計算方法

伊·彼·梅索夫斯基赫著

人民教育出版社

計算方法

伊·彼·梅索夫斯基赫著
吉林大学計算数学教研室譯

人民教育出版社

本書是吉林大學数学系苏联专家伊·彼·梅索夫斯基赫(И. П. Мысовских) 在該系講課的同时編写的。本書主要內容有：数値方程的解、代数內插、积分近似計算、常微分方程的数値解法、綫性代数計算方法等五部分。

本書可作为綜合大學数学系和师范学院数学系"計算方法"課程的教学用書。

本書由吉林大学計算数学教研室翻譯。

計　算　方　法

伊·彼·梅索夫斯基赫著

吉林大学計算数学教研室譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內象鼻寺7号

(北京市書刊出版业营业許可証出字第2号)

京华印書局印裝　新华書店發行

統一書号 13010·739 开本 850×1168 1/32 印張 1835/16

字数 337,600 印数 00001—10,000 定价 (6) ¥ 1.30

1960年5月第1版　1960年5月北京第1次印刷

序 言

本書是作者于一九五七—一九五八学年及一九五八—一九五九学年第一学期在吉林大学为教师、研究生及学生講授“計算方法”課的同时編写的。

書中包括:

1) 数值方程(代数方程及超越方程)的解法;

2) 代数內插;

3) 积分的近似計算;

4) 常微分方程柯西問題的数值解法;

5) 綫性代数計算法。

上列各項同时也是本書各章的名称。

在叙述方法及其理論的时候,我們尽量注意了下列几点:

1) 方法的收斂性及收斂速度;

2) 近似解的誤差估計。

在研究誤差估計时,我們沒有考虑舍入誤差,換句話說,我們只指出了“理想方法”的誤差估計。所謂理想方法是指这样的方法,在应用它計算时是按无穷位小数(例如十进小数)进行的。考虑到舍入誤差的誤差估計是很困难的,而且对大多数方法迄今还沒有研究过。

在叙述方法的理論同时,我們在講課所容許的范圍內尽量注意实际計算,并假定听課者在听課的同时还要进行計算实习。

在講授前四章的时候,我曾利用克雷洛夫(В. И. Крылов)于一九五五—一九五六学年在列宁格勒大学数学力学系講授計算方法时学生所作的記录,В. И. 克雷洛夫教授容許利用这些記录并且閱讀了本書前三章,作者对他表示衷心的感謝。

达烏加越特(И. К. Дaугáвет)閱讀了本書前三章并提供了自己的意見。本書所引进的大部分例題的計算是在我的指导下由李岳生、李荣华及馮果忱同志进行的。对所提到的这些人我表示深切的謝意。

И. П. 梅索夫斯基赫

一九五九年二月于長春

譯者的話

本書內容是苏联专家 И. П. 梅索夫斯基赫在吉林大学数学系講授的"計算方法"的一部分、經得专家的同意,我們把它翻譯整理出版。

本書取材精炼,又包含了最重要最基本的計算方法。本書的另一特点是,它不只对方法的实际应用給予了很大的注意,而且也注意了收斂性、誤差估計等理論問題的研究,这是为一般計算方法書所不及的。我們認为,这本書的出版,对我国当前綜合性大学和其他高等学校开設計算方法課;对广大初学計算方法的同志,都将是十分有益的。

根据我們的体驗,我們感到在采用本書作教科書时,还必須注意如下两点。第一、由于本書內容原来是为吉林大学数学系高年級学生、研究生和教师講授的,个别章节的內容也可能多了些或深了些。因此,为了不致使学生負担过重,在进行講授时可酌情删去第三章的§3 §5 §6 §9 §10, 第五章的§9 §10 §16 和§14—15 的 M. K. 加伍林方法。第二、本書未涉及到的如差分法、变分方法和积分方程的数値解法等解数学物理問題的重要方法。因此在采用本書作教材时,应当参照 Л. B. 康托洛維奇和 B. И. 克雷洛夫合著的"高等分析近似方法"及胡祖熾先生編的"計算方法"作适当的补充。

