经济数学基础

JINGJISHUXUE JICHU

主编 邓志平

哈尔滨工程大学出版社

经济数学基础

主编　　邓志平
主审　　林　强

哈尔滨工程大学出版社

经 济 数 学 基 础
JINGJI SHUXUE JICHU
主 编 邓志平
责任编辑 陈晓军
*
哈尔滨工程大学出版社出版发行
(哈尔滨市南通街145号哈尔滨工程大学11号楼)
发行部电话(0451)2519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
哈 尔 滨 市 书 刊 印 刷 厂 印 刷
*
开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 10.1875 字数 250 千字
1998年11月第1版 1998年11月第1次印刷
印数:1~2 000 册
ISBN 7-81007-906-9
O·64 定价:17.00元

前　言

本书原是为了适应中国建设银行成人大专培训而编写的教材讲义。自1996年开始在哈尔滨投资高等专科学校、常州财经学校试用，积累了一定的经验。现经修订部分内容，正式出版。

全书共分7章，前6章为一元函数微积分，第7章为线性方程组。本书在文字上力求通俗易懂，内容上由浅入深，循序渐进。书中的主要概念，都较详细地阐述了实际背景，对运算中的方法技巧，贯彻了由个别到一般的原则，尽可能地总结出一般的规律。书中配备了大量的例题和练习题，并且充实了一些关于经济应用问题的举例和练习，书后附有习题参考答案，便于自学。

本书可用作财经类成人大专的教材、自学用书及参考书。

本书由邓志平主编，林强主审。李敏静、于蓉、隋志坚、吴哈玲等同志为本书提供了全部习题和答案。在此书的编写过程中，栾祖仁教授曾提出过许多宝贵的建议和修改意见，在此一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平与经验，书中肯定存在许多不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1998年9月于哈尔滨

目　　录

1　函　　数 ………………………………………………………… (1)
　1.1　函数的概念 ………………………………………………… (1)
　1.2　反函数……………………………………………………… (10)
　1.3　初等函数…………………………………………………… (11)
　习题一 ………………………………………………………… (15)
2　极限与连续……………………………………………………… (19)
　2.1　极限的概念………………………………………………… (19)
　2.2　无穷小量　无穷大量……………………………………… (26)
　2.3　极限的运算法则…………………………………………… (30)
　2.4　两个重要的极限…………………………………………… (36)
　2.5　函数的连续性……………………………………………… (42)
　习题二 ………………………………………………………… (49)
3　导数与微分……………………………………………………… (55)
　3.1　导数的概念………………………………………………… (55)
　3.2　函数的和、差、积、商的求导法则 ……………………… (64)
　3.3　复合函数的导数　反函数的导数………………………… (68)
　3.4　高阶导数　隐函数的导数………………………………… (75)
　3.5　函数的微分………………………………………………… (79)
　习题三 ………………………………………………………… (85)
4　导数的应用……………………………………………………… (92)
　4.1　微分中值定理　函数单调性的判定法…………………… (92)
　4.2　函数的极值及其求法……………………………………… (98)
　4.3　函数的最大值与最小值 ………………………………… (105)

4.4 罗必塔法则 …………………………………………… (114)
习题四…………………………………………………… (122)
5 不定积分 ……………………………………………… (125)
5.1 不定积分的概念 ……………………………………… (125)
5.2 第一换元积分法 ……………………………………… (135)
5.3 第二换元积分法 ……………………………………… (147)
5.4 分部积分法 …………………………………………… (154)
习题五…………………………………………………… (161)
6 定积分 ………………………………………………… (168)
6.1 定积分的概念与性质 ………………………………… (168)
6.2 定积分的计算 ………………………………………… (176)
6.3 定积分的换元法与分部积分法 ……………………… (184)
6.4 定积分的应用 广义积分 …………………………… (190)
习题六…………………………………………………… (199)
7 线性方程组 …………………………………………… (204)
7.1 行列式及其性质 ……………………………………… (204)
7.2 行列式的展开 克莱姆法则 ………………………… (211)
7.3 矩阵及其运算 ………………………………………… (219)
7.4 矩阵的初等变换 矩阵的秩 ………………………… (234)
7.5 线性方程组的消元解法 ……………………………… (244)
习题七…………………………………………………… (258)
习题答案………………………………………………… (268)
附录……………………………………………………… (292)

