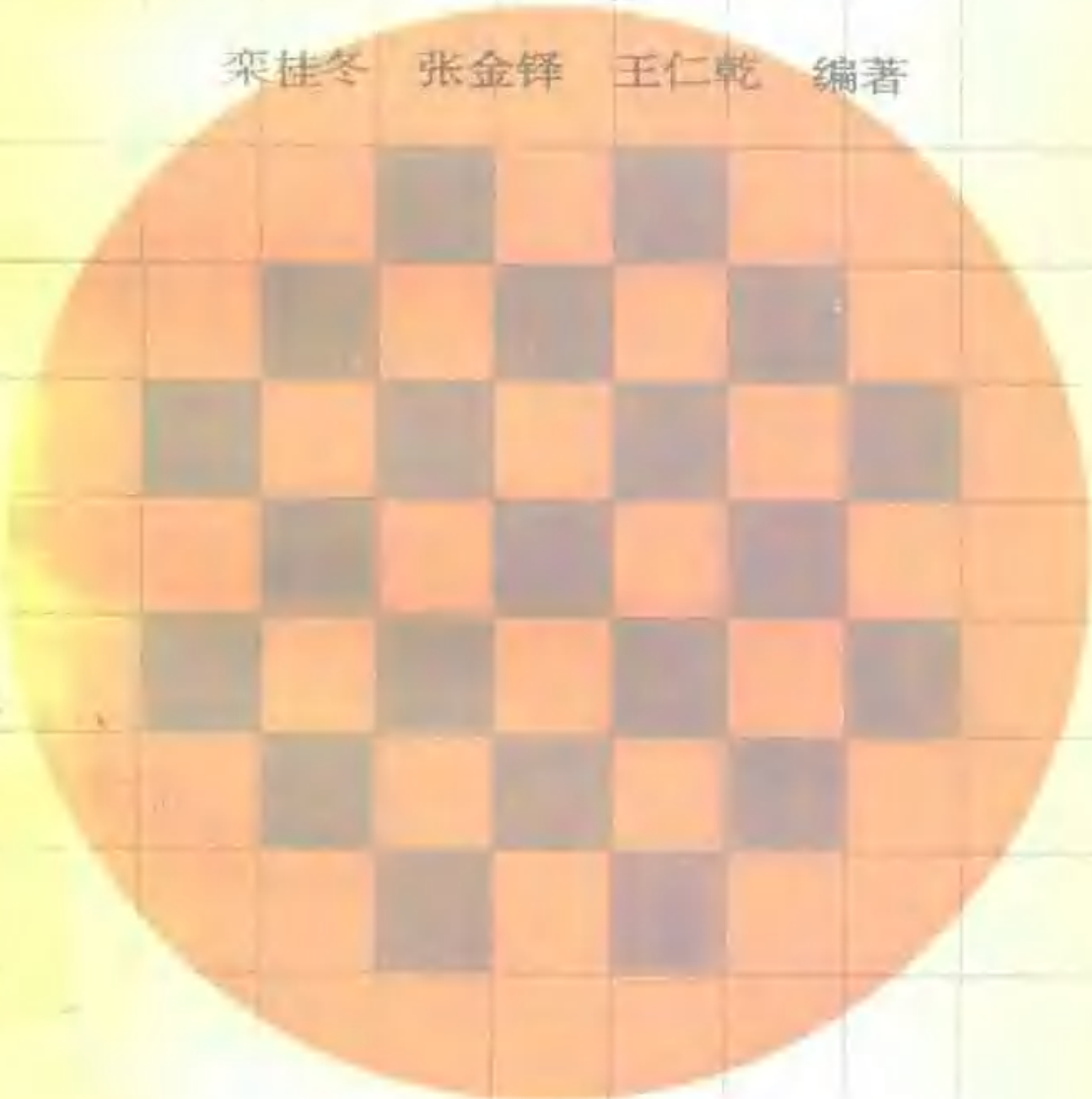


压电换能器 和换能器阵

下 册

栾桂冬 张金铎 王仁乾 编著



北京大学出版社

346888

压电换能器和换能器阵

下 册

栾桂冬 张金铎 王仁乾 编著



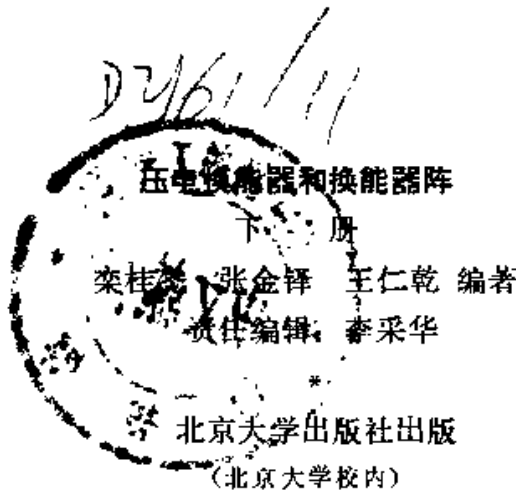
北京大学出版社

内 容 简 介

本书内容由浅入深，着重阐明压电换能器和换能器阵的基础理论，对换能器和换能器阵中所涉及的重要问题作了重点讨论并概述了发展动态。

全书分上下两册，共十五章。上册包括第一章至第九章，下册包括第十章至第十五章。第一章引言；第二、三、四章为压电换能器的基础知识；第五、六、七、八章介绍几种常见的典型压电换能器；第九章介绍暂态效应；第十章讨论压电弹性体的数值分析方法；第十一章介绍换能器主要参数的测量方法，第十二章为换能器阵的理论基础；第十三、十四章介绍均匀和非均匀换能器阵；第十五章简介几种新型换能器阵。

本书可作为高等院校声学专业换能器和换能器阵课程的教材，亦可供从事声学研究及其他有关专业的大专院校教师及工程技术人员参考。



北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米] 32开本 10.5印张 260千字

1990年9月第一版 1990年9月第一次印刷

印数：0001—2,000册

ISBN 7-301-01095-8/O·185

定价：5.15元

下 册 目 录

第十章	压电弹性振动体的数值分析方法	(1)
10.1	有限差分法	(1)
10.1.1	差商、截断误差	(1)
10.1.2	将微分方程化为差分方程	(4)
10.1.3	偏微分方程的差分方程的构成及求解	(7)
10.1.4	差分方程的收敛性	(10)
10.1.5	差分方程的稳定性	(10)
10.1.6	曲线边界的处理	(11)
10.1.7	薄片压电振子分析——例题	(14)
10.2	有限元法	(18)
10.2.1	线性压电弹性动力学问题的哈密顿原理	(19)