本書是我室李岳生、馮果忱、李荣华等同志在学习这个課的过程中翻譯的。在这次付印之先,又作了一次校对和整理。在翻譯本書的第一章及第三章的§§1—8 时,还参考了陈家正、莫孜中等同志的譯稿。最后,讓这們感謝专家对我們的热情指导和帮助。

吉林大学計算数学教研室 1959 年 12 月 24 日

目 录

序言 …… v

譯者的話 …… vii

第一章 数値方程的解法 …… 1

§1. 引言 …… 1
§2. 初始近似的寻求 …… 1
§3. 弦截法 …… 3
§4. 迭代法 …… 6
§5. 解方程組的迭代法 …… 12
§6. 秦九韶程序 …… 16
§7. 牛頓法 …… 19
§8. 牛頓法的收斂性定理 …… 22
§9. 实际应用牛頓法的几点意見 …… 35
§10. 罗巴切夫斯基方法 …… 45
§11. 次后余式法 …… 55

第二章 代数內插 …… 61

§1. 引言 …… 61
§2. 有限差 …… 63
§3. 差商 …… 70
§4. 內插法的一般問題 …… 76
§5. 按函数值內插的拉格朗日內插值多項式及牛頓內插多項式 …… 78
§6. 关于按函数値內插的余項 …… 83
§7. 等距节点的內插，表初及表末內插的牛頓公式 …… 86
§8. 等距节点的內插，高斯公式，斯特灵公式及貝塞尔公式 …… 91
§9. 反內插，无差分过程的內插 …… 99
§10. 埃尔米特內插 …… 103

第三章 积分的近似計算 …… 112

§1. 內插求积公式 …… 112
§2. 最簡单的內插求积公式 …… 116
§3. 高斯型求积公式 …… 126
§4. 勒讓得尔多項式与高斯公式 …… 135

§5. 与雅可比、切比雪夫-埃尔米特及切比雪夫-拉盖尔多項式相联系的最高精确度求积公式 ……141
§6. 馬尔柯夫型求积公式 ……149
§7. 切比雪夫求积公式 ……163
§8. 对周期函数的最高三角精确度求积公式 ……167
§9. 伯努里数与伯努里多項式 ……171
§10. 用伯努里多項式表示函数 ……181
§11. 欧拉-麦克洛林公式 ……186

第四章 常微分方程的数値解法 ……196
§1. 引言 ……196
§2. 阿当姆斯方法 ……197
§3. 進表头 ……202
§4. 阿当姆斯内插法 ……211
§5. 具最速下降系数的求积公式 ……222
§6. 一阶方程組的数値积分 ……236
§7. 斯特尔姆方法 ……238
§8. 类似于阿当姆斯内插法的方法 ……245
§9. 庫埃尔方法 ……252
§10. 龙格-庫格方法 ……258

第五章 綫性代数計算方法 ……268
§1. 引言 ……268
§2. 向量空間 ……270
§3. 矩陣 ……277
§4. 矩陣的固有向量 ……284
§5. 矩陣的模和矩陣的收斂性概念 ……293
§6. 解綫性代数方程組的精确法•高斯消去法 ……306
§7. 迭代法 ……325
§8. 賽德尔法 ……332
§9. 最速下降法 ……340
§10. 共軛斜量法 ……350
§11. 关于解綫性代数方程組的几点說明 ……364
§12. 求矩陣的特征値的精确方法 ……368
§13. 計算矩陣特征値的迭代法 ……377
§14. 加快計算特征値的迭代法的收斂速度 ……393
§15. 加快解綫性代数方程組的迭代法的收斂速度 ……406
§16. 近似矩陣的特征値的分布 ……413

第一章　数值方程的解法

§1. 引　言

在数学和应用科学中，常常需要解方程式

$$P(x)=0.$$

其中 $P(x)$ 是某一函数（一般說来是复值函数）。只对很特殊类型的函数 $P(x)$。求根的問題才能通过閉合形式精确地解决。不过在很多情况下，根的精确値是并不需要的，只需要它的近似値。在这种情况下数值方法便能帮助我們。我們注意，甚至当方程可以精确求根，例如 $P(x)$ 是不超过四次的多項式的情形，应用数值方法也比用根的精确的根式表达式好得多。

