

外国现代音乐理论译丛

(9)

集合相似性关系的测量

J. Perone 著

张 巍 译

武汉音乐学院图书馆编译室

一九八九年三月

集合相似性关系的测量*

J. Perone 著

張 題 译

一. 引言

尽管在集合理论中大量描述了集合型之间的相似性关系，但研究它们的中心则完全放在这些集合的包含关系 (inclusion relationship) 或音程级度量关系 (interval-class relationship) 上。从 Clough (1983 年)、Forte (1973)、Martino (1961) 和 Lewis (1977) 的著作中我们可以看到他们对包含关系的研究，而在 Eriksson (1986)、Forte (1973)、Lewis (1959)、Lord (1981)、Morris (1971-80) 和 Rahn (1979-80) 的著作中则着重于音程级度量关系的讨论。其研究方法虽然各不相同，但都没有把这两种关系结合起来加以考察。

* 本文译自 Interface, Vol. 17 (1988), pp. 79-102。原文标题为“

The Projection Quality Index”——即投射性投影目录 (简称 PQI)

译者根据文章的内容改定，原标题。

在本文中，通过对包含关系和音程级度量这两者相似性关系的考察，作者提出一种为不同基数的集合型归纳相似性关系的方法。因而，本文的题目就是指一些特定基数的集合型与另一种基数的集合型相关的相似性——即，单个集合型的特征在一个给定基数的各集合型中所投射的性质。首先，我们解释投射性质编目表中数据的公式，然后讨论该方法的某些细节，最后列出一张与三音集合有关的四音集合的PQI关系表。

二. 编目表中数据来源

产生投射性质编目表（简PQI表）中的数据常有五个步骤。因为要解释每一步骤和该步骤中的有理数，我们省以集合型3~5 ($[0, 1, 6], < 1, 0, 0, 0, 1, 1 >$) 与集合型4~7 ($[0, 1, 4, 5], < 2, 0, 1, 2, 1, 0 >$), 4~8 ($[0, 1, 5, 6], < 2, 0, 0, 1, 2, 1 >$) 以及4~9 ($[0, 1, 6, 7], < 2, 0, 0, 0, 2, 2 >$) 的六种比较作为一个例子来计标这些四音集合每一个的PQI数据。

步骤I~IV曾由Lord作为一种有可能比较不同基数集合型的音程度量的方法在他论文的结尾处提出过。据我所知，其它的步骤以及计标不同基数的相关集合型的包含关系和音程级相似性编目数据的过程至今尚未被人提出过。

步骤I

计标出这两种集合型(三音集合和四音集合)的那些元素中上下相异的绝对值,并且把它们相加。如:

$$\begin{array}{rcl}
 & 3-5 & < 1, 0, 0, 0, 1, 1 > \\
 & 4-7 & < 2, 0, 1, 2, 1, 0 > \\
 \text{(上下两)} & & \\
 \text{(个元素的)} & \text{差数} & 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
 & 1 + 1 + 2 + 1 = 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & 3-5 & < 1, 0, 0, 0, 1, 1 > \\
 & 4-8 & < 2, 0, 0, 1, 2, 1 > \\
 \text{(上下两)} & & \\
 \text{(个元素的)} & \text{差数} & 1 \quad 1 \quad 1 \\
 & 1 + 1 + 1 = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & 3-5 & < 1, 0, 0, 0, 1, 1 > \\
 & 4-9 & < 2, 0, 0, 0, 2, 2 > \\
 \text{(上下两)} & & \\
 \text{(个元素的)} & \text{差数} & 1 \quad 1 \quad 1 \\
 & 1 + 1 + 1 = 3
 \end{array}$$

步骤 II

用出现在每个集合型中音程级差数的相加所得到的和减去一个差数。但这个差数必须是3,其直接原因是三音集合包含三个音程级,而四音集合包含六个音程级

3-5, 4-7	$5-3 = 2$
3-5, 4-8	$3-3 = 0$
3-5, 4-9	$3-3 = 0$

换句话说，这种任何一对不同规模集合型之间的标差数是无关系要的。重要的是在一组相同规模集合型中的差数。因而，在计算PDI时，我们没有把在一个特定规模的所有集合型中所包含的任何一个共同元素计标在内。