10.2.2	最简单的有限元法——长度振动的压电晶体片形 换能器分析	(31)
10.2.3	压电振子的有限元法振动分析	(46)
10.3	有限元法和有限差分法的比较	(83)
第十一章	换能器测量	(85)
11.1	阻抗与等效电路的测量	(85)
11.1.1	导纳圆图法	(86)
11.1.2	传输线路法	(97)
11.2	换能器发送效率的测量	(108)
11.2.1	阻抗法	(109)
11.2.2	直接法 (三电压法)	(110)
11.3	指向性图的测量	(113)
11.4	换能器自由场校准	(116)
11.4.1	名词术语	(116)
11.4.2	互易法校准	(118)

11.4.3	比较法校准	(125)
第十二章	换能器阵的理论基础	(129)
12.1	阵的指向性	(129)
12.2	表征阵性能的参数	(131)
12.2.1	指向性函数	(131)
12.2.2	空间增益 (阵增益)	(143)
第十三章	均匀换能器阵	(166)
13.1	均匀线列阵	(167)
13.1.1	指向性函数	(167)
13.1.2	指向性图的分析 and 指向性参量	(169)
13.1.3	相控阵的指向特性	(175)
13.1.4	宽(频)带线列阵的功率指向性响应函数	(180)
13.1.5	线列阵空间增益	(180)
13.2	均匀线阵	(183)
13.2.1	指向性函数、指向性图	(183)
13.2.2	阵的指向性参量	(184)
13.2.3	阵的空间增益	(185)
13.3	点源均匀圆弧阵	(185)
13.3.1	指向性函数	(186)
13.3.2	阵的指向性参量	(188)
13.3.3	空间增益	(189)
13.4	点源椭圆阵	(191)
13.4.1	指向性函数	(191)
13.5	圆形活塞阵和椭圆形活塞阵	(192)
13.5.1	指向性函数	(192)
13.5.2	指向性参量	(194)
13.5.3	空间增益	(195)
13.6	平面环形阵	(197)
13.7	矩形活塞阵	(198)
13.8	球体阵和球壳阵	(199)

