中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

微分方程教程

上册

B. B. СТЕПАНОВ 著

卜元震 譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

微分方程教程

上册

B. B. 史捷班諾夫著
卜元震譯
許寶騄校訂

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的史捷班諾夫(В. В. Степанов)著"微分方程教程"(Курс дифференциальных уравнений) 1950年第五版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學教科書。

本書中譯本分上下兩册。北京工業學院卜元震譯，北京大學許寶騄校訂。

二,14/62 0r

微 分 方 程 教 程

上 册

卜 元 震 譯

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司總經售

商務印書館上海廠印刷
(52801A)

1953年8月初版　版面字數193,000
(10月第2次印)5,001—6,500　定價￥12,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

序　言

微分方程這一門課程，根據我們綜合大學教學大綱的規定，其內容必須包括這樣一些章節，這些章節相當於作爲數學分析的分枝的這門科學理論的各個不同部分的。初等積分法、存在定理、奇解、線性方程的一般理論——在這幾章當中曾根據近代科學的發展水平。聯帶也講述了李羣、複變函數與實變函數論的方法的應用和線性代數的方法等等。

在分析教程中逐漸成長的關於數學嚴密性的近代概念，不允許以在相互有關的部分，例如初等積分法和存在定理上有不清楚的觀點來編寫微分方程教本。其次，理論本身和它在近代應用上的發展，要求在大學教程中介紹新的篇章；這些篇章，一方面是關於定性方法的發展，另一方面是關於線性微分方程的振動定理。

本書完全是限定在實數域內編寫的；這是由於本課程在大學教學計劃中的地位（它在解析函數論之前開始講授），和上面已經講過的講授這門由一般觀念結合起來的教程的必要性二者所限定了的原故。在敍述初等積分法時，就已經提出解案存在和唯一性的問題。由於教程的一般結構，在本書的第二章就講到一階微分方程的解案存在定理。如果限制於局部的觀點，按照我們的意見，通解、積分因子、首次積分的古典概念，已是論證得足夠嚴密，並且不太麻煩。由於這個緣故，在本書中，對於積分曲線在奇點的鄰域中分佈的定性理論，就敍述得足夠多（用小號字），而對於一般積分曲線流卻不加以研究。可惜上面所指出的嚴密性，是以解案對於參數可微的定理爲根據，由於這個定理的複雜性，在第七章的小號字中才提到它。從本書所採用的觀點看來，奇解是這樣的解案：在它每一點的鄰域中，唯一性被破壞；對於高於一次的

微分方程的奇解的理論，在實數域中，當然不能充分地系統地敍述。由於二階方程的緣故就作出了力學上的應用——週期運動。在線性方程的理論中，給出了“非傳統的”定理——希士姆定理和比較定理。這本書中並不包含邊界問題，當研究數學物理方程時，才討論它們，因爲提出具有參數和參數本徵值的問題，如果不推到本源——二階偏微分方程，就不容易瞭解它。關於用冪級數積分的一節（在應用上重要的），如果不用解析函數，當然就不可能十分完整；在本書中，祗是偶而提到它，而且不包含例如貝塞爾方程和勒襄特方程，我們把這些方程歸入數學物理方程教程內。將三角級數應用到線性方程上乃是新的一節。

將本書和其它的微分方程書籍比較一下，就容易發現本書中還有別的違背傳統的敍述。

不包含在綜合大學的教學大綱中，但是和大綱中的題材很相近的問題，就用小號字印出。

學習本書之前，須要預先通曉大學的分析教程（而且它要有充分嚴密和深刻的敍述），並且還須要行列式論、高等代數和微分幾何等的基本知識。

出版者言

這是 B. B. 史捷班諾夫同志所著教本的第五版，是作者的遺著。當本書準備出版的工作尙未完成之前，作者已於 1950 年 7 月 22 日不幸逝世。

在第五版的第七章，增加了關於略普諾夫的穩定性的 §6；在這一節的編寫過程中，C. A. 加里本同志應作者的請求曾給他很大的幫助。A. П. 尤克末契同志應作者的請求而寫的歷史概略，增加在書末作爲最後一章。

