简明高等代数

陆少华 编

JIAN MING GAO DEN DAISU

上海交通大学出版社

(沪)新登字205号

内 容 提 要

本书共分八章。主要介绍了多项式、行列式、矩阵、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换等内容。每章还配有大量例题和习题。本书的特点：观点高，篇幅短小，安排合理，方法简明，习题适当。本书特别适合于高等院校理工类的本科生使用。

简 明 高 等 代 数

出版：上海交通大学出版社
（上海市华山路1954号　邮政编码：200030）
发行：新华书店上海发行所　　印刷：上海交通大学印刷厂
开本：850×1168（毫米）1/32　　印张：7.25　字数：188000
版次：1995年5月　第1版　　印次：1995年6月　第1次
印数：1--1000　　科目：360－290

ISBN 7-313-01464-3/O.093　　定　价：5.00元

主要符号表

Z^+	正整数的集合。
Z	整数集。
Q	有理数集。
R	实数集。
C	复数集。
A'	矩阵A的转置。
$\overline{A}$	矩阵A的共轭矩阵。
A^*	矩阵A的伴随矩阵。
$A^\star$	矩阵A的关联矩阵。
$A^{(j)}$	矩阵A的第j列。
$A_{(i)}$	矩阵A的第i行。
$A(i,j)$	矩阵A的第i行、第j列的元素。
$\deg f(x)$	多项式$f(x)$的次数。
$\dim V$	线性空间V的维数。
E	单位矩阵（泛指各阶单位阵）。
E_n	n阶单位矩阵。
E_{ij}	i行、j列元素为1；其余元素全为0的矩阵。
I_{ij}	第一类初等阵。即单位阵互换i行、j行所得矩阵。
$I_i(c)$	第二类初等阵。即单位阵i行乘以非零常数c所得矩阵。
$I_{ij}(k)$	第三类初等阵。即单位阵j行的k倍加到i行所得的矩阵。
I	恒等映射。
$\mathrm{Ker}\sigma$	线性变换σ的核。
$L(S)$	集合S生成的子空间。
$Li(V)$	线性空间V的线性变换全体所成集合。

P^n　数域 P 上 n 维向量全体所成集合。

$P^{s\times n}$　数域 P 上 s 行、n 列矩阵全体所成集合。

$P[x]$　系数在数域 P 内的一元多项式全体。

$P[x]_n$　系数在数域 P 内的次数小于 n 的一元多项式全体。

$r(A)$　矩阵 A 的秩。

$[x]$　实数 x 的整数部分，即小于、等于 x 的最大整数。

$|\alpha|$　向量 α 的长度。

(α,β)　向量 α 与 β 的内积。

V_λ　对应于特征值 λ 的特征子空间。

$\alpha_1,\cdots,\alpha_t\Longrightarrow\beta$：向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 能线性表出 β，即向量 β 是向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 的线性组合。

δ_{ij} 当 $i=j$ 时，表示数 1；当 $i\neq j$ 时，表示数 0。

目 录

第一章　数与多项式

第一节　连加号Σ

数学中，为了方便常把 n 个数连加的式子 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 简单地记成 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$。

Σ称连加号，a_i 表示一般项，i 的取值从 1（Σ下的数字）到 n（Σ上的数字）。

例如，$1+2+\cdots+n=\sum\limits_{i=1}^{n}i$；

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\sum_{i=0}^{n}a^i;$$

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\,a^{n-i}b^i。$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 中的 i 称为求和指标，它与求和结果是没有关系的，也可用其他字母代替。

例如，$\sum\limits_{i=1}^{n}i$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{n}k$ 都表示同一连加式

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}。$$

求和指标可以选任意字母，但不能选求和式中已出现的其他字母。

例如，$k+2k+\cdots+nk$ 可以写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}(ik)$，但不能写成 $\sum\limits_{k=1}^{n}(kk)$，后者代表 $1^2+2^2+\cdots+n^2$，与原式含义不同。

求和号有如下性质：

(1) $k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(ka_i)$；

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$。

(3) $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\right)$。

(1)，(2)是显然的，(3)的证明于下：

等式左边$=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})$；

等式右边$=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{sj})$。

略加观察，容易发现，左、右两边都表示下列阵式中 $s\times n$ 个数的总和，等式左边表示先按行求和，等式右边表示先按列求和，因而相等。

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots, & a_{1n}; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}, & \cdots, & a_{ij}, & \cdots, & a_{in}; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{s1}, & \cdots, & a_{sj}, & \cdots, & a_{sn}。
\end{array}
$$