步骤Ⅲ

用2除以上一步骤的结果。通过这一步骤来获得连续的整数。

3-5, 4-7	$2/2 = 1$
3-5, 4-8	$0/2 = 0$
3-5, 4-9	$0/2 = 0$

步骤Ⅳ

用上一步骤的结果减去有可能经过移位和倒影所包含的数。（见下页）

此刻减去可能经过移位和倒影的包含的数是因为它们在比较较大的和较小的集合型时极为重

要，较大的数越少，这种投射就越好。

(续上页)

$$3-5, 4-7 \quad 1 - 0 = 1$$

$$3-5, 4-8 \quad 0 - 2 = -2$$

$$3-5, 4-9 \quad 0 - 4 = -4$$

步骤V

把上面的结果加上基数所能包含的总数，这一步骤为最相似的集合形——有一个 PQI 数 0——或最高值的投射提供依据。

$$3-5, 4-7 \quad 1 + 4 = 5$$

$$3-5, 4-8 \quad -2 + 4 = 2$$

$$3-5, 4-9 \quad -4 + 4 = 0$$

在步骤V中所获得的结果表示与集合型 3-5 有关的三个四音集合的每一个的 PQI 数，因而此 $PQI(3-5, 4-7) = 5$ ， $PQI(3-5, 4-8) = 2$ ， $PQI(3-5, 4-9) = 0$ 。

在这一步骤的主要论据是，0 在集合理论中一般被用作出发点，这时，与其去论及负数，还不如说我们已包含了这一步骤，因而使得 PQI 数开始在 0 上。

三. PQI 的分析细节

因为 PQI 显然用数量表示或以一种特殊的方式讨论了。或许可以从直观上认识到的一种关系。其价值纯然是作为讨论两个部分包含关系的一种“合理的”方法。PQI 还阐明了这些抽象的集合性关系的重要数据。例如，前文采用 3-5 和 4-7、4-8、4-9 来推导 PQI 数据的例子，显示出，尽管 4-8 和 4-9 分别包含有与 3-5 相同的音程型级数，但它们还可能用移位和倒影的方法使 3-5 在它们中呈现不同的数。事实上，我们一般可以说，任何与一个三音集合有相同关系的四音集合，它们都具有相同的 PQI 数据（正如 4-8 和 4-9 与 3-5 的关系一样），亦即，与一个三音集合有关的一个四音集合的 PQI 数总是尽可能通过倒影或移位的方法，表明了完整的音程级包含有两个潜在的相同音级。

在本文的后面，我们给出了与三音集合相关的四音集合所有的 PQI 数据的列表以及每个三音集合 PQI 结果的排列。对这种排列资料的研究导致几种有趣的分析上或作曲意义上的观察。这可以在三音集合 3-3 和 3-4 的排列数据中看到。3-3 和 3-4 各自与四音集合型 4-7 具有最低的 PQI 数（两者的 $PQI=2$ ），亦即，这个四音集合是它们最好的四音投射，其他的四音集合都不可能分别与这两三音集合具有 $PQI=2$ 的相同关系，即（3-3，4-17）= 2，而 $PQI(3-4, 3-17)=4$ ；再 $PQI(3-4, 4-8)=2$ ，而 $PQI(3-3, 4-8)=5$ 。因而，集合型 4-7 这时在 3-3 的及 3-4 的

参照点之间的转换中起了一个“共同和弦”的作用，由于集合型 4-7 与 3-3 和 3-4 的这种唯一性关系，对这种转换来说，它是最合适的四音集合。

这几个例子只代表了对 PQI 潜在分析细节的小部分调查。我们的希望应该是对更多的 PQI 关系进行解释和更为完满的研究。

四 四音集合分别与三音集合 PQI 的数据表

Set-type
(集合型)

Set-type	PQI		
4-1	2	4-17	5
4-2	3	4-18	5
4-3	4	4-19	6
4-4	5	4-20	5
4-5	5	4-21	5
4-6	5	4-22	5
4-7	5	4-23	5
4-8	5	4-24	5
4-9	5	4-25	6
4-10	5	4-26	6
4-11	5	4-27	6
4-12	5	4-28	7
4-13	5	4-29	5
4-14	5		
4-15	5		
4-16	5		

Ranking of PQI number for Set-type 3-1. (集合型) - PQI 数の排列

PQI 0: none

PQI 1: none

PQI 2: 4-1

PQI 3: 4-2

4-4

4-5

4-6

PQI 4: 4-3

PQI 5: 4-7

4-8

4-9

4-10

4-11

4-12

4-13

4-14

4-15

4-16

4-29

PQI 6: 4-17

4-18

4-19

4-20

4-21

4-22

4-23

4-24

4-25

4-26

4-27

PQI 7: 4-28

Set-type 3-2

Ranking of PQI numbers for Set-type 3-2:

Set-type	PQI	PQI 0: none	PQI 1: none	PQI 2:	PQI 3:	PQI 4:	PQI 5:	PQI 6:	PQI 7:
4-1	2								
4-2	3			4-1					
4-3	2			4-3					
4-4	4			4-10					
4-5	5				4-2				
4-6	5				4-11				
4-7	5				4-12				
4-8	6				4-13				
4-9	6				4-14				
4-10	2				4-29				
4-11	3					4-4			
4-12	3					4-15			
4-13	3						4-5		
4-14	3						4-6		
4-15	4						4-7		
4-16	5						4-16		
4-17	5						4-17		
4-18	5						4-18		
4-19	5						4-19		
4-20	5						4-20		
4-21	6						4-22		
4-22	5						4-23		
4-23	5						4-26		
4-24	6						4-27		
4-25	6							4-3	
4-26	5							4-9	
4-27	5							4-21	
4-28	6							4-24	
4-29	3							4-25	
								4-28	
									none