1 函 数

“微积分”与中学开设的数学(代数、几何、三角)的区别在于它研究的对象与研究的方法不同。中学数学所研究的基本上是不变的量和图形,研究方法是孤立的和静止的,人们称它为初等数学。而“微积分”则以变量为主要研究对象,以极限方法为研究变量的基本方法。因此“微积分”属于高等数学范畴,函数与极限都是高等数学中最基本的概念,也是微积分的基础。本章我们将在复习中学数学关于函数知识的基础上进一步讨论函数,给出函数的一般定义,介绍函数的一些简单性质。

1.1 函数的概念

1.1.1 函数的定义

在观察和研究事物的变化过程中,会遇到各种各样的量。其中有的量始终保持不变,我们称它为常量;而有的量则不断发生变化,我们称它为变量。

例 1 设一物体自由下落。在下落的过程中,这一物体的体积 V,质量 m 始终不发生变化;而下落的时间 t 和下落的速度 v,以及物体离地面的高度 h,则不断地变化。因此,在这一过程中,V、m 是常量,t、v、h 是变量。

通过研究,我们注意到这几个变量并不是孤立地变化,而是相互联系和相互制约的。下落的速度 v 和距离地面的高度 h,都随时间 t 的变化而变化。实际上,由中学的物理知识知道,它们之间的相依关系由公式

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

及

$$v = gt$$

确定。

例 2 投石于静水池中，激起一个圆圈。这个圆圈的半径 r 逐渐增大，圆的面积 S 也逐渐变大，r 与 S 都是变量，它们之间的相依关系由公式

$$S = \pi r^2$$

确定。

例 3 将温度计置于水壶中持续加热，温度计上的温度直线上升，达到 100 ℃时，水开始沸腾；继续加热，温度仍保持 100 ℃，不再上升。若以 t 表示时间，Q 表示温度，则变量 t 与 Q 之间的相依关系由式子

$$Q = \begin{cases} At & t < a \\ b & t \geqslant a \end{cases}$$

表示。其中 $b = 100$ ℃，a 为水开始沸腾的时间。

例 4 田间的施肥量与农作物的收获量之间也存在着相互制约的联系。但是不能说，施肥几百斤就一定能收获几千斤。变量之间的这种不确定的相依关系不在"微积分"的研究之列。

例 1 至例 3 所表示的两个变量之间确定的相依关系，在数学上就称为函数关系。这种关系实际上给出了一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应。

定义 设有两个变量 x 与 y，如果对于变量 x 的每一个可能取的值，变量 y 按照一定的规则总有一个确定的值和它对应，那么就称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，并且称 x 为自变量，y 为因变量。

允许自变量 x 取值的范围 D 称为函数的定义域。函数的定

义域常用区间来表示。如果自变量 x 取某一数值 x_0 时,函数 $y=f(x)$ 有确定的值 y_0 和它对应,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义,并且称 y_0 是函数当 x 取 x_0 时的函数值,记作 $y_0=f(x_0)$,或 $y|_{x=x_0}=y_0$。所以,函数的定义域也就是使函数有定义的 x 值的全体。确定函数的定义域时,一般应遵循这样两个原则:第一,在实际问题中,函数的定义域必须符合问题的实际意义。例如,在例 1 至例 3 中,t、r 是自变量,h、v、S、Q 是因变量,函数的定义域分别是 $0\leqslant t\leqslant T$(即 $[0,T]$)、$r>0$(即 $(0,+\infty)$),$t>0$(即 $(0,+\infty)$);第二,对于用算式表达的函数,其定义域应是使算式有意义的一切实数值。例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是使 $1-x^2\geqslant 0$ 的一切实数;函数 $y=\lg(1-x^2)$ 的定义域是使 $1-x^2>0$ 的一切实数;函数 $y=\frac{1}{1-x^2}$ 的定义域是使 $1-x^2\neq 0$ 的一切实数,等等。