为了方便，可把连加式 $1+2+3+5+6+7+8$ 写成 $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq 4}}^{8} i$。一般规则是把求和指标须满足的附加条件写在连加号下。

例如，$\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq 3}}^{5}\dfrac{1}{k-3}=\dfrac{1}{1-3}+\dfrac{1}{2-3}+\dfrac{1}{4-3}+\dfrac{1}{5-3}$，

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij}$ 可以写成 $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$；

$$\sum_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)=\sum_{i=2}^{n}(a_i-a_1)+\sum_{i=3}^{n}(a_i-a_2)+\cdots+\sum_{i=n}(a_i-a_{n-1})。$$

第二节　数

一、数集的概念

复数的一部分常称为数集。常见数集有：

(1) 正整数全体所成的集合，用 Z^+ 表示，即

$$Z^+=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}。$$

(2) 整数全体所成的集合，用 Z 表示，即

$$Z=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots\}。$$

(3) 有理数全体所成的集合，用 Q 表示，即

$$Q=\left\{\frac{a}{b}\ a,\ b\in Z,\ b\neq 0\right\}。$$

(4) 实数全体所成的集合，用 R 表示。

(5) 复数全体所成的集合，用 C 表示，即

$$C=\{a+bi\,|\,a,\ b\in R\}。$$

这些例子中，我们用了集合的两种常用表示法，即列举法((1)与(2))和特性法((3)与(5))。

二、数环

定义 1.1　非空数集 T 叫数环，如果任意 $a,b\in T$，必 $a+b$，$a-b$，$ab\in T$。即数环对数的加、减、乘三种运算封闭；数环包含了两个数的同时，包含了它们的和、差与积。

因为数环 T 非空，T 中有数 a，从而 $0=a-a\in T$，即数环包含数零。

单个数零成一数环。数集 Z，Q，R，C 都是数环。

由于 $1-2\overline{\in}Z^+$，因而 Z^+ 不是数环。

三、数　域

定义 1.2　数环P称为数域，如果 0，$1\in P$；且任意a，$b\in P$，$b\neq 0$，必$\frac{a}{b}\in P$。即数域对数的加、减、乘、除四种运算封闭。

例 1.1　Q，R，C 都是数域。

例 1.2　$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,\ b\in Q\}$ 是数域。

命题 1.1　若P是数域，则$P\supseteq Q$。即任意数域包含了有理数域。

证　0，$1\in P$，从而 $n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}\in P$。

$$-n=0-n\in P，故\ P\supseteq Z。$$

任意a，$b\in Z\subseteq P$，$b\neq 0$，必$\frac{a}{b}\in P$。由此，$P\supseteq Q$。

第三节　一元多项式

中学数学中，常把一元多项式表达成这种形式：$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，这里 a_0，a_1，$\cdots$，a_n 是数，x 是字母。但究竟字母x代表什么，x的一个多项式的含意是什么，都是不够明确的。

为了确切理解多项式，我们给出下面的定义。

定义 1.3　称无穷序列$(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_i,\ \cdots)$为数环 T 上一元多项式，如果

(1) $a_i\in T$，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。

(2) 存在$n\geqslant 0$，当$t\geqslant n$时，$a_t=0$。

即数环T上的一元多项式是指数环T中无穷个数组成的序列，这无穷个数中仅有限个可能不是零。

我们采用传统的记号 $T[x]$ 表示数环 T 上一元多项式全体。用 $f(x)$，$g(x)$ 等表示 $T[x]$ 中的多项式。

设 $f(x)=(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$，称 a_0，a_1，$\cdots$ 为 $f(x)$ 的系数；如果 $a_n \neq 0$，而当 $t>n$ 时，$a_t=0$，则称 $f(x)$ 为 n 次多项式，记成 $\deg f(x)=n$，a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数，一般，a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数。

系数全为零的多项式（0，0，…，0，…）称为零多项式，仍记成 0。为了方便，定义 $\deg 0=-\infty$，且规定，对任意整数 n 均有，$-\infty<n$，$n+(-\infty)=-\infty$，$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$。

若多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有系数一一对应相等，则称两个多项式相等，记成 $f(x)=g(x)$。

我们定义多项式的加法、数乘、乘法于下：

$$(a_0, a_1, \cdots)+(b_0, b_1, \cdots)=(a_0+b_0, a_1+b_1, \cdots),$$
$$k(a_0, a_1, \cdots)=(ka_0, ka_1, \cdots),$$
$$(a_0, a_1, \cdots)\times(b_0, b_1, \cdots)=(c_0, c_1, \cdots),$$

