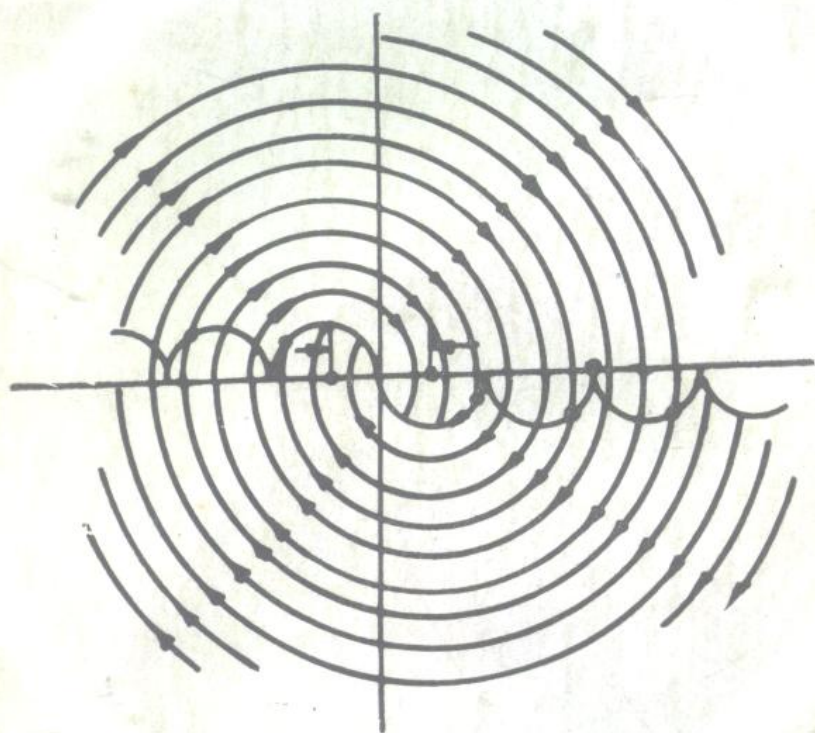


电气工程 最优控制

童调生等 编著



机械工业出版社

电气工程最优控制

童调生等 编著



机械工业出版社

电气工程最优控制一书,按照最优控制的基本理论体系编写,并结合工程实践阐述了最优控制在电气、机械工程中的应用。

书中反映了最优控制在理论和应用方面的新进展,结合有关章节和工程需要编入了延时系统的最优控制、频域设计方法、抗扰性、计算机最优控制系统、方块脉冲函数在最优控制计算中的应用、电力拖动的奇异最优控制、仿型机械手、轧钢机、无功补偿、机械加工等系统的最优控制。附录中还编入了多种最优控制的计算机程序,可供学习和工程设计之用。

本书可供电气工程、机械工程、自动控制各有关专业的工程技术和科研教学人员阅读;可供这些专业的研究生、高年级学生选作教材;也可供理科有关专业人员参考。

电气工程最优控制

童调生等 编著

*

责任编辑:王 达 孙流芳

封面设计:王 伦

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南里一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $21\frac{3}{4}$ · 字数 534 千字

1989年6月北京第一版·1989年6月北京第一次印刷

印数 0,001—4,150 · 定价:13.50 元

*

ISBN 7-111-00500-7/TM·75

序

在现代科学技术革命过程中,电气自动化在近30年来曾进行了两次重大的技术更新。

一次是元器件的更新,即以大功率半导体器件晶闸管(可控硅)取代传统的变流机组,以线性组件运算放大器取代电磁放大器件(电机扩大机、磁放大器)。这是近代半导体物理科学向电气工程领域中的渗透。在这次技术更新中,电气系统的动态设计仍采用经典控制理论的方法。随着电气自动化的这次技术更新,60年代至70年代已经出版了大量有关电力电子学(Power Electronics)的书籍。

后一次技术更新是从70年代开始的,主要把现代控制理论和计算机技术用于电气工程。控制器由模拟式进入了数字式,设计方法在经典方法中引入了现代的和优化的方法。这次技术更新是设计思想和理论概念上的一个飞跃和质变。电气系统的结构和性能亦随之改观。

我国已在中国自动化学会下分设了电气自动化专业委员会。自1982年成立大会暨第一届学术会议以来,举行了多次全国性的学术会议。我有幸参加了每次会议并在成立大会上形象化地提出“现代控制理论与计算机技术是电气自动化起飞的一对翅膀”的譬喻。近年来国内外在应用最优控制、参数辨识和自适应控制等方法以及计算机仿真、计算机辅助设计和微机控制等技术手段,在解决电气自动化技术问题方面,取得了丰硕的成果。这次技术更新正冲击着电气自动化专业的教学内容,这个专业的科技人员也面临着一次广泛而深入的知识更新。本书正是适应这种需要而编著的。