与定义域内的自变量值相对应的函数值的全体,称为函数的值域。如果自变量在定义域内任取一个值,函数只有唯一的值和它对应,则称这个函数为单值函数;否则称为多值函数。今后我们只研究单值函数。

在函数记号 $y=f(x)$ 中,字母 f 表示自变量 x 与因变量 y 之间的一种对应规则,f 不是数,$y=f(x)$ 也不是表示 y 等于 f 与 x 的乘积。对于用算式表示的函数,对应规则 f 实际上表示了由自变量值确定函数值的运算过程。例如函数 $y=\sin x$ 与 $y=\lg x$,前者是对 x 施行三角运算得 y 的值,而后者则是对 x 施行对数运算得到 y 的值。不同的运算过程表示了不同的对应规则,从而表示了不同的函数。为了避免混淆,我们用不同的字母表示。一般地,可用不同的记号 $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$…表示不同的函数。有时也记作 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 等等。

定义域和对应规则称为函数的两个要素。我们说给出了一个函数,就是同时给出了它的定义域和对应规则。我们说两个函数

相等，就是指这两个函数的定义域与对应规则完全相同。至于它们分别用什么字母表示自变量和函数，无关紧要。比如 $f(x)=\sin x$ 与 $f(t)=\sin t$ 都是表示同一个函数的。

1.1.2 函数的表示法

函数通常有三种表示法：公式法、图示法和表格法。

1. 公式法(或称分析法)

一般说来，函数的公式表示法就是用数学算式来表示函数的对应规则，并注明函数的定义域。例如

$$y = ax^2 + bx + c \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$y = \frac{1}{ax+b} \qquad x \neq -\frac{b}{a}$$

$$y = \sqrt{1+\sin 2x} \qquad -\infty < x < +\infty$$

等就是用公式法表示的函数。

由于用数学式子表示的函数，形式简单、完整，适宜于作定量分析和运算，因此它成为最主要的一种函数表示法。

有的函数不能只用一个式子来表示，而要用两个或很多个式子。这种在定义域内的不同范围用不同的式子分段表示的函数称为分段函数。对于分段函数，求某点的函数值时，首先应判定该点所在的范围，然后选取函数在这个范围内的数学表达式去计算。比如上述例 3 就是分段函数。若设 $a=20$，则

$$Q(t) = \begin{cases} At & t < 20 \\ b & t \geqslant 20 \end{cases}$$

从而

$$Q(10) = 10A \qquad Q(30) = b$$

等等。

2. 图示法(或称几何法)

如果把自变量 x 和因变量 y 分别当作直角坐标平面上一个点的横坐标和纵坐标，则函数 $y=f(x)$ 的图形就是直角坐标平面

上的一条曲线。这就是函数的几何意义，见图 1.1。用坐标平面上的曲线表示函数的方法称为图示法。其优点是直观性强。函数的许多重要特性，如函数的定义域，函数增减的范围、增减的快慢等在图上都一目了然。

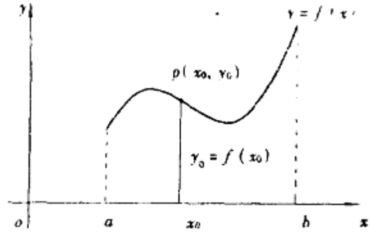


图 1.1

3. 表格法

把自变量中的一系列值从小到大依次与其对应的函数值排列成表，这种表示函数的方法称为表格法。比如常见的对数表，三角函数表等，就是用表格法表示的函数。其优点是使用方便，由自变量值可直接查出对应的函数值，从而避免了繁琐的运算。

1.1.3 函数的几种特性

了解函数的某些特性，会给研究函数带来很大方便。

1. 有界性

如果对于区间(a,b)内的一切自变量 x，都存在一个正数 M，使不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$在(a,b)内有界；否则，称 $f(x)$在(a,b)内无界。

比如，$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，这是因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，有$|\sin x|\leqslant 1$。$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内有界，而在$(0,1)$内无界。因为对任一 $x\in(1,2)$，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$；而当 x 充分接近 0 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|$将变得充分大，即不存在正数 M，使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$。