上册目錄

微 分 方 程 教 程

第一章　一般概念

已解出導數的一階方程的若干可積類型

§1　引言

1. 從形式的數學的觀點看來，解(積分)微分方程的問題是微分的逆運算的問題。微分學的問題在於就已知函數求導數。最簡單的逆運算問題已經在積分學中遇到：給定已知函數 $f(x)$，求其原函數（不定積分）。如果把未知原函數記作 y，這個問題就可以用方程的形狀表達：

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

或

$$dy=f(x)dx。 \tag{2}$$

互相等價的方程(1)和(2)是最簡單的微分方程。我們已經能夠求它們的解。實際上，從積分學中大家知道，滿足方程(1)或(2)的最普遍的函數 y 的形狀是：

$$y=\int f(x)dx+C。 \tag{3}$$

在解案 (3) 中，不定積分的符號記任何原函數，C 是任意常數。所以，由方程(1)或(2)確定的未知函數原來不是唯一的。我們的微分方程有無數個解，其中每一個解都可由給與任意常數 C 以一個確定的數值而

獲得。方程(1)的含有任意常數 C 的解(3)稱爲通解；每個由通解通過給與常數 C 以確定數值而得出的解案都叫作一個特解。

我們從力學中取下面的例子。研究在地心吸力作用下 m 點沿着鉛直線的運動。取 m 點所沿着運動(落下)的那一條鉛直線爲 Oy 軸，將原點放於地面上，而規定向上的方向爲正向；爲了知道運動情況，也就是說，要知道在運動的開始（對應於 $t=0$）以後 m 點在任何時刻 t 的位置，就必須知道這個點的唯一座標 y 作爲 t 的函數的表達式。這樣，t 就是自變數，而 y 是未知函數。現在我們要造出求 y 的方程。根據二階導數在力學上的意義，就可以得出加速度等於 $\frac{d^2y}{dt^2}$；另一方面，我們知道在地面上及近地面的鄰近每一點重力加速度是常數，而且(近似地）等於 981 厘米/秒^2，我們用字母 g 來記它，$g\approx 981$ 厘米/秒^2；它的方向是向下的，因此在我們的座標系中，在它的前面必須加一負號。使求得的兩個關於點的加速度的表達式相等，我們就得到以 y 爲未知函數的方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \tag{4}$$

現在給定了 y 的二階導數的值，而要求出這個函數。這個微分方程是容易解(≪積分≫)的❶。求等式(4)兩端對 t 的不定積分兩次，那麼我們順次可得：

$$\frac{dy}{dt}=-gt+C_1, \tag{5}$$

$$y=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2。 \tag{6}$$

❶ 通常用“積分微分方程”來代替“解微分方程”這句話。爲避免混淆起見，我們稱求不定積分的運算爲“求積”。

(6)式是方程(4)的通解;它含有二個任意常數 C_1 和 C_2。我們來說明這些常數的物理意義。在方程(5)中讓 $t=0$,就得到:

$$C_1=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=v_0\ (\text{動點的初速});$$

同樣,從方程(6)可得:

$$C_2=(y)_{t=0}=y_0\ (\text{動點的原始位置})。$$

用這些記任意常數的新記號,我們將微分方程的通解寫爲:

$$y=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+y_0。\tag{7}$$

現在可以看清楚需要哪些補充資料以便獲得一個完全確定的運動的特解:必須知道動點的原始位置 y_0 和初速 v_0 的數值(原始條件)。

問　題

1. 求初速爲零自 10 米高處落下的點的運動方程。問它在幾秒後落於地面上?
2. 求以初速 1 米/秒上抛的點的運動方程。問幾秒後達到最高點?
3. 求下列方程的通解:$\frac{dy}{dx}=2$;$\frac{dy}{dx}=-x^3$;$\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$。

2. 在方程(1)中祇出現了未知函數的一階導數。這是一階微分方程。一般的一階微分方程具有下面的形狀:

$$F(x,\ y,\ \frac{dy}{dx})=0\tag{8}$$

其中 F 是三個變元的已知連續函數;特別地它可以不依憑 x 或 y (或對於二者皆不依憑),但是一定必須含有 $\frac{dy}{dx}$。如果方程(8)確定 $\frac{dy}{dx}$ 爲其餘兩個變元的隱函數 [1] (以後我們永遠假定這個條件被適合),那