我們将研究如下一些求解方程的数値方法：弦截法、迭代法、牛頓(Newton)法、罗巴切夫斯基(Лобачевский)方法以及次后余式法。

§2. 初始近似的导求

上面列举的方法，除了罗巴切夫斯基方法之外，都是精确化方法，换句話說，如果知道了根的近似値——我們叫做初始近似，便可以采用它們。在談到“根的初始近似”的时候，我們当然假定根是存在的。以后在叙述方法时，将指出一些充分条件，它們使我們能按初始近似及方程的左端作出关于解存在的結論。

为确定初始近似，在許多情况下采用图解法。譬如，若 $P(x)$ 是实函数，且談的是求方程

$$P(x)=0$$

的实根，那么画出函数 $y=P(x)$ 的粗略的图形，其与坐标軸 $-x$ 交点

的横坐标便可取作根的初始近似。有时把方程 $P(x)=0$ 写成

$$P_1(x)=P_2(x)$$

的形式是合适的，描出函数 $y=P_1(x)$ 与 $y=P_2(x)$ 的图形，这种图形交点的横坐标便可取作方程的根的初始近似。

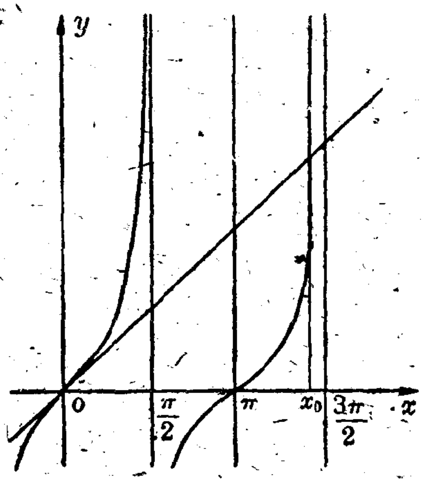

图 1.2.1

例 1　决定方程

$$x=\operatorname{tg} x$$

的最小正根的初始近似。

取 $P_1(x)=x$，$P_2(x)=\operatorname{tg} x$。函数 $y=x$ 与 $y=\operatorname{tg} x$ 的图形描在图上。由图看出，可以取 $x_0=4.5$ 为初始近似。

为决定初始近似，也可造函数值表。

例 2　求方程

$$P(x)=x^3+x-1=0$$

的根的初始近似。造函数值表

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$

可取 0 或 1 为初始近似，但很明显取 $x_0=0.5$ 更好些。

图解法也可用来求复根的初始近似。这就需要把 $P(x)$ 的实部和虚部分开

$$P(x)=P_1(u, v)+iP_2(u, v);\quad x=u+iv,$$

在 (u, v) 坐标系中描绘由方程

$$P_1(u, v)=0,\quad P_2(u, v)=0,$$

所确定的曲线的图形。曲线交点可取为 $P(x)=0$ 的根的初始近似。譬如，若 (u_0, v_0) 是交点之一，则取 $x_0=u_0+iv_0$ 为初始近似。

有时取接近于方程 $P(x)=0$ 求且其根又易于出的方程的根作为初始近似。

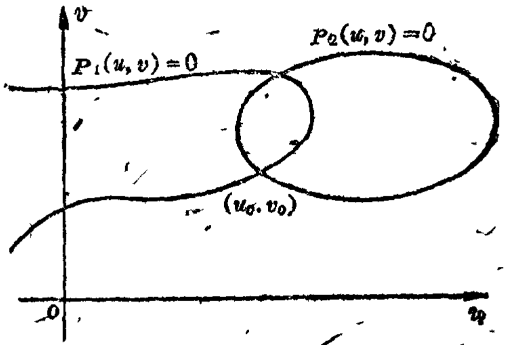

图 1.2.2

例 3 求方程

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}-1=0$$

的初始近似。

取方程

$$\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-1=0$$

为近似方程，这一方程的正根取为初始近似(负根越出方程中所含級数的收斂范圍)。

§3. 弦截法

弦截法可用来求方程

$$P(x)=0 \tag{1.3.1}$$

的实根，其中 $P(x)$ 假定是实連續函数。設已知一区間 (a, b)，对于它满足条件

$$P(a)P(b)<0,$$

則在这一区間內至少有方程(1.3.1)的一根。我們假定在(a, b)內只有方程(1.3.1)的一个根。如果函数在 (a, b) 上严格单調，特别若函数是可微的且于 (a, b) $P'(x)>0$ 或 <0，則显然根的唯一性成立。