由$|f(x)|\leqslant M$,有

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M$$

所以函数 $f(x)$有界,在几何上意味着存在两条水平直线 $f(x)=-M$ 与$f(x)=M$,使函数曲线界于这两条直线之间(见图 1.2)。

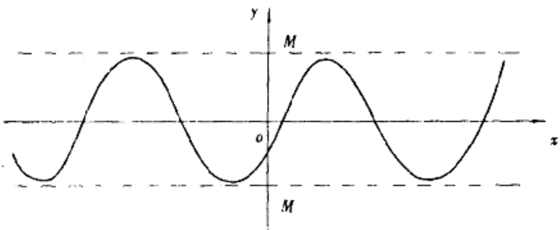


图 1.2

2. 单调性

如果对于区间(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称 $f(x)$在(a,b)内是单调增加的;如果对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调减少的。单调增加和单调减少的函数,统称为单调函数。

若 $f(x)$在(a,b)内单调增加,则其图形沿 X 轴正向上升(图 1.3a);若 $f(x)$在(a,b)内单调减少,则其图形沿 X 轴正向下降(图 1.3b)。

例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内都是单调增加的(图 1.4),而函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上单调减少,在$(0,+\infty)$上单调增加(图 1.5)。

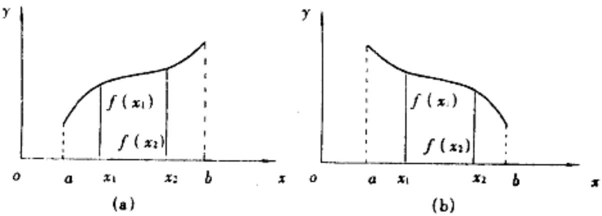


图 1.3

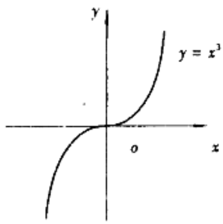


图 1.4

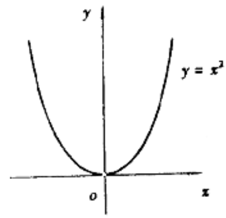


图 1.5

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$)。如果对任一 $x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$为偶函数。如果对任一 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x)$$

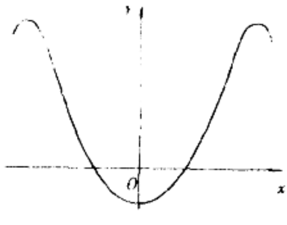
则称 $f(x)$为奇函数。

例如,函数 $y=x^2$, $y=\cos x$ 是偶函数。函数 $y=x^3$, $y=\sin x$ 是奇函数。而 $y=2^x$, $y=\sin x+\cos x$ 既非偶函数,也非奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1.6a),而奇函数的图形关于原点对称(图 1.6b)

4. 周期性

如果至少存在一个不为零的数 T,使函数 $f(x)$对于定义域



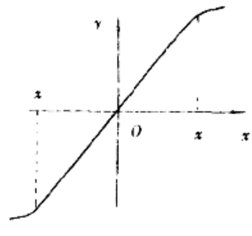


图 1.6

内的任一x，有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数，满足上式的最小正数 T 称为周期函数的周期。

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，由于

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x,\cos(x+2k\pi)=\cos x \qquad (k\in Z)$$

所以它们都是以 2π 为周期的周期函数。而函数 $\mathrm{tg}x$ 与 $\mathrm{ctg}x$，由于 $\mathrm{tg}(x+k\pi)=\mathrm{tg}x$，$\mathrm{ctg}(x+k\pi)=\mathrm{ctg}x$，所以是以 π 为周期的周期函数。

