系统与控制科学应用数学丛书

凸分析基础

冯德兴 编著

科学出版社

系统与控制科学应用数学丛书

凸分析基础

冯德兴 编著

科学出版社

1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是系统与控制科学应用数学丛书之一。该丛书是为适应系统与控制科学的发展而组织编写的一套旨在提高数学素养的应用数学参考书。

凸分析研究的基本对象是凸函数，基本工具是凸集分离定理。本书共五章，主要介绍凸分析理论中的几个重要方面。内容包括：凸集理论，凸函数的基本性质，凸集和凸函数的各种对偶关系，凸函数的次微分运算，以及凸分析的应用等。大多数章节后面配有适量的习题，以帮助读者巩固所学的知识。

本书可作为高等院校系统与控制专业的教学用书，也可作为信息科学、工程科学、管理科学、力学与应用数学等专业的师生及工程技术人员的教学参考书。

责任编辑 李淑兰 唐正必

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

香河县第二印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1995 年 1 月第一次印刷 印张：11

印数：1—1 300 字数：242 000

ISBN 7-03-004470-3/TP・408

定 价：17.50 元

序　　言

系统与控制科学的发展始终与数学密切相关. 一方面它从数学丰富的宝库中吸取营养以解决所面临的日益复杂的问题，离开现代数学的支持，系统与控制科学是寸步难行的；另一方面，系统与控制科学又有其自身的研究特点，复杂的研究对象，明确的工程背景与独特的问题提法，以及方法上的多样性与综合性. 这些特点向数学提出了一系列复杂而又新颖的问题. 长期从事系统与控制科学的研究人员都深刻地感受到这一点，即系统与控制科学需要能适应自己发展要求的数学. 也正因为如此，在这个领域内始终吸引了大量的数学家特别是应用数学家的研究兴趣. 可以说系统与控制科学本身是工程科学家、数学家和近 10 多年来新加入的计算机科学家共同培育的丰腴土地.

由于近代科学技术发展的需要和推动，计算机的大量应用和现代数学的支持，系统与控制科学在近 30 年里发生了令人吃惊的变化. 单就数学工具的使用而言，在 50 年代控制理论与系统工程的成果中，线性空间与线性变换的使用尚不多见，而在今天的系统与控制科学的工作中，不仅实分析、拓朴、泛函、微分几何等方面的结果常被引用，而且甚至会碰到近世代数、代数几何、微分拓朴等数学内容. 在研究生所用的教材中，也常遇到甚为高深的数学概念和知识. 这种情况的出现并不是偶然的，也绝非少数人的偏好，而是形势发展的必然. 这是由于仅仅依靠微积分、微分方程与矩阵运

算这些经典的数学工具已不可能完成系统与控制科学当前面临的日益复杂而困难的任务.

60 年代建立起来的现代控制理论, 在其发展的过程中, 曾受到不少责难. 有些人认为在这种理论与应用之间存在着难以逾越的"鸿沟". 但在 20 多年的发展中, 经过数学与工程两方面科学工作者的努力, 不仅这种主要建立在线性空间结构上的理论在诸如阿波罗登月等项目中取得了令人瞩目的成功, 就连建立在微分流形之上的非线性控制理论, 也很快在直升飞机、受控机械手等方面得到了应用. 事实告诉我们, 有益的作法应是在新理论与应用的"鸿沟"之间架起各种桥梁以推进系统与控制科学的发展. 这种变化使自动化的教育无论在大学生还是研究生的层次上均产生了巨大的影响. 落根于 50 年代的工程数学教育和系统与控制科学的要求之间存在着巨大的差距. 若简单地把数学发展的有关材料不加改动地搬过来要求系统与控制界接受, 可能事倍功半, 甚至引起"消化不良". 这是由于在理论数学与应用科学之间还存在着研究兴趣与方法和习惯的巨大区别. 因此, 一套适合系统与控制界特点的数学丛书的出版自然就成了一种十分迫切的需要. 本丛书的编辑出版可以说是应运而生的.

为了保证本丛书既在数学上严谨, 使读者能掌握正确的数学理论与方法而不仅仅满足于了解名词, 又能较好地为应用服务而不是完全数学化, 我们制定了一个原则, 即每本书都必须经过数学和工程两方面的专家的审查与认可. 我们相信这样做将可以尽量减少片面性并保证书稿的质量.

考虑到目前已经出版了不少为应用目的而写的数学书, 其中不乏符合本丛书目的者, 因此我们编写本丛书的原则是不求其全而首先考虑急需, 以满足读者的要求. 又由于系统与

控制科学和众多的应用性学科，诸如信息科学、工程科学、管理科学、力学与应用数学等联系密切，这些学科和系统与控制科学在相当大范围内具有共同的或相近的兴趣和需要，因此我们相信本丛书对这些领域同样是有益的.