在区間(a, b)上的 $y=P(x)$ 曲綫图，用过点 $(a, P(a))$ 和$(b, P(b))$ 的直綫替代，这一直綫与 x 軸的交点記为 x_1。取点 x_1 为根的新的近

似。若 $P(x_1)\neq 0$, 則必

$$P(a)P(x_1)<0, \text{ 或 } P(x_1)P(b)<0,$$

例如設 $P(x_1)P(b)<0$。从区間 $(x_1, b)=(a_1, b_1)$ 出发，我們求得次一近似 x_2，如此繼續下去。

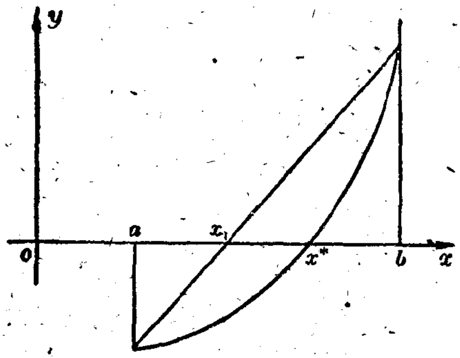

图 1.3.1

写出过点 $(a, P(a))$ 和 $(b, P(b))$ 的直綫方程

$$y=P(a)+\frac{P(b)-P(a)}{b-a}(x-a).$$

定出它与 x 軸的交点

$$x_1=a-\frac{P(a)}{P(b)-P(a)}(b-a).$$

这就是在弦截法中所采用的計算公式。

不難看出，当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x^*$, x^* 是我們所要求的根。

弦截法求根的計算安排成如下的两个表是方便的。

表 I

x				$P(x)$
a				$P(a)$
b				$P(b)$
x_1				$P(x_1)$

表 II

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$P(a_n)$	$P(b_n)$	$P(b_n)-P(a_n)$	$\frac{b_n-a_n}{P(b_n)-P(a_n)}$	$\Delta_n=\frac{b_n-a_n}{P(b_n)-P(a_n)}P(a_n)$	$x_{n+1}==a_n-\Delta_n$
0	a	b	$b-a$	$P(a)$	$P(b)$	$P(b)-P(a)$	$\frac{b-a}{P(b)-P(a)}$	$\Delta_0=\frac{b-a}{P(b)-P(a)}P(a)$	$x_1=a-\Delta_0$
1	a_1	b_1							

首先計算 $P(a)$, $P(b)$, 这些計算全部記录在表 I 的头两行中，然后塡写表 II 中对应 $n=0$ 的那一行。我們得到 x_1。再后我們便能塡写表 I 的第三行且获得 $P(x_1)$。依 $P(x_1)$ 的符号决定 a_1, b_1 并塡写表 II 对应 $n=1$ 的那一行，便得到 x_2, 如此繼續下去。

例 取 $a=0$, $b=1$, 用弦截法解方程式

$$P(x)=x^3+x-1=0.$$

計算結果列在表 I 和表 II 中。

表 I

x	x^2	x^3	$P(x)=x^3+x-1$
0	0	0	−1
1	1	1	1
0.5	0.25	0.125	−0.375
0.6364	0.4050	0.2577	−0.1059 *)
0.7	0.49	0.343	0.043
0.6816	0.4646	0.3167	−0.0017
0.6823	0.4655	0.3176	−0.0001