这里 $$c_t=\sum_{i=0}^{t} a_i b_{t-i}=\sum_{i+j=t} a_i b_j。$$

显然，多项式的和与积仍是多项式。

例 1.3 $(1,2,4,1,0,0,\cdots)\times(2,0,3,0,0\cdots)$
$=(1\times2, 1\times0+2\times2, 1\times3+2\times0+4\times2, \cdots)$。

命题 1.2 (1) $\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max(f(x), g(x))$，
(2) $\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$。

证 按定义，(1)是显然的。证(2)于下：

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中有一个为零多项式，则其积也是零多项式。此时，$\deg[f(x)\cdot g(x)]=-\infty=\deg f(x)+\deg g(x)$。

若 $f(x)\neq0$，$g(x)\neq0$。设 $\deg f(x)=n$，$\deg g(x)=s$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数分别为 a_n 与 b_s。此时，积 $f(x)\cdot g(x)$ 的 $(n+s)$ 项的系数 $\sum\limits_{i+j=n+s} a_i b_j=a_n b_s\neq0$；而当 $t>n+s$ 时，$f(x)\cdot$

$g(x)$的 t 次项系数 $=\sum_{i+j=t} a_i b_j$，求和标量$i+j>n+s$，故必 $i>n$ 或 $j>s$，从而 a_i 与 b_j 中必有一个为零，于是 $a_i b_j=0$，即 $f(x)g(x)$ 的 $t(>n+s)$ 次项系数全为零。这样 $\deg(f(x)\cdot g(x))=n+s=\deg f(x)+\deg g(x)$，证毕。

从证明过程中可知，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不是零多项式，它们的首项系数分别为 a_n 与 b_s，则积的首项系数为 $a_n \cdot b_s$。

推论 非零多项式积的首项系数等于首项系数之积。

与数的运算相同，多项式的运算满足下面规律：

(1) 加法交换律 $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$。

(2) 加法结合律 $[f(x)+g(x)]+h(x)$

$$=f(x)+[g(x)+h(x)]。$$

(3) 乘法交换律 $f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$。

(4) 乘法结合律 $[f(x)\cdot g(x)]h(x)$

$$=f(x)[g(x)h(x)]。$$

(5) 数乘法则

$$(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x),$$
$$(kl)f(x)=k[lf(x)],$$
$$k[f(x)+g(x)]=kf(x)+kg(x),$$
$$k[f(x)\cdot g(x)]=[kf(x)]\cdot g(x)$$
$$=f(x)\cdot[kg(x)]。$$

(6) 加，乘分配律 $f(x)[g(x)+h(x)]$

$$=f(x)g(x)+f(x)h(x)。$$

(7) 乘法消去律 即若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$。

(1)、(2)、(3)、(5) 和 (6) 的证明可由数的运算满足相应规律立即推出。

我们证 (4)、(7) 于下：

(4) 的证明 设 $f(x)=(a_0, a_1, \cdots)$、$g(x)=(b_0, b_1, \cdots)$，$h(x)=(c_0, c_1, \cdots)$。

$f(x)\cdot[g(x)h(x)]$的t次项系数$=\sum\limits_{i+l=t}a_i\left(\sum\limits_{j+k=l}b_jc_k\right)=$

$\sum\limits_{i+j+k=t}a_i(b_jc_k)=\sum\limits_{i+j+k=t}(a_ib_j)c_k=\sum\limits_{u+k=t}\left(\sum\limits_{i+j=u}a_ib_j\right)c_k=$

$[f(x)\cdot g(x)]h(x)$ 的 t 次项系数。

故 $f(x)[g(x)h(x)]=[f(x)g(x)]h(x)$。

(7) 的证明 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，得

$$f(x)[g(x)-h(x)]=0。$$

若 $g(x)\neq h(x)$，即 $g(x)-h(x)\neq 0$，由命题1.2

$$\deg f(x)+\deg[g(x)-h(x)]=\deg 0=-\infty,$$

但上式左边是两个整数之和，不等于$-\infty$，故必$g(x)=h(x)$，证毕。

零多项式在多项式的运算中起着数零在数的运算中的作用：

$$0+f(x)=f(x)。$$

$$0\cdot f(x)=0。$$

我们发现，另有两个多项式在运算中起着特殊的作用：第一个是(1，0，0，…)，它起着单位元的作用，称为单位多项式，记成1；第二个是(0，1，0，0，…)，记它为x。验证下面的等式可见它们的特殊作用：

$$1\times f(x)=f(x)$$

$$x^n=\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{n\text{个}}=(\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{n\text{个}},\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

