $e(t)$ 为输入变量, $u_{R2}(t)$ 为输出变量,试求其状态空间描述。

解 ① 确定状态变量。

此网络 u_C 和 i_L 可构成最小变量组,当给定 u_C 和 i_L 的初始值和 $e(t)$ 后,网络各部分的电流、电压在 $t \geq 0$ 的过渡过程就完全确定了。所以可以选择 u_C 和 i_L 作为状态变量,它们组成的状态向量为 $X = [u_C \quad i_L]$ 。

② 列写网络方程并化为一阶微分方程组。

取两个回路,根据克希霍夫定律可得

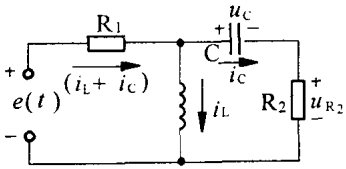


图 1.4 R-L-C 网络

$$\begin{cases} R_1(\dot{i}_L + i_C) + L \frac{di_L}{dt} = e(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} R_1(i_L + i_C) + u_C + R_2 i_C = e(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

因为 i_C 不是所确定的状态变量, 所以需将 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ 代入式(1.4)、(1.5)中, 消去 i_C , 即

$$\begin{cases} R_1 i_L + R_1 C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di_L}{dt} = e(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} R_1 i_L + R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C + R_2 C \frac{du_C}{dt} = e(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

由式(1.7)可得

$$(R_1 + R_2)C \cdot \frac{du_C}{dt} = -u_C - R_1 i_L + e(t)$$

即

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_2)}u_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)}i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_2)}e(t) \quad (1.8)$$

由式(1.6)可得

$$L \frac{di_L}{dt} = -R_1 C \frac{du_C}{dt} - R_1 i_L + e(t)$$

将式(1.8)代入上式可得

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= -R_1 C \left\{ -\frac{1}{C(R_1 + R_2)}u_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)}i_L + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \cdot e(t) \right\} - R_1 i_L + e(t) = \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2}u_C + \frac{R_1^2}{R_1 + R_2}i_L - \frac{R_1}{R_1 + R_2}e(t) - \frac{(R_1^2 + R_1 \cdot R_2)}{R_1 + R_2}i_L + \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \cdot e(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u_C - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2}e(t) \end{aligned}$$

即

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)}u_C - \frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)}e(t) \quad (1.9)$$

③ 状态空间描述。

将式(1.8)、(1.9)用向量矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} [e(t)] \quad (1.10)$$

输出(或量测)方程为

$$u_{R_2} = R_2 i_C = R_2 C \frac{du_C}{dt} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}u_C - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2}e(t)$$

即

$$[u_{R_2}] = \left[-\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad -\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right] \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] [e(t)] \quad (1.11)$$

式(1.10)、(1.11)即为系统的状态方程与输出(或量测)方程, 它们构成了被控过程的状态

空间描述。

令

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}$$

令状态向量

$$X = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}, \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix}$$

输入向量 $u=e(t)$, 输出向量 $y=u_{R_2}$ 。

因此状态空间描述的数学模型可表示为状态方程与输出方程, 即

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu & \text{状态方程} \\ y = CX + Du & \text{输出方程(或量测方程)} \end{cases}$$

这就是 n 维线性定常系统的状态空间描述。系数矩阵 A 为 $n \times n$ 矩阵, 输入系数矩阵 B 为 $n \times r$ 矩阵, 输出系数矩阵 C 为 $m \times n$ 矩阵, 系数矩阵 D 为 $m \times r$ 矩阵, 它们对应的状态向量 X 为 n 维, 输入向量 u 为 r 维, 输出向量 y 为 m 维。

对于线性时变系统, 系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 均与时间 t 有关, 所以状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + B(t)u \\ y = C(t)X + D(t)u \end{cases}$$