*) 进一步的計算中，本該取 $b_2=1$, 但我們看出根接近 0.6364, 又預先能确定 $P(0.7)>0$, 故取 $b_2=0.7$。

表 II

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$P(a_n)$	$P(b_n)$	$P(b_n)-P(a_n)$	$\frac{b_n-a_n}{P(b_n)-P(a_n)}$	Δ_n	$x_{n+1}=a_n-\Delta_n$
0	0	1	1	−1	1	2	0.5	−0.5	0.5
1	0.5	1	0.5	−0.375	1	1.375	0.3636	−0.1364	0.6364
2	0.6364	0.7	0.0636	−0.1059	0.043	0.1489	0.4271	−0.0452	0.6816
3	0.6816	0.7	0.0184	−0.0017	0.043	0.0447	0.4116	−0.0007	0.6823
4	0.6823	0.7	0.0177	−0.0001	0.043	0.0431	0.4107	0	0.6825

由于 x_3 与 x_4 已有四位小数重合，計算停止。为要获得根的更精确的值，須要用更多位小数作进一步的計算。

§4. 迭代法

迭代法既可用来求方程

$$P(x)=0$$

的实根，也可求它的复根。我們將假設有根的初始近似 x_0。为应用迭代法，須將方程变換成等价方程

$$x=\varphi(x). \tag{1.4.1}$$

这种变換可以通过多种方式进行，例如

$$x=x-R(x).$$

迭代法归結如下。决定序列 $\{x_n\}$：

$$x_1=\varphi(x_0);\quad x_2=\varphi(x_1);\quad \cdots;\quad x_{n+1}=\varphi(x_n);\quad \cdots$$

如果序列 $\{x_n\}$ 有极限 x^*，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$，而函数 $\varphi(x)$ 連續，則 x^* 便是方程(1.4.1)的解。为証这一点，只須在关系

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

中叫 $n\to\infty$ 而取极限。下面建立起一条定理，它提供出序列 $\{x_n\}$ 收斂的充分条件。数値 x_n 取作根的近似値。

就(1.4.1)中的 $\varphi(x)$ 是实函数且求实根的情形，我們先来給出迭代法的几何解釋。在图 1.4.1 上，描出了 $y=x$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形。它們交点的横坐标 x^* 是所要求的根；x_0 是初始近似。为决定 x_1——根的第一次近似，过 $(x_0, 0)$ 画一平行于 y 軸的直綫，至它与 $y=\varphi(x)$ 相交为止，此交点記为 M，过 M 点画一平行于 x 軸的直綫，至它交 $y=x$ 于 N 点为止，显然点 N 的横坐标与 x_1 相一致。

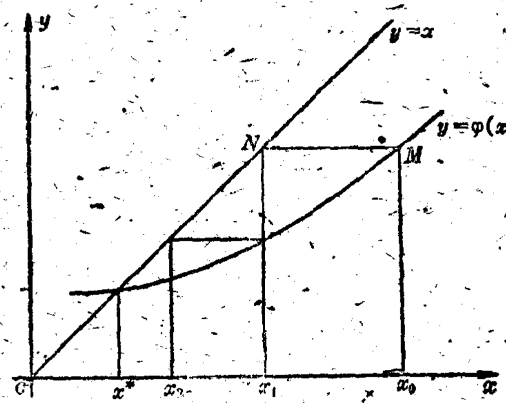

图 1.4.1

現在我們来証迭代法的收斂性定理。

定理 設对方程(1.4.1) $x=\varphi(x)$ 及初始近似 x_0 滿足如下条件：

1) 函数 $\varphi(x)$ 对取自圓域

$$|x-x_0|\leqslant\delta \tag{1.4.2}$$

內的任二点 x', x'' 滿足不等式

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant q|x'-x''|, \tag{1.4.3}$$