利用1，x与上述的运算性质可表多项式($a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\cdots$)为$a_01+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，这使我们回到了熟悉的形式，并明确了字母$x$的含意：$x$起定位作用。

注　在多项式的概念中，其实T可以不是数环，仅要求它的元素可作加、乘运算且满足一些规律。例如我们可用$T[x]$代替T，就得到T上的二元多项式。

第四节　最大公因式

下面设P是数域，讨论P上多项式的因式分解。

一、带余除法

定理 1.1 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是数域 P 上的一元多项式，$g(x)\neq 0$，则存在 $P[x]$ 中唯一的 $q(x)$ 和 $r(x)$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$
$$\deg r(x)<\deg g(x)。$$

$q(x)$ 与 $r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商和余式。

证 记 $T=\{f(x)-t(x)g(x)\mid t(x)\in P[x]\}$。设 $r(x)$ 是 T 中次数最小的多项式，$r(x)=f(x)-q(x)g(x)$。

若 $\deg r(x)\geqslant \deg g(x)$。设 $r(x)$ 首项为 cx^m，$g(x)$ 首项为 $bx^s(m\geqslant s)$，则

$r_1(x)=r(x)-cb^{-1}x^{m-s}g(x)\in T$。且 $r_1(x)$ 的 m 次项系数为 0，$\deg r_1(x)<\deg r(x)$，这矛盾于 $r(x)$ 的假设。故必 $\deg r(x)<\deg g(x)$。此时 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$。

如果另有 $f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$，$\deg r_1(x)<\deg g(x)$。则 $[q(x)-q_1(x)]g(x)=r_1(x)-r(x)$。

因为 $g(x)\neq 0$，故 $q(x)-q_1(x)$ 与 $r_1(x)-r(x)$ 同时为 0 或不为0。若同时不为 0，由命题 1.2，$\deg[r_1(x)-r(x)]\geqslant \deg g(x)$。此不可能，故必同时为 0，即

$$q(x)=q_1(x),\quad r_1(x)=r(x)。$$

本定理得证。

二、整除性

定义 1.4 $g(x)\neq 0$，若 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式为 0，则称 $g(x)$ 能整除 $f(x)$，或称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，记成 $g(x)\mid f(x)$。

推论 1 $g(x)\mid f(x)\Longleftrightarrow$ 存在 $q(x)$ 使 $f(x)=q(x)g(x)$。

推论 2 若 $f(x)\neq 0$，且 $g(x)\mid f(x)$，则 $\deg g(x)\leqslant \deg f(x)$。

性质 (1) 若 $g(x)\mid f(x)$ 且 $f(x)\mid g(x)$，则存在非零常数 c，使 $f(x)=cg(x)$，

(2) 若 $h(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则 $h(x)\mid f(x)$；

(3) 若 $h(x)\mid f_i(x), i=1, \cdots, n$，则对任意多项式 $g_1(x)$，$\cdots$，$g_n(x)$ 有 $h(x)\mid \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)f_i(x)$。

证 (1)由假设，存在 $h(x)$ 与 $e(x)$ 使

$$f(x)=h(x)g(x);\quad g(x)=e(x)f(x)。$$

从而

$$f(x)=h(x)e(x)f(x),$$

两边消去非零多项式 $f(x)$ 得

$$h(x)e(x)=1。$$

由命题1.2导出，$\deg h(x)=0$，即 $h(x)$ 为非零常数 c，进而 $f(x)=cg(x)$。

(2)由假设，$g(x)=e(x)h(x)$，$f(x)=q(x)g(x)$，于是，$f(x)=q(x)e(x)g(x)$，故 $g(x)\mid f(x)$。

(3)由假设，$f_i(x)=d_i(x)\cdot h(x)$，$i=1, \cdots, n$。于是，$\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)f_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)d_i(x)h(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)d_i(x)\right)h(x)$，故 $h(x)\,\Big|\, \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)f_i(x)$。

三、最大公因式

定义 1.5 多项式 $d(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，记成 $(f(x), g(x))$，如果

(1) $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$。即 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；

(2) 若 $c(x)\mid f(x)$，且 $c(x)\mid g(x)$，则 $c(x)\mid d(x)$。即 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式的倍式；