苏联60年代和70年代曾出版过电力拖动最优控制的书籍。然而内容仅限于发热限制下的几个控制问题。对于70年代以后在我国和欧美国家蓬勃兴起的最优调节器、延时系统最优控制、计算机技术等及其在电气工程中的应用尚未涉及。

本书是将最优控制、电气自动化和计算机技术结合在一起编著的,兼顾教学系统和工程技术人员需要,介绍了国内外在最优控制和电气自动化领域中的最新成就。对延时系统的最优控制及计算方法、方块脉冲函数法、计算机最优控制系统和最优控制系统的抗扰性设计都给予了特别的注意。这些问题已在电气工程中得到实现,并取得了显著的效果。对于苏联学者在60年代提出的在发热限制情况下的最优控制,近年来在国内外又重新引起关注,本书将作为一种理想参考曲线来处理,并进一步讨论存在电枢电感,即在电路方程约束条件下的最优控制及奇异解的问题。

本书取材新颖,由浅入深,具有一定深度和广度。希望童调生同志的这一努力能在电气自动化的最优控制和计算机应用中,在工程技术人员的知识更新和高等学校的教学中起到积极的作用。

中国科学院学部委员
上海交通大学教授 张钟俊

前 言

最优控制从庞特里亚金 (Пунтриядин) 提出极大值原理至今已经历了近 30 年的发展, 然而它仍然是自动控制领域中不断取得进展的一个分支, 因为近代控制学科的许多分支, 如随机控制、自适应控制、大系统理论、计算机控制等都是以最优控制为其重要基础的。同时它还渗透到工程技术、经济科学的各个方面。为了反映最优控制在理论和应用方面的进展, 结合本书的有关章节和工程的需要编入了延时系统的最优控制 (在第二、七、八章中), 最优控制的频域设计方法 (第五章), 抗扰性 (第六章), 计算机最优控制系统 (第七章), 方块脉冲函数在最优控制计算中的应用 (第八章), 奇异最优控制及其在电力拖动中的应用 (第四章), 机械手、轧钢机、无功补偿、机械加工系统的最优控制 (第九章)。在附录中还编入了最优控制的计算机程序, 供学习和工程设计之用。

本书是按照最优控制的基本理论体系编写的, 并结合工程实践阐述了最优控制在机电工程中的应用。书中所涉及的基础知识不超出工科院校高等数学、线性代数、控制工程(理论)、普通电工学的范围。可供自动控制专业高年级学生、研究生阅读或可选作教材, 也可供工程各类专业教师和科技人员自学参考。

本书是作者在多年教学和科研实践的基础上编著的, 包括了作者、研究生和学生共同从事科研工作所获得的延时系统最优控制、最优控制系统的抗扰性、奇异解、多电机协调最优控制等方面的成果, 这些科研课题是国家自然科学基金资助的项目。

童季贤同志主要编写了第二章和第八章的 8-1~8-10 节, 并参加了全书的整理、修改和定稿。张显明、刘国荣、刘星、陈明武、郑学奇参加了编写并为本书提供了宝贵的材料及科研成果 (见参考文献[94~111])。章竞、韩跃新、刘祖润对书中的部分公式进行了验算。胡平、张海沙、赵福英等同志校对了书稿并绘制全书的插图。

中国科学院学部委员上海交大教授张钟俊、武汉工学院教授何文蛟和胡荣强老师、机械工业出版社孙流芳、王达同志对全书的编写进行了指导、审阅并提出了宝贵的意见。

作者对上述同志谨致衷心的感谢。

由于水平所限, 请读者对本书中的缺点和错误提出批评指正。

湖南大学电气系教授 童调生

目 录

第一章 导论

- 1-1 电气系统最优控制发展概况.....1
- 1-2 电气最优控制的基本问题.....2
- 1-3 最优控制问题的数学描述.....7
- 1-4 最优控制存在的必要条件及其
在电气控制中的应用例11
- 1-5 状态空间分析概要13
 - 1-5-1 连续系统的状态方程14
 - 1-5-2 离散系统的状态方程21
 - 1-5-3 能控性24
 - 1-5-4 能观性26