[1] 爲了由方程 $F(x,y,y')=0$ 確定隱函數 $y'=f(x,y)$ 存在,而且當 $x=x_0, y=y_0$ 時取値 y_0',充足的條件是:等式 $F(x_0,y_0,y_0')=0$ 成立,在數値 x_0,y_0,y_0' 的鄰域中連續偏導數 $F'_{y'}$ 存在,而且 $F'_{y'}(x_0,y_0,y_0')\neq 0$;這樣(8)式就在數値 x_0,y_0 的鄰域中確定一連續函數(9)而且 $f(x_0,y_0)=y_0'$。

麼它可以用解出$\frac{dy}{dx}$的形狀表達:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)。\tag{9}$$

這裏 f 是 x, y 的已知連續函數(特別地,它可以不含一個或二個變元:在方程(1)中 f 不依憑 y;在問題 3 的第一問中,方程的右端既不依憑 x 又不依憑 y)。在微分方程(8)或(9)中,x 是自變數,y 是未知函數。這樣,一階微分方程是聯繫未知函數,自變數以及未知函數的一階導數間的關係式。

任何函數 $y=\varphi(x)$,如果代入方程(8)或(9),後使之成爲恆等式,就叫做微分方程(8)或(9)的解。

方程(4)含有未知函數的二階導數;這是二階方程。二階微分方程的一般形狀是

$$F(x, y, y', y'')=0,\tag{10}$$

或者,通過解出二階導數(如果能夠解出的話)來表達

$$y''=f(x,y,y')。\tag{10'}$$

(爲了簡寫起見,我們用撇表示 y 對 x 的導數)。這裏 F 和 f 是其各個變元的已知連續函數,x 是自變數,y 是未知函數;x, y, y' 中某些變元(或全部)可以不在方程中出現,但 y'' 一定要出現。將函數$\varphi(x)$代替方程(10)[或 (10')] 中的 y,如果使方程成爲恆等式,則稱 $\varphi(x)$ 爲解

一般地,方程所含的未知函數的最高階導數的階數稱爲微分方程的階。這樣,n 階方程的形狀是:

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0。$$

而且方程中必須出現 $y^{(n)}$。

3. 一階微分方程可給與幾何解釋,它能使我們明白這種方程的解

案的多個性的性質問題。設給定方程爲下列形狀

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)。\tag{9}$$

我們取 x, y 爲平面上的笛卡兒直角座標，在函數 f 的定義域中，每點 (x, y) 都由方程 (9) 確定一個 $\frac{dy}{dx}$ 的數值。設 $y=\varphi(x)$是方程(9)的解。那麼由方程 $y=\varphi(x)$ 確定的曲線稱爲微分方程的積分曲線。$\frac{dy}{dx}$的值是這條曲線上的切線和 Ox 軸交角的正切。這樣，對於定義域中每點(x, y)，方程(9)都定一方向與之對應；而我們得到了方向場。這場可以這樣地描述：將與 Ox 軸交角爲 $\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$的箭頭(箭頭的正指向可以任意取，因爲反正切所確定的角可以相差 π 的倍數。)放在域內相應的各點。現在，微分方程的積分問題可以這樣解釋：求一曲線，使它在各點的切線方向與方向場在該點的方向一致。概略說來，所引曲線必須使分佈在場內的箭頭，在每點都指示着該曲線的切線的方向。