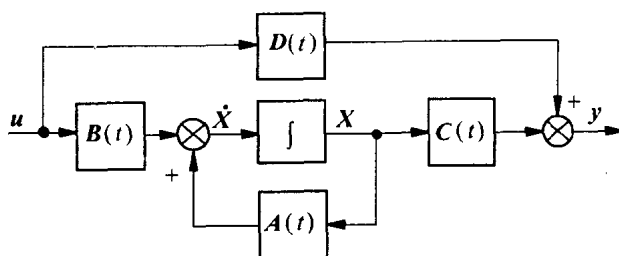


图 1.5 线性系统方块图

从以上结果不难看出, 状态空间描述具有代表性。

用方块图表示, 如图 1.5 所示。

三、系统状态空间描述的特点

通过以上对状态空间描述的初步认识, 可总结出如下几点:

① 状态空间描述考虑了“输入-状态-输出”这一过程, 其中它考虑了被经典控制理论的输入-输出描述所忽略的状态, 因此它揭示了问题的本质, 即输入引起状态的变化, 而状态决定了输出。

② 输入引起的状态变化是一个运动过程, 数学上表现为向量微分方程, 即状态方程。状态决定输出是一个变换过程, 数学上表现为变换方程, 即代数方程。

③ 系统的状态变量个数仅等于系统包含的独立贮能元件的个数(即物理解释),因此一个 n 阶系统仅有 n 个状态变量可以选择(变量之间最大线性无关组即最小变量组)。

④ 对于给定的系统,状态变量的选择不是唯一的。如果 X 是系统的一个状态向量,只要矩阵 P 是非奇异的,那么 $\hat{X}=P^{-1}X$ 也是一个状态向量。

⑤ 一般来说,状态变量不一定是物理上可测量或可观察的量,但从便于控制系统的构成来说,把状态变量选为可测量或可观察的量更为合适。

⑥ 对于结构和参数已知的系统,建立状态方程的步骤是:首先选择状态变量,其次根据物理或其它方面的机理或定律列写微分方程,并将其化为状态变量的一阶微分方程组,最后将一阶微分方程组化为向量矩阵形式,即得状态空间描述。对于结构和参数未知的系统,通常只能通过辨识的途径建立状态方程。

⑦ 系统的状态空间分析法是时域内的一种矩阵运算方法,特别适合于用电子计算机来计算,有利于把工程技术人员从繁琐的计算中解脱出来,使他们在控制系统的分析与综合中从事更富有创造性的工作。

必须指出,确定最小的状态变量组以及与之对应的状态空间描述的形式、特点、它们之间的联系与转换等问题,需要进一步分析解决。

§ 1.2 系统的一般时域描述化为状态空间描述

在经典控制理论中,通常控制系统的时域模型表征为输出和输入间的一个单变量高阶微分方程,它具有如下一般形式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

由 § 1.1 可知,线性定常系数的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases}$$

所以将一般时域描述化为状态空间表达式的关键问题是适当选择系统的状态变量,并由 $a_i (i=1, \cdots, n)$ 、 $b_j (j=0, 1, \cdots, n)$ 定出相应的系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 。下面分两种情况进行讨论。

一、方程中不包含输入函数的导数

线性微分方程中的输入函数为 u , 不包含各阶导数的微分方程形式如下:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_n u$$

1. 选择状态变量

一个 n 阶系统,具有 n 个状态变量,因为当给定 $y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$ 和 $t \geq 0$ 的输入 $u(t)$ 时,系统在 $t \geq 0$ 时的运动状态就完全确定了,所以可以取 $y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots, y^{(n-1)}$ 为系统的一组状态变量,令

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

2. 将高阶微分方程化为状态变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_n y - a_{n-1} \dot{y} - \dots - a_1 y^{(n-1)} + b_n u = \\ -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + b_n u \end{cases}$$

系统输出关系式为 $y = x_1$ 。

3. 将一阶微分方程组化为向量形式

状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

输出方程

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

例 1.3 设系统输出-输入微分方程为

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$$

若 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}$, 可导出状态方程和输出方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