Set-type 3-3

Set-type	PQI
4-1	5
4-2	3
4-3	2
4-4	3
4-5	5

4-6	6
4-7	2
4-8	5
4-9	6
4-10	5
4-11	4
4-12	3
4-13	5
4-14	4
4-15	3
4-16	5
4-17	2
4-18	2
4-19	3
4-20	4
4-21	6
4-22	5
4-23	6
4-24	6
4-25	6
4-26	5
4-27	3
4-28	6
4-29	4

Ranking of PQI numbers for Set-type 3-3:

PQI 0: none

PQI 1: none

PQI 2: 4-3

4-7

4-17

PQI 3: 4-2

4-4

4-12

4-15

4-18

4-19

PQI 4: 4-11

4-14

4-20

4-29

PQI 5: 4-1

4-5

4-8

4-26	5
4-27	5
4-28	7
4-29	4

Ranking of PQI numbers for Set-type 3-4:

PQI 0: none

PQI 1: none

PQI 2: 4-7

4-8

4-20

PQI 3: 4-4

4-5

4-11

4-14

4-16

4-19

PQI 4: 4-15

4-17

4-18

4-29

PQI 5: 4-1

4-2

4-3

4-6

4-9

4-10

4-12

4-13

4-22

4-26

PQI 6: 4-21

4-23

4-24

4-25

PQI 7: 4-28

Set-type 3-5.

Set-type	PQI
----------	-----

4-1	6
-----	---

4-2	6
-----	---

4-10
4-13
4-16
4-22
4-26
4-27

PQI 6:

4-6
4-9
4-21
4-23
4-24
4-25
4-28

PQI 7:

none

Set-type 3-4.

Set-type	PQI
4-1	5
4-2	5
4-3	5
4-4	3
4-5	3
4-6	5
4-7	2
4-8	2
4-9	5
4-10	5
4-11	3
4-12	5
4-13	5
4-14	3
4-15	4
4-16	3
4-17	4
4-18	4
4-19	3
4-20	2
4-21	6
4-22	5
4-23	6
4-24	6
4-25	6

4-3	6
4-4	5
4-5	3
4-6	2
4-7	5
4-8	2
4-9	0
4-10	5
4-11	5
4-12	5
4-13	3
4-14	5
4-15	3
4-16	3
4-17	5
4-18	3
4-19	5
4-20	5
4-21	6
4-22	6
4-23	6
4-24	6
4-25	6
4-26	6
4-27	5
4-28	6
4-29	3

B Ranking of PQI numbers for Set-type 3-5:

PQI 0: 4-9

PQI 1: none

PQI 2: 4-6
4-8

PQI 3: 4-5
4-13
4-15
4-16
4-18
4-29

PQI 5: 4-4
4-7
4-10

4-11
4-12
4-14
4-17
4-19
4-20
4-27

PQI 6:

4-1
4-2
4-3
4-21
4-22
4-23
4-24
4-25
4-26
4-28

PQI 7:

none

Set-type 3-6.

Set-type	PQI
4-1	5
4-2	3
4-3	5
4-4	5
4-5	5
4-6	6
4-7	6
4-8	6
4-9	7
4-10	5
4-11	3
4-12	5
4-13	6
4-14	5
4-15	5
4-16	5
4-17	6
4-18	6
4-19	6
4-20	6
4-21	2
4-22	3

4-23	4
4-24	3
4-25	4
4-26	5
4-27	5
4-28	7
4-29	5

Ranking of PQI numbers for Set-type 3-6:

PQI 0: none

PQI 1: none

PQI 2: 4-21

PQI 3: 4-2

4-11

4-22

4-24

PQI 4: 4-25

PQI 5: 4-1

4-3

4-4

4-5

4-10

4-12

4-14

4-15

4-16

4-23

4-26

4-27

4-29

PQI 6: 4-6

4-7

4-8

4-13

4-17

4-18

4-19

4-20

PQI 7: 4-9

4-28

Set-type 3-7.

Set-type	PQI
4-1	5
4-2	5
4-3	5
4-4	2
4-5	5
4-6	5
4-7	5
4-8	6
4-9	6
4-10	2
4-11	3
4-12	5
4-13	3
4-14	4
4-15	3
4-16	5
4-17	5
4-18	5
4-19	5
4-20	5
4-21	6
4-22	3
4-23	2
4-24	6
4-25	6
4-26	2
4-27	3
4-28	6
4-29	4

Ranking of PQI numbers for Set-type 3-7:

PQI 0: none

PQI 1: none

PQI 2: 4-10
4-23
4-26

PQI 3: 4-4
4-11
4-13
4-15
4-22