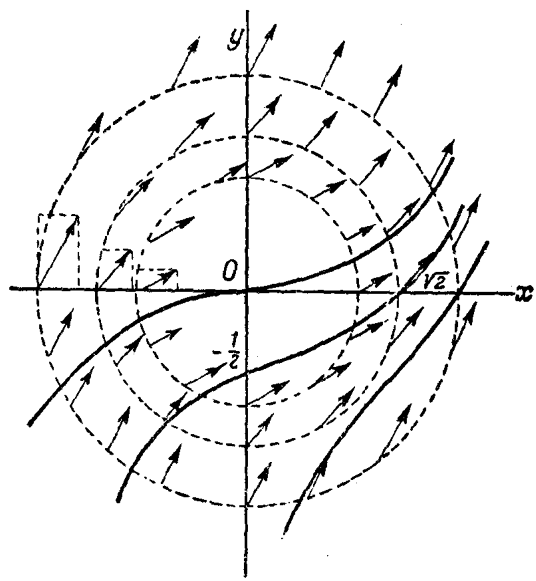

圖 1

讓我們更仔細地研究下面的例子：

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2。\tag{11}$$

先找出那些具有相同樣斜率的曲線(等斜線),再分佈箭頭。這樣,如果 $y'=0$ 就有 $x=y=0$ (原點),如果 $y'=\frac{1}{2}$,則有 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$(中心在原點,半徑爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$的圓),圓周 $x^2+y^2=1$ 上 $y'=1$ 等等(圖 1)。要畫方程(11)的積分曲線,就必須在平面上取一點(x_0, y_0),經過它引一曲線,使曲線上各點具有場的方向[在圖上所畫曲線經過點$(0,0)$,$(0,-\frac{1}{2})$,$(\sqrt{2},0)$]。可見,所得的不是一個曲線,而是含一個參數的整族曲線(例如可以取曲線與 y 軸的截距作爲參數)。同樣的結論,對於任何場,也就是任何微分方程,在一定的限制下也是正確的。所以,關於微分方程的積分曲線集合的問題我們有理由期望這樣的答案:一階微分方程的積分曲線構成獨參數的曲線族:

$$y=\varphi(x, C)。\tag{12}$$

注意到函數 $\varphi(x, C)$ 對於任何 C 都是微分方程的解,我們也可以期望下面的結果。

一階微分方程的通解是含有獨一任意常數的(12)式。❶

最後,想到每一條個別的積分曲線可由給出它所經過的一個點(x_0, y_0)而得到,我們就能得出下面的結論:

爲了唯一地確定微分方程的特解,就必須給出未知函數在自變數的值爲 x_0 時所具有的值 y_0 (原始值)。

實際上,如果已知 x_0 和 y_0,那麼可以將它們代入方程(12)可得:$y_0=\varphi(x_0, C)$——確定一個未知數 C 的方程;上面的幾何推理允許我們

❶ 通解和特解的確切定義衹能在以後給出。

期望這個方程有解。

註　第三段的推演並不是微分方程解的存在和原始條件決定唯一特解的嚴格證明，因爲這是憑着幾何圖象作的，所有講過的結果，祗有在對函數 f 一定的限制下才正确；嚴格的證明是要在第二章中才講到。我們的敍述祗指出在簡單的情況下，我們能夠期望哪些結論，而且給出對於作積分曲線近似圖象的實際方法。

問　　題

4．作出方程 $\frac{dy}{dx}=x^2-y^2$ 的方向場（作等斜線 $y'=0, y'=\pm1, \pm2$）；並引經過(0,0)，(0,1)，(1,0)各點的積分曲線。

4．我們看到，在最簡單的例（1）中顯現出來的一階微分方程的通解的特性——對於獨一任意常量的依憑——被前段的理由證實爲對於更廣泛的一階方程也是正確的。我們自然要期望一般二階微分方程(10)或(10′)的解與例(4)類似，也含有兩個任意常數，而 n 階微分方程的通解依憑 n 個任意常數。而它正是這樣（在一定的限制下）；在這裏我們不用幾何推理，而從另一角度去接近這個問題，從而我們的思考藉類比法而獲得有意義的證實。

讓我們提出一個問題，這個問題在某種意義上是求解微分方程的反面問題。設已知關係式：

$$y=\varphi(x, C), \tag{13}$$

其中 C 是參數，對 x 微分後，[1] 我們得到：

$$y'=\varphi'_x(x, C)。 \tag{14}$$

如果(14)式的右端不含 C，那麼我們就已經消去參數 C，而且得到微分方程：

$$y'=\varphi'_x(x); \tag{14'}$$

[1] 我們假定在論證中出現的導數都存在。

顯然，在這種情形下，(13)式的形狀是:

$$y=\varphi(x)+C。$$

而且是方程(14′)的解。

現在設等式(14)的右端含有 C; 那麽等式(13)的右端也含有 C，亦即 $\varphi'_c(x, C)\neq 0$，而且在使 $\varphi'_c(x_0, C_0)\neq 0$ 的數值 x_0, C_0 的鄰域中，我們可以確定 C 爲 x, y 的函數:

$$C=\psi(x, y) \tag{15}$$

顯然我們有恆等式(對變數 x 和 C):

$$\psi(x, \varphi(x, C))\equiv C \tag{16}$$

將(15)式所确定的 C 值代入(14)式，我們獲得一階微分方程:

$$y'=\varphi'_x(x, \psi(x, y))。 \tag{17}$$

在這裏，我們容易證明不論 C 是任何值，(13)總是上一方程的解; 實際上，如果我們將 y 的表達式(13)代入方程(17)，則在左端得 $\varphi'_x(x, C)$，而在右端得 $\varphi'_x\{x, \psi[x, \varphi(x, C)]\}$，由於恆等式(16)這也是 $\varphi'_x(x, C)$。