由于这是一个带尝试性的工作，我们的水平与经验十分有限，不当乃至失误之处难免，热诚欢迎广大读者批评指正.

“系统与控制科学应用数学”丛书编委会

1990 年9 月 6 日

前　言

凸分析，或称凸集和凸函数理论，是数学中相对年轻的一个分支，本世纪 30 年代才出现比较系统地研究凸集的著作．40 至 50 年代，特别是在优化领域中发现了凸集的许多应用以后，便进一步促进了这一理论的发展．随着数学规划、对策论、数理经济学和最优控制理论等学科发展的需要，凸分析日益受到人们的重视．60 年代后期出现了凸分析的奠基性著作，即 R. T. Rockafellar 的 “Convex Analysis”．无穷维空间中凸分析的理论在这一时期也得到了充分的发展．近年来，国内外出版了不少有关凸分析的专著，但比较适合于国内初学者的凸分析的入门书籍尚不多见．

编写本书的目的就是向工科研究生，特别是从事系统与控制，以及运筹学等专业的研究生、高年级大学生提供有穷维空间中凸分析理论的最基本的知识．这些知识有助于读者从事相应的研究工作和进一步学习有关凸分析的专著．

由于受篇幅的限制，本书仅涉及有穷维空间中的凸分析理论．我以为，在熟悉了这部分内容之后，只要掌握泛函分析的基础知识，就可以比较容易地理解和掌握无穷维空间中的凸分析理论．

学习本书要求两方面的数学准备知识：线性代数和数学分析 (包括基本的点集拓扑) 基本知识．这些对于学过高等数学和线性代数的工科大学毕业生可以说是没有任何问题的．有关的数学分析知识，读者可以参考本系列丛书之一的

《应用实分析基础》.

凸分析研究的基本对象是凸集和凸函数，基本工具是凸集分离定理. 本书中我们仅介绍凸分析理论中的几个重要方面，即使如此，也不可能对所提到的每一个方面的内容都作深入的展开. 凸性概念基本上是一种代数概念. 但从应用角度考虑，我们将不去讨论纯代数中的凸分析内容，而一开始就把它放在拓扑结构中去讨论.

全书共分五章. 第一章介绍凸集理论. 为了方便读者，前两节中我们扼要地回忆一下线性代数和欧氏内积空间中的拓扑性质. 该章的核心是凸集分离定理，凸分析理论中的一些实质性的结果大都是从凸集分离定理推导出来的. 第二章介绍凸函数的基本性质，其中的一个重要定理是，每个闭真凸函数必是某个仿射函数族的上包络. 第三章讨论凸集和凸函数的各种对偶关系，包括共轭函数，凸集的极化，以及各种对偶运算等. 第四章叙述凸函数的次微分运算，它的作用类似于数学分析中的微分运算. 该章的一个重要内容是所谓 Rockafellar 定理 (定理 4.2.6). 第五章介绍凸分析的应用 (主要在规划理论中的应用). 大部分章节后面都配有适量的习题，以帮助读者巩固所学的概念和知识.

全书的定理、引理、推论等是混杂着统一顺序编号的，例如定理 2.3.7 ，接着是引理 2.3.8 ，相应地指第二章 2.3 节的定理 7 和引理 8 ，而例子则是单独编号的.

本书的大部分内容作者曾在中国科学技术大学研究生院讲授过，每周 4 个学时，可在一学期内讲授完. 个别节标题的右上方带有星号，表示初学者在阅读时可以跳过，而不会影响继续往下阅读.

黄琳教授和郑应平教授详细审阅了该书的内容，并提出

了许多宝贵的修改意见. 在本书完成的过程中得到了不少同志的有益帮助，作者在此一并致谢.

由于作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，热诚希望广大读者批评指正.

本书的出版得到国家自然科学基金会的部分资助.

冯德兴

1994 年 1 月

符 号 表

$A(f)$	不超过 f 的仿射函数集合
A_λ	A 的 Yosida 近似
aff M	M 的仿射包
$B(x,\varepsilon)$	以 x 为中心 ε 为半径的开球
bd M	M 的边界
$\mathrm{bd_r}\ M$	M 的相对边界
cl f	函数 f 的闭包
cl M	集合 M 的闭包
conv M	集合 M 的凸包
conv f	函数 f 的凸包
conv $\{f_i \mid i \in I\}$	函数族 $\{f_i \mid i \in I\}$ 的凸包
$\mathrm{d}(\cdot \mid M)$	M 的欧氏距离
dim M	M 的维数
dom f	f 的有效定义域
$E(M)$	M 的极点集
epi f	f 的上图
$f0^+$	f 的回收函数
f^*	f 的共轭函数
$f'_+(x;y)$	f 在 x 沿 y 方向的右导数
$f'_-(x;y)$	f 在 x 沿 y 方向的左导数
$f_1 \Box f_2$	f_1 与 f_2 的下端卷积
$G(A)$	映射 A 的图像