13.8.1	球体阵	(199)
13.8.2	球壳阵	(201)
13.9	线列阵组合平面阵	(203)
13.9.1	指向性函数	(203)
13.9.2	指向性参量	(205)
13.9.3	空间增益	(206)
13.10	线阵组合平面阵、条形阵组合平面阵、矩形阵组合平面阵	(209)
13.11	线列阵组合圆弧阵和线阵组合圆弧阵	(210)
13.11.1	指向性函数和指向性参量	(210)
13.11.2	空间增益	(212)
第十四章	非均匀换能器阵	(216)
14.1	换能器阵的指向性综合	(216)
14.1.1	函数变换法	(216)
14.1.2	函数逼近法	(223)
14.1.3	数学规划法	(234)
14.2	非均匀复合阵	(240)
14.3	不等距阵	(247)
14.3.1	不等距阵的特点及设计方法	(247)
14.3.2	随机阵	(248)
14.4	恒定束宽阵	(254)
14.4.1	恒定束宽线列阵的设计	(255)
14.4.2	恒定束宽圆弧阵的设计	(269)
14.5	阵元间互辐射阻抗及其对阵指向性的影响	(270)
第十五章	几种新型换能器阵的简介	(277)
15.1	参量阵	(277)
15.1.1	参量发射阵的原理和指向性函数	(277)
15.1.2	参量接收阵的原理和指向性函数	(283)
15.2	乘积阵	(285)
15.2.1	指向性函数为 $\sin \Omega x/x$ 的函数的乘积阵	(285)
15.2.2	线列阵分裂组成的乘积阵	(287)

15.2.3	时间平均相乘阵	(289)
15.2.4	双阵元等效多阵元线列阵	(292)
15.2.5	双阵元等效契比雪夫束控阵	(293)
15.2.6	波利哈特阵	(294)
15.3	综合孔径阵	(296)
15.4	自适应换能器阵	(298)
15.4.1	空间固定方向上干扰信号的抑制	(298)
15.4.2	自适应阵——自控的空间方位滤波器	(301)
15.5	聚焦阵(聚焦探头)	(310)
15.5.1	凹面球形聚焦探头	(310)
15.5.2	电子聚焦探头	(317)
索引		(322)

第十章 压电弹性振动体的 数值分析方法

压电换能器是当前声学技术中应用最广泛的换能器，对它的振动分析是设计换能器的基础。多年来发展的解析计算方法，一般说来仅能在简单情况下得到结果，对于形状不规则、非均匀、各向异性的复杂压电结构的振动分析，就相当困难，甚至束手无策。

有限差分方法和有限元法是解偏微分方程的主要的数值方法。随着大型计算机的发展，数值解法被广泛地运用到各个领域。有限差分法和有限元法在压电弹性体动力分析中也逐渐得到了应用。下面我们结合压电弹性振动分析对上述两种方法分别作一简单介绍。

10.1 有限差分法

有限差分法是从物理模型出发，列出相应的微分方程及定解条件，然后用差商代替微商进行离散化，得到差分方程而求解。

10.1.1 差商、截断误差

在分析结构体振动问题时，经常会遇到波动方程的混合问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ x=0 \text{ 时 } u &= \mu_1(t) \\ x=l \text{ 时 } u &= \mu_2(t) \\ t=0 \text{ 时 } u &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

当然，为保证解的连续性，所给的初始条件和边界条件要满足相容性条件： $\varphi(0) = \mu_1(0)$ ， $\varphi(l) = \mu_2(0)$ 。

这个问题的解 $u(x, t)$ 的偏微商是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

当自变量增量 Δt 和 Δx 适当小时

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

我们称

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \quad \text{和} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