如果所給出的 x, y, C 間的關係式是隱式:

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{13′}$$

那麽，將它對 x 微分，我們得到:

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'=0。 \tag{14″}$$

在滿足了隱函數論中相當條件的情況下，從關係式(13′)和(14″)消去 C，我們得到方程:

$$F(x,y,y')=0。 \tag{17′}$$

前面的論證說明(13′)是它的解。

現在，設給定關係式

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, C_3,\cdots,C_n)=0, \tag{18}$$

聯繫着函數 y 和自變數 x，而且含有 n 個參數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$。是否可以

作一微分方程使得不論參數取什麽常數値，(18) 式所确定的函數 y 滿足這個微分方程？我們假定 Φ 是所有變元的連續函數，而且對 x,y 可微分足夠多次。在上述假設下，對等式(18)［如果將關係式(18)所確定的函數 $y=\varphi(x, C_1, C_2,\cdots,C_n)$ 代 y，它就是恆等式］微分 n 次。我們有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y''=0,\\
&\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}y'+\cdots\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'''=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y^{(n)}=0。
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

關係式(18)和(19)構成一組 $n+1$ 個方程；它們含有 n 個參數 $C_1,C_2,\cdots,C_n$。一般說來，❶ 從這組方程可以消去所有的參數，也就是從 n 個方程求得它們對 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的表達式，再將這些表達式代入第 $n+1$ 個方程。我們於是得到關係式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\tag{20}$$

也就是得到 n 階微分方程。我們已經指出，用函數 $\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 代方程(18)中的 y 就得到恆等式，這對於方程(19)同樣正確；所以，作爲方程(18)和(19)的後果的方程(20)，當其中的 y 被函數 $\phi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$所替代時，也成爲恆等式，而這正意味着由(18)式確定的 y 是方程(20)的解。由此看來，這個含有 n 個任意常數的函數乃是某個 n 階微分方程的解。這段推理還可以進行得更精確，有如我們對於一階微

❶ 即使在一次方程系的情形中，我們知道 n 個方程不一定能決定 n 個未知數。

分方程所作的那樣。現在我們有理由期望出發時的解是通解，而反之，n 階微分方程的通解含有 n 個任意常數。

問題

5．求平面上所有直線（取通式）的微分方程；並積分這個方程。

6．求焦距為 $2C$ 的共焦點橢圓族的微分方程。

提示：曲線族方程為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$，其中 a 是任意參數。將 y 看成 x 的函數，對 x 微分，簡化後，可得：

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{a^2-c^2}=0$$

從這兩方程消去 a^2，就得到所求的一階微分方程。

例 1　在平面上的圓族

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$$

含有三個參數，微分三次：

$$x-\alpha+(y-\beta)y'=0,\quad 1+(y-\beta)y''+y'^2=0,$$
$$(y-\beta)y'''+3y''y'=0。$$

在微分時，消去了 α 和 γ；但是還要從最後兩個方程消去 β。（使 $y-\beta$ 的兩個表達式相等）我們可得：

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0。$$

例 2　我們取圓錐曲線的方程作為最後一例，從解析幾何上，大家知道，它依憑於五個參數（即六個係數的比例），其形狀為：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0。$$

我們假定 $a_{22}\neq 0$，並由這個方程解出 y：

$$y=-\frac{a_{12}x+a_{23}}{a_{22}}\pm\sqrt{\left(\frac{a_{12}x+a_{23}}{a_{22}}\right)^2-\frac{a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}}{a_{22}}},$$

或

$$y=-\frac{a_{12}}{a_{22}}x-\frac{a_{23}}{a_{22}}\pm\sqrt{\frac{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}x^2+2\frac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{a_{22}^2}x+\frac{a_{23}^2-a_{22}a_{33}}{a_{22}^2}}。$$