(3) $d(x)$ 的首项系数为1（首项系数为1的多项式简称首1多项式）。

定理 1.2 $P[x]$ 中任意二个不全为零的多项式 $f(x)$ 与

$g(x)$ 在 $P[x]$ 中必有且仅有一个最大公因式 $d(x)$，且存在 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

证　记 $T=\{k(x)f(x)+l(x)g(x)\mid k(x), l(x)\in P[x]\}$。因为 $f(x)=1\cdot f(x)+0\cdot g(x)$，$g(x)=0\cdot f(x)+1\cdot g(x)\in T$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零。故 T 中有非零多项式，进而 T 中有首 1 多项式（非零多项式除首项系数）。设 $d(x)$ 为 T 中次数最小的首 1 多项式。$d(x)\in T$，即存在 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

用 $d(x)$ 除 $f(x)$ 得商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$，即 $f(x)=q(x)\cdot d(x)+r(x)$。$\deg r(x)<\deg d(x)$。

$r(x)=1\cdot f(x)+[-q(x)]d(x)=[1-q(x)u(x)]f(x)+[-q(x)v(x)]g(x)\in T$。若 $r(x)\neq 0$，则 T 中存在次数小于 $d(x)$ 的非零多项式 $r(x)$，（除首项系数）进而 T 中存在次数小于 $d(x)$ 的首 1 多项式，这矛盾于 $d(x)$ 是 T 中次数最小的首 1 多项式的假设，故必 $r(x)=0$。即 $d(x)\mid f(x)$。

同理，$d(x)\mid g(x)$。

若 $c(x)\mid f(x)$，$c(x)\mid g(x)$，则 $c(x)\mid u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$。因而 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式。

更若 $d_1(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式。把 $d(x)$ 看成是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，$d_1(x)$ 仅看成是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，则 $d_1(x)\mid d(x)$。同理，$d(x)\mid d_1(x)$。从而 $d_1(x)=cd(x)$，比较两边首项系数，得 $c=1$，即 $d_1(x)=d(x)$。证毕。

定理 1.2 告诉我们：任意两个不全为零的多项式的最大公因式存在且唯一。

性质　(1) $((f(x),g(x)),h(x))=(f(x),(g(x),h(x)))$；

(2) 若 $u(x)$ 为首 1 多项式，则 $(u(x)f(x), u(x)g(x))=u(x)\cdot(f(x),g(x))$；

(3) 若 $(f(x), g(x))=1$，$(f(x), h(x))=1$，则 $(f(x), g(x), h(x))=1$。

证　(1) 等式左边 $|(f(x),g(x)),h(x)$；从而是 $f(x),g(x),h(x)$ 的公因式；于是也是 $f(x)$，$(g(x),h(x))$ 的公因式，由最大公因式定义，等式左边能整除等式右边。同理，等式右边能整除等式左边。而两者都是首1多项式，故相等。

(2) 设 $(f(x),g(x))=d(x)$。于是 $u(x)d(x)|u(x)f(x),u(x)g(x)$。因而 $u(x)d(x)|(u(x)f(x),u(x)g(x))$，可设后者为 $u(x)d(x)e(x)$。此时 $u(x)d(x)e(x)\mid u(x)f(x)$，故 $d(x)e(x)|f(x)$，同理 $d(x)e(x)|g(x)$，进而 $d(x)e(x)|(f(x),g(x)=d(x)$，得 $e(x)=1$。即 $(u(x)f(x),u(x)g(x))=u(x)d(x)e(x)=u(x)d(x)=u(x)(f(x),g(x))$。

(3) $1=(f(x),g(x))=(f(x),g(x)(f(x),h(x)))=(f(x),(g(x)f(x),g(x)h(x)))=((f(x),g(x)f(x)),g(x)h(x))=(f(x),g(x)h(x))$。

定义 1.6　若 $(f(x),g(x))=1$，则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素。

推论　若存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素。

证　1是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的当然首1公因式。

又若 $c(x)|f(x),g(x)$，则 $c(x)|u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$。

故1是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，即 $(f(x),g(x))=1$。

四、$n(\geqslant 2)$ 个多项式的最大公因式

定义 1.7　$d(x)$ 称为多项式 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$ 的最大公因式，记成 $d(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$。如果，

(1) $d(x)|f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$。

(2) 若 $c(x)|f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$。则 $c(x)|d(x)$。

(3) $d(x)$ 为首1多项式。

定理 1.3　$n(\geqslant 2)$ 个不全为零的多项式 $f_1(x)$，…，$f_n(x)$ 的