周期函数在其定义域内的每一个以周期 T 为长度的区间上，函数图形具有相同的形状(图 1.7)。

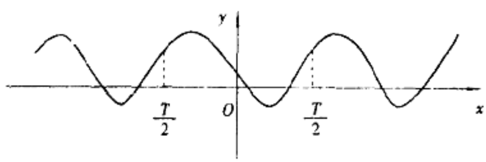


图 1.7

1.1.4 几个常用的经济函数

在各种经济活动中，经常遇到各种各样的变量，如时间 t、产

量 x、价格 P、成本 C、需求量或销售量 Q、收益 R、利润 L 等等，其中某两个变量可能构成一定的函数关系。例如以下几个常用函数：

1. 成本函数 C

成本 C 是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入的费用。它由固定成本与可变成本组成，一般它是产量 x 的函数

$$C = C(x) = C_1 + C_2(x)$$

其中 C_1 为固定成本，$C_2(x)$ 为可变成本。

2. 需求函数 Q

需求是指在一定的价格下，消费者对产品的需求量 Q。如果它是价格 P 的函数，则称为需求函数

$$Q = Q(P)$$

显然它是单调减少函数。如果价格 P 是需求量 Q 的函数，即 $P = P(Q)$ 则称之为价格函数，它是单调增加函数。

3. 收益函数

收益是生产者出售一定量产品所得到的全部收入。如果收益 R 是销售量 Q 的函数，则称这个函数为收益函数。如已知价格函数 $P=P(Q)$，则收益函数

$$R = PQ = QP(Q) = R(Q)$$

4. 利润函数

若已知成本函数 $C=C(x)$，收益函数 $R=R(x)$，则利润函数

$$L = L(x) = R(x) - C(x)$$

例 5 某产品每日产量不超过 100 件，产量为 x 时，产品的总成本为 $\frac{1}{2}x^2 + 50x + 50$，每件售价为 $80 - \frac{1}{4}x$，求其每日的利润（设产量等于销售量）。

解 由假定，总成本

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 50x + 50$$

总收益

$$R(x) = (80 - \frac{1}{4}x)x$$

故每日利润

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + 30x - 50 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 100 \end{aligned}$$

例 6 某产品,当售价为每件 8 元时,每天可卖出(即需求量)1 000 件,如果每件售价每降低或提高 0.2 元,则可多卖出或少卖 40 件,但每件售价不能低于 6 元,否则就要亏本。试求卖出件数与售价之间的函数关系(即需求函数)。

解 设需求量为 Q(件),每件产品价格为 P(元)。由题意知,单价为 P 元时,卖出件数的增加量为

$$\frac{8 - P}{0.2} \times 40$$

故需求量

$$Q = 1\,000 + \frac{8 - P}{0.2} \times 40 = 2\,600 - 200P$$

因为当 $Q = 0$ 时,$P = 13$,所以函数的定义域为$[6,13]$

1.2 反函数

在研究两个变量的相依关系时,可以根据问题的需要选定其中一个变量为自变量,则另一个变量就是因变量或函数。例如,设某种商品的单价为 P,销售量为 Q,则总收益 R 为

$$R = PQ$$

这里 Q 是自变量,R 是函数,由这个关系式可以根据销售量 Q 确

定总收益R。如果反过来需要根据每一个给定的总收益来确定销售量,那么就要由上面的关系式中解出Q,得

$$Q=\frac{R}{P}$$

这时R成为自变量,Q成为因变量,我们称后一函数($Q=\frac{R}{P}$)为前一函数($R=PQ$)的反函数,称前一函数为直接函数,或称它们互为反函数。

一般地,如果将函数$y=f(x)$中的自变量x当作因变量,而因变量y当作自变量,那么由$y=f(x)$所确定的函数$x=\psi(y)$就称为函数$y=f(x)$的反函数,$f(x)$称为直接函数。

由于习惯上用x表示自变量,用y表示因变量,因此将$x=\psi(y)$改写成$y=\psi(x)$。

$y=f(x)$与其反函数$y=\psi(x)$的图形对称于直线$y=x$。

例 求$y=3x+1$的反函数。

解 首先由$y=3x+1$解出x

$$x=\frac{y-1}{3}$$

然后将所得式中的x换成y,y换成x,因此得出$y=3x+1$的反函数是

$$y=\frac{x-1}{3}$$

需要指出一点:单值函数的反函数可以是多值函数。例如$y=x^2$的反函数为$y=\sqrt{x}$与$y=-\sqrt{x}$,但是可以证明:单调函数的反函数是单值函数。

1.3 初等函数

1.3.1 基本初等函数

称常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角