其中 $0<q<1$；

2) 不等式

$$\frac{m}{1-q}\leqslant\delta \tag{1.4.4}$$

成立，其中 $m=|x_0-\varphi(x_0)|$。

則方程(1.4.1)在圓域(1.4.2)內有唯一解 x^*，逐次近似 x_n 收斂到此 x^*，且收斂速度由不等式

$$|x_n-x^*|\leqslant\frac{m}{1-q}q^n \tag{1.4.5}$$

确定。

証明　我們来确定，$x_k(k=0,1,2,\cdots)$屬于圓域(1.4.2)。由于不等式(1.4.4)有

$$|x_1-x_0|=|\varphi(x_0)-x_0|=m<\frac{m}{1-q}\leqslant\delta.$$

或$|x_1-x_0|<\delta$，这就意味着x_1屬于圓域(1.4.2)。

据x_2,x_1的定义，有

$$x_2-x_1=\varphi(x_1)-\varphi(x_0).$$

由于x_1和x_0屬于圓域(1.4.2)，故可用不等式(1.4.3)，我們得

$$|x_2-x_1|=|\varphi(x_1)-\varphi(x_0)|\leqslant q|x_1-x_0|=qm.$$

显然

$$|x_2-x_0|\leqslant|x_2-x_1|+|x_1-x_0|\leqslant qm+m<\frac{m}{1-q}\leqslant\delta.$$

此即x_2屬于圓域(1.4.2)。

运用数学归納法，設当$k=1,2,\cdots,n$时x_k屬于圓域(1.4.2)且滿足不等式

$$|x_k-x_{k-1}|\leqslant mq^{k-1}.$$

証明x_{n+1}也具有这种性質。利用归納假定及不等式(1.4.3)，得

$$|x_{n+1}-x_n|=|\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})|\leqslant q|x_n-x_{n-1}|\leqslant qmq^{n-1}=mq^n$$

或
$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant mq^n. \tag{1.4.6}$$

由归納假定及不等式(1.4.6)得

$$|x_{n+1}-x_0|\leqslant|x_{n+1}-x_n|+|x_n-x_{n-1}|+\cdots+|x_1-x_0|\leqslant$$
$$\leqslant mq^n+mq^{n-1}+\cdots+mq+m<\frac{m}{1-q}\leqslant\delta.$$

上述断言获証。

显然，我們有

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant$$
$$\leqslant mq^{n+p-1}+\cdots+mq^n<\frac{m}{1-q}q^n.$$

或
$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{m}{1-q}q^n. \tag{1.4.7}$$

因为 $0<q<1$ 故 $\{x_n\}$ 是基本序列从而有屬于圓域(1.4.2)的极限 x^*。而由于条件(1.4.3)所推出的 $\varphi(x)$ 的連續性，x^* 便是方程 $x=$ $=\varphi(x)$ 的解。

再証在圓域(1.4.2)內 x^* 的唯一性。設 $\tilde{x}$ 是方程(1.4.1)在圓域(1.4.2)內的某一根，証明 $\tilde{x}=x^*$，基于不等式(1.4.3)有

$$|\tilde{x}-x^*|=|\varphi(\tilde{x})-\varphi(x^*)|\leqslant q|\tilde{x}-x^*|.$$

这只有 $\tilde{x}=x^*$ 才可能，因为 $0<q<1$。

为了建立表征收斂速度的不等式，只要在不等式(1.4.7)中令 $p\to\infty$ 而取极限。定理証完。

如果 $\varphi(x)$ 是复变函数，在圓域(1.4.2)內可微且对圓上所有点不等式成立

$$|\varphi'(x)|\leqslant q<1 \qquad (1.4.8)$$

則函数 $\varphi(x)$ 滿足定理的条件 1)。

事实上，設 x', x'' 屬于圓域(1.4.2)，从公式

$$\varphi(x')-\varphi(x'')=\int_{x''}^{x'}\varphi'(x)dx$$

此中积分是沿着連接点 x' 和 x'' 的直綫段取的，可得

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant \max|\varphi'(x)|\cdot|x'-x''|\leqslant q|x'-x''|.$$

如果函数 $\varphi(x)$ 是实的且是求实根，則自然初值 x_0 也取成实数。并且只須定理条件在实数軸区間

$$|x-x_0|\leqslant\delta$$

上滿足。

我們指出，条件 $\max|\varphi'(x)|\leqslant q<1$ 对迭代法的收斂性是很实質的。

对实函数及实根的情形，这种情况由图 1.4.2 可很好地說明。

自然地按如下格式記录計算結果。