二、方程中包含输入函数的导数

线性微分方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

将上面的微分方程化为状态空间描述的方法同上,但遇到的新问题是,因为方程式右边出现了 u 的导数项,使状态空间中的运动出现无穷大的跃变,方程解的存在性和唯一性被破坏了,所以选择的状态变量要使导出的一阶微分方程组等式右边不出现 u 的导数项。为此,通常把状态变量取为输出 y 和输入 u 的各阶导数的适当组合。

1. 选择状态变量

令

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u \\ x_{n+1} = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} \dot{u} - \beta_n u \end{cases} \quad (1.12)$$

式中的系数 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ 待定, 可由下面方法定出:

用 a_n, a_{n-1}, a_1 分别乘式(1.12)中相应方程的两端, 并移项, 得

$$\begin{cases} a_n y = a_n x_1 + a_n \beta_0 u \\ a_{n-1} \dot{y} = a_{n-1} x_2 + a_{n-1} \beta_0 \dot{u} + a_{n-1} \beta_1 u \\ a_{n-2} \ddot{y} = a_{n-2} x_3 + a_{n-2} \beta_0 \ddot{u} + a_{n-2} \beta_1 \dot{u} + a_{n-2} \beta_2 u \\ \vdots \\ a_1 y^{(n-1)} = a_1 x_n + a_1 \beta_0 u^{(n-1)} + \cdots + a_1 \beta_{n-2} \dot{u} + a_1 \beta_{n-1} u \\ y^{(n)} = x_{n+1} + \beta_0 u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} \dot{u} + \beta_n u \end{cases}$$

不难看出, 上述各方程左端相加等于线性微分方程的左端, 因此上述各方程右端相加也等于线性微分方程的右端。即

$$\begin{aligned} & \{x_{n+1} + a_1 x_n + \cdots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1\} + \{\beta_0 u^{(n)} + (\beta_1 + a_1 \beta_0) u^{(n-1)} + \\ & (\beta_2 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_0) u^{(n-2)} + \cdots + (\beta_{n-1} + a_1 \beta_{n-2} + \cdots + a_{n-2} \beta_1 + \\ & a_{n-1} \beta_0) \dot{u} + (\beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0) u\} = \\ & b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \end{aligned} \quad (1.13)$$

等式两边 $u^{(k)} (k=0, 1, \dots, n)$ 的系数应相等, 所以

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

这就是由 a_i 和 b_j 计算 $\beta_k (k=0, 1, \dots, n)$ 的关系式。

2. 导出状态变量的一阶微分方程组和输出关系式

对式(1.12)求导, 并考虑到式(1.13)中的

$$\{x_{n+1} + a_1 x_n + \cdots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1\} = 0$$

可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u} = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = x_{n+1} + \beta_n u = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u \\ y = x_1 + \beta_0 u \end{cases}$$

3. 化为向量形式

$$\text{状态方程} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} [u]$$

$$\text{输出方程} [y] = [1 \ 0 \ \cdots 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [\beta_0][u]$$

例 1.4 系统输出-输入微分方程为

$$\ddot{y} + 18\dot{y} + 192y = 160\dot{u} + 640u$$

系数 $a_1=18, a_2=192, a_3=640, b_0=b_1=0, b_2=160, b_3=640$ 。

按式(1.14)求出

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 160$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 640 - 18 \times 160 = -2240$$

所以状态变量为

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 \dot{u} = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 u = \ddot{y} - 160u$$

可按前面推导得出的规律直接写出状态方程和输出方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} [u]$$

$$[y] = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

§ 1.3 系统的频域描述化为状态空间描述

对控制系统的传递函数

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad (1.15)$$

按其极点情况,用部分分式法可得与之相应的状态空间描述,这样,状态方程与控制系统的极点直接建立了联系,因此称之为状态方程的规范形式。

一、控制系统传递函数的极点为两两相异

将式(1.15)化为部分分式的形式