函数值增量与自变量增量的比值为差商。当然，用差商近似代替微商的方法并不唯一，例如

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

称为函数 $u(x)$ 在 x 点的向前差商，

$$\frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

称为向后差商，而

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

称为中心差商。这样，函数的一阶微商就可用向前差商，向后差商或中心差商中任何一种来近似。

当 Δx 取某定值 h 时，差商

$$\frac{u(x + h) - u(x)}{h}$$

就是 x 的函数，自然还可以对它求差商。一阶差商的差商称为二

阶差商，它是二阶微商的近似值。

我们一般用向前差商的向后差商（或向后差商的向前差商）近似二阶微商，即用

$$\frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

近似二阶微商，更高阶微商的近似可依次类推。

用差商代替微商，必然会带来误差，为此，对误差必须进行估计。

假设所考察的解 $u(x, t)$ 足够光滑（即具有所需的各阶偏微商），由泰勒展开式有

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) - \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + O(h^5)$$

于是

$$\left. \begin{aligned} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) &= \frac{h}{2!} u''(x) + \dots = O(h) \\ \frac{u(x) - u(x-h)}{h} - u'(x) &= -\frac{h}{2!} u''(x) + \dots = O(h) \\ \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) &= \frac{h^2}{3!} u'''(x) + \dots = O(h^2) \\ \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) &= \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x) + \dots = O(h^2) \end{aligned} \right\} (10.2)$$

从这里可以看到，所取的差商形式不同，用它们代替微商所带来的误差也不同，这个误差是截去展开式中高阶项而引起的，称之为截断误差。用向前差商或向后差商来近似 du/dx ，其截断误差是与 h 同阶小量，而用中心差商来近似 du/dx ，其截断误差就减小为与 h^2 同阶的小量。对二阶微商来说，用

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

来近似 d^2u/dx^2 ，其截断误差也是与 h^2 同阶的小量。

10.1.2 将微分方程化为差分方程

考察上节中波动方程的混合问题(10.1)，假设求稳态振动解，问题(10.1)化成边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 u &= 0 \\ x=0, \quad u &= \mu_1 \\ x=l, \quad u &= \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

其中 ω 为稳态振动角频率。

将求解区间 $[0, l]$ 分成 N 等分，其每段长为 l/N ，称之为步长，而分点 $x_0 = 0, x_1 = l/N, x_2 = 2l/N, \dots, x_N = l$ 称为节点。

设该问题精确解 $u = u(x)$ 在节点 x_k 上之值为 $u_k = u(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$)。在每个内节点 x_k ($k = 1, 2, \dots, N-1$) 上，将(10.3)中的微商用相应的差商代替。为了尽可能提高精度，使截断误差在 $h^2 = (l/N)^2$ 阶，可在每个内节点 x_k 上将(10.3)改写成

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 u_k = O(h^2)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-1) \quad (10.4)$$

对于边界节点有

$$u_0 = \mu_1, \quad u_N = \mu_2$$

略去(10.4)中截断误差项 $O(h^2)$ ，就可得近似求解边值问题

(10.4)的差分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{u}_{k+1} - 2\bar{u}_k + \bar{u}_{k-1}}{h^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \bar{u}_k &= 0 \\ (k = 1, 2, \dots, N-1) \\ \bar{u}_0 &= \mu_1 \\ \bar{u}_N &= \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

这里, 由于差分方程(10.5)的解 \bar{u} 与原边值问题(10.3)的解 u 一般是不相同的, 故用不同的符号表示。

(10.5)式可视为含 $N+1$ 个未知量 $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$ 的线性代数方程组, 方程个数是 $N+1$ 个。

在应用上, 边界条件还可能遇到如下形式:

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad \frac{du}{dx} &= \varphi_1 u + \mu_1 \\ x=l, \quad \frac{du}{dx} &= \varphi_2 u + \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

这里 $\varphi_1, \varphi_2, \mu_1, \mu_2$ 都是已知常数。为了列出差分方程, 对(10.6)式中的微商 du/dx 也要用相应的差商来代替, 但由于我们只限于在 $N+1$ 个节点上考虑问题, (10.6)中第一式只能用向前差商 $(u_1 - u_0)/h$ 代替, 第二式只能用向后差商 $(u_N - u_{N-1})/h$ 代替, 于是, (10.1)式中后二式要更换为

$$\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{h} = \varphi_1 \bar{u}_0 + \mu_1, \quad \frac{\bar{u}_N - \bar{u}_{N-1}}{h} = \varphi_2 \bar{u}_N + \mu_2 \quad (10.7)$$

若令

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_{N-1} \\ \bar{u}_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$a_1 = c_1 = 1, \quad b_1 = \left(\frac{\omega}{a} \cdot h\right)^2 - 2$$

则(10.5)式变为

$$A\bar{u} = C \quad (10.8)$$

当 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (例如两端固定的弦的自由振动) 时, 简化成 $A\bar{u} = 0$.