$H(f,\alpha)$	由 f 和 α 决定的超平面
inf	下确界
int M	M 的内部
$J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$	A 的豫解式
lim	极限
lim inf	下极限
lim sup	上极限
$L^\perp$	L 的正交补
M^c	M 的补集
M^o	M 的极化集
$N(A)$	线性变换 A 的零空间
$N_M(x)$	M 在 x 处的法向锥
0^+M	M 的回收锥
$p_K(\cdot)$	K 的 Minkowski 函数
ri M	M 的相对内部
$R(A)$	映射 A 的值域
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间
$R(x;y)$	从 x 出发通过 y 的半射线
span L	由 L 张成的线性子空间
sup	上确界
$S_\alpha(f)$	f 的水平集
$T_M(x)$	M 在 x 处的切向锥
$V(M)$	M 的顶点集
$x\perp y$	x 正交于 y
$\nabla f(x)$	f 在 x 的梯度
$\delta(\cdot\mid M)$	M 的示性函数
$\gamma(\cdot\mid M)$	M 的度规函数

$\partial f(x)$	f 在 x 的次微分
∂f	f 的次微分映射
$\sigma(\cdot \mid M)$	M 的承托函数
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	欧氏内积
$\|\cdot\|$	欧氏范数
$\emptyset$	空集
$\cup$	集合的并运算
$\cap$	集合的交运算
$\subset$	包含
$\in$	属于
$\exists$	存在
$\forall$	对于一切
$\Longleftrightarrow$	等价
$\Longrightarrow$	蕴涵

目　录

第一章　$\mathbb{R}^n$ 中的凸集

我们假定，读者已经熟悉数学分析和线性代数的基本概念和基本知识，以及集合论中的常用符号和基本事实. 为了方便读者阅读，同时也为了统一符号，在 1.1 节和 1.2 节中我们扼要地叙述今后要用到的线性代数和数学分析中的一些重要事实. 本章讨论的主要内容包括：凸集和凸锥，凸集的相对内部，凸集分离定理，承托超平面，凸多面体，凸集的无界性和凸集的面. 凸集分离定理在凸分析中占有核心的作用，是凸分析的重要分析工具. 凸分析中的一些重要结论都与凸集分离定理密切相关.

1.1　仿射集和超平面

我们用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，用 $\mathbb{R}^n$ 表示所有 n 实数组 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^\tau$ 构成的线性空间. x 叫做 $\mathbb{R}^n$ 的向量、点或元，这里 τ 表示转置. $\mathbb{R}^n$ 中向量的加法和数乘法规定如下：

$$(\xi_1,\cdots,\xi_n)^\tau+(\eta_1,\cdots,\eta_n)^\tau=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n)^\tau,$$
$$\lambda(\xi_1,\cdots,\xi_n)^\tau=(\lambda\xi_1,\cdots,\lambda\xi_n)^\tau,$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ 中 m 个向量 $x_1,\cdots,x_m$ 叫做是线性无关的，是指对于实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_mx_m=0\Longrightarrow\alpha_i=0,\ \forall i=1,\cdots,m$. 集合 $M\subset\mathbb{R}^n$ 叫做子空间，是指它对于加法和数乘运算是封闭的，即

$$x, y \in M, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow x + y \in M, \lambda x \in M.$$

子空间 M 中线性无关向量的最大数目叫做该子空间的维数，记作 $\dim M$. 例如，$\mathbb{R}^n$ 的维数正好是 n，故 $\mathbb{R}^n$ 是一个 n 维空间. m 维子空间 M 中的 m 个线性无关向量 $x_1, \cdots, x_m$ 形成 M 的一个基，这时 M 中的任意向量 x 均可唯一地表示成

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m,$$

而相应的系数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 叫做 x 在基 $x_1, \cdots, x_m$ 之下的坐标. 特别地，在 $\mathbb{R}^n$ 中，记 e_k 是第 k 个分量为 1 而其余分量为 0 的向量，则 $e_1, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，而 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T$ 恰好是 x 在此基之下的坐标表现.

设 $M \subset \mathbb{R}^n$ 为任一集合. 包含 M 的最小子空间叫做由 M 张成的子空间，记作 $\operatorname{span} M$. 显然

$$\operatorname{span} M = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \,\middle|\, x_k \in M, \alpha_k \in \mathbb{R}, m \text{ 任意} \right\}.$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的两个集合 M 和 N，以及实数 λ，我们定义 M 和 N 的和，以及 M 和 λ 的数乘如下：

$$M + N = \{x + y \mid x \in M, y \in N\},$$
$$\lambda M = \{\lambda x \mid x \in M\}.$$

容易验证上述运算满足如下分配律：

$$\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N; \quad (\lambda + \mu)M \subseteq \lambda M + \mu M.$$

给定 $\mathbb{R}^n$ 中两个不同的点 x 和 y，集合

$$\{(1 - \lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$