\bar{u} 有非零解的必要条件是 $|A| = 0$, 由此可得固有振动频率 ω_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$), 与 ω_i 相应得到的解 \bar{u}_i 即为该频率下的振动模式.

若(10.5)式的边界条件变为(10.6), 则

$$A = \begin{bmatrix} -(1 + h\varphi_1) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 - h\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} h\mu_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h\mu_2 \end{bmatrix}$$

应该指出，系数矩阵 A 的特点是它仅在其主对角线及相邻两条对角线上有非零元素，称三对角阵。对以三对角阵为系数矩阵的线性方程组，除了可用主消元法、迭代法等方法解外，还可用追赶法求解，这里不再详述。

10.1.3 偏微分方程的差分方程的构成及求解

一个函数的偏微商是相应的差商当自变量的增量趋于零时的极限，因此，在自变量的增量适当小时，可以用差商来近似地代替偏微商，这样可得到偏微分方程相应的差分方程，例如问题

(10.1)，将 x 轴上区间 $[0, l]$ 分成 J (正整数) 等分，每段步长为 $\Delta x = l/J$ ，并设 $x_j = j\Delta x$ ($j = 0, 1, 2, \dots, J$)，

通过这些分点作平行于 t 轴的直线，又设时间步长为 Δt ，对 t 轴分划并记 $t_n = n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，通过这些分

点作平行于 x 轴的直线，这两族平行于坐标轴的直线把

考察的求解区域 $R(0 \leq x \leq l, t \geq 0)$ 划分成矩形网格(如图10.1)。

网格交点 $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ 称为节点。差分方法所要求的就是(10.1)的解在节点上的近似值。

(10.1)的解 $u(x, t)$ 及其偏微商 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在节点 (x_j, t_n) 上的值分别记为

$$u_j^n, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n,$$

如果 $u(x, t)$ 充分光滑，则由泰勒展开式不难得到

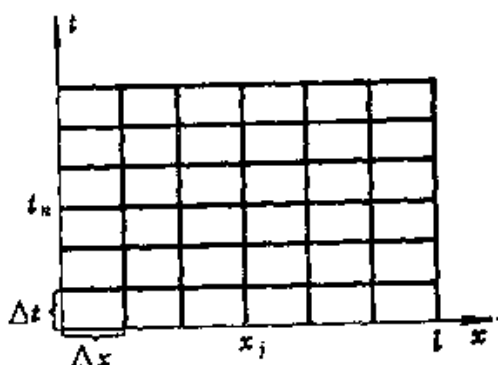


图10.1 将求解区域按自变量步长划分成矩形网格

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + O((\Delta t)^2) \quad (10.9)$$

即用中心差商 $\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}$ 近似地代替二阶偏微商 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n$, 其截断误差是与 $(\Delta t)^2$ 同阶小量。

同理有

$$\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + O((\Delta x)^2) \quad (10.10)$$

即用中心差商 $\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$ 近似地代替二阶偏微商 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n$, 其截断误差是与 $(\Delta x)^2$ 同阶小量。

此外, 还有

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + O(\Delta t) \quad (10.11)$$

将(10.9)、(10.10)、(10.11)三式代入(10.1)式, 则在所考察的节点上, (10.1)式改写为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ & = O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2) \\ & (j = 1, 2, \dots, J-1, \quad n = 1, 2, \dots) \\ & u_j^0 = \varphi(j\Delta x), \quad \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = \psi(j\Delta x) + O(\Delta t) \\ & (j = 1, 2, \dots, J-1) \\ & u_0^n = \mu_1(n\Delta t), \quad u_J^n = \mu_2(n\Delta t) \\ & (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} (10.12)$$

略去上式中有关截断误差的项, 就得到决定解在节点上近似值 u_j^n 的差分方程如下:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - a^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \\
 & \left. \begin{aligned}
 & (j = 1, 2, \dots, J-1) \\
 & (n = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right\} \\
 & U_j^0 = \varphi(j\Delta x), \quad \frac{U_j^1 - U_j^0}{\Delta t} = \psi(j\Delta x) \\
 & (j = 1, 2, \dots, J-1) \\
 & U_0^n = \mu_1(n\Delta t), \quad U_J^n = \mu_2(n\Delta t) \\
 & (n = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right\} (10.13)$$

(10.13)式中第二式可写成

$$\begin{aligned}
 U_j^0 &= \varphi(j\Delta x), & U_j^1 &= \varphi(j\Delta x) + \psi(j\Delta x)\Delta t \\
 & & & (j = 1, 2, \dots, J-1)
 \end{aligned}$$

因为差分方程(10.13)一般来说与(10.1)的解 $u(x, t)$ 不同, 而用 U_j^n 以示区别. 令

$$\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (10.14)$$

则(10.13)式变为

$$\left. \begin{aligned}
 & U_j^{n+1} = \lambda^2 U_{j+1}^n + 2(1 - \lambda^2)U_j^n + \lambda^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1} \\
 & (j = 1, 2, \dots, J-1; n = 1, 2, \dots) \\
 & U_j^0 = \varphi(j\Delta x), \quad U_j^1 = \varphi(j\Delta x) + \psi(j\Delta x)\Delta t \\
 & (j = 1, 2, \dots, J-1) \\
 & U_0^n = \mu_1(n\Delta t), \quad U_J^n = \mu_2(n\Delta t) \\
 & (n = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right\} (10.15)$$

这样, 问题(10.1)化成相应的差分方程(10.15).

差分方程(10.15)可以方便地在图10.1中的节点按 t 增加方向逐排求解. 各排上两边界上节点解值 U_0^n 及 U_J^n 可由(10.15)第三式直接求得, $n=0$ 一排内节点解值可由 $U_j^0 = \varphi(j\Delta x)$ 令 $j=1, 2, \dots, J-1$ 给出, $n=1$ 一排内节点解值可由 $U_j^1 = \varphi(j\Delta x) + \psi(j\Delta x)\Delta t$ 给出, 而 $n+1$ 排上内节点处解值 U_j^{n+1} ($j=1, 2, \dots, J-1$)

可根据(10.15)第一式由第 n 排解值 $U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n$ 及 $n-1$ 排解值 U_j^{n-1} 给出。这样，0 和 1 排解值决定 2 排解值，1 和 2 排解值决定第 3 排解值，……。于是，在 t 增加方向，逐排决定出一切解值。

10.1.4 差分方程的收敛性

差分方法的目的是用差分方程的解来近似微分方程的解，即要求步长 $\Delta x, \Delta t$ 按一定方式趋于零时，对所考察范围中的一切节点 (x_j, t_n) ，差分方程(10.15)的解 U_j^n 与原问题(10.1)的解 u_j^n 之差的绝对值趋于零，即

$$|U_j^n - u_j^n| \rightarrow 0 \quad (10.16)$$

如果所列的差分方程满足上述条件，就称它满足收敛性要求。

可以证明^[1] 在初始条件及边值条件满足一定的光滑性要求时，只要步长比满足

$$\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (10.17)$$

差分方程(10.15)的解 U_j^n 必收敛于波动方程混合问题(10.1)的解。

10.1.5 差分方程的稳定性

用差分方程求解问题时，除必须考虑其收敛性外，还必须考虑计算过程中由于每一步都会有舍入误差，且其对以后的计算结果发生的影响。对固定的 $T = n\Delta t$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 $n \rightarrow \infty$ ，因此在区域 $0 \leq t \leq T$ 中求解问题，计算排数要无限增大，尽管每步舍入误差其值甚微，但得到的差分问题的近似解对精确解的偏差并不能保证一定可以控制，误差的积累甚至使计算过程无法进行，这种情况称所考察的差分方程不稳定。

可以证明^[1] 在步长比 $\lambda = a\Delta t/\Delta x \leq 1$ 时，所考察的差分方程(10.15)不仅是收敛的，也是稳定的。