第二章 最优控制的数学方法

- 2-1 泛函无条件极值的变分原理.....30
- 2-2 在等式约束条件下泛函极值问
题的解法——拉格朗日乘数法...36
- 2-3 最优控制问题的变分法.....37
- 2-4 极小值原理.....45
- 2-5 开关控制与最小时间控制问题...59
- 2-6 极小值原理的其它形式及延时
系统的极小值原理.....67
- 2-7 动态规划.....69

第三章 极小值原理在电力拖动最优控 制中的应用

- 3-1 电力拖动的基本方程与相
对单位制.....73
- 3-2 第一类电力拖动在电流和转
速都不加限制条件下的最优
控制.....75
- 3-3 最优控制中的角点条件与电力
拖动的阶步式控制.....80
- 3-4 控制量受限制时的最优控制.....84
- 3-5 状态变量受限制条件下的
最优控制.....86
- 3-6 阻转矩与转速有关的最优

控制.....90

第四章 奇异最优控制及其在电气系统 中的应用

- 4-1 奇异最优控制问题.....93
- 4-2 电力拖动中的奇异最优控
制问题102
- 4-3 晶闸管一直流电机拖动系
统的物理量限制问题106
- 4-4 金属切削机床电气传动的
快速奇异最优控制问题107

第五章 线性二次型最优控制

- 5-1 状态调节器112
- 5-2 直流电动机双闭环调速系统的
速度调节器的二次型指标最优
化设计116
- 5-3 线性二次型最优控制的性质 ...120
- 5-4 输出调节器126
- 5-5 状态观测器和扰动观测器127
- 5-6 按照反馈信号优势简化多
变量控制系统的结构132
- 5-7 最优调节器的频域设计方法 ...137

第六章 线性二次型最优控制的抗扰性 及电气传动系统的最优设计

- 6-1 误差变量法及其在速度调
节器设计中的应用143
- 6-2 积分状态法和误差微分法154
- 6-3 干扰最优补偿器157
- 6-4 调速系统抗扰全状态反馈
的最优控制159
- 6-5 多电机协调最优控制162
- 6-6 伺服问题及考虑扰动的黎
卡提变换171

第七章 计算机最优控制系统

- 7-1 离散型极小值原理175

7-2	离散型极小值原理与连续型极小值原理的比较	182
7-3	离散型的线性调节器问题	184
7-4	计算机控制延时问题和离散延时最优控制系统	185
7-5	延时系统的模型转换	191
7-6	离散最优控制的扰动补偿	194
7-7	离散型状态观测器和扰动观测器	198
7-8	直流调速系统的微型计算机最优控制	201
第八章	最优控制的计算方法及其在电气系统中的应用	
8-1	梯度法	214
8-2	共轭梯度法	219
8-3	电气传动系统最优控制的数值解	226
8-4	控制系统的参数最优化	228
8-5	直流电动机最小能耗控制的数值解	233
8-6	延时系统最优控制的数值方法	236
8-7	线性延时系统二次型最优控制的数值解	239
8-8	具有测厚延时的轧机最优控制系统的数值解	240
8-9	解具有约束的最优控制问题的数值方法	243
8-10	线性二次型最优控制问题的黎卡提代数方程的数值解法	244
8-11	方块脉冲函数在最优控制计算中的应用	251
8-12	方块脉冲函数在延时最优控制计算中的应用	257

第九章 机电系统的最优控制系统

9-1	仿型机械手的最优控制	263
9-1-1	双侧作用随动系统的综合	263
9-1-2	非线性系统调节器的解析结构	268
9-1-3	具有一个自由度的遥控仿型机械手电气传动系统最优控制的综合	275
9-2	轧钢机最优控制系统	287
9-3	电弧炉无功补偿的最优控制	292
9-4	机械加工系统的计算机控制与最优化	298
9-4-1	计算机辅助加工系统(CAM)	298
9-4-2	机床的最优化控制问题	299

附录

附录 A	矩阵的广义逆、前馈补偿阵及其计算程序	306
附录 B	求解黎卡提方程及反馈阵的程序	312
附录 C	矩阵的微分	322
附录 D	极小值原理中的引理	322
附录 E	电力拖动奇异最优控制问题程序	324
附录 F 1	反作用随动系统在考虑干摩擦条件下状态方程的推导	327
附录 F 2	反作用随动系统在考虑干摩擦、间隙非线性和传动弹性条件下状态方程的推导	330
附录 G	最速下降法求解代数方程的程序	336
参考文献		338

第一章 导 论

1-1 电气系统最优控制发展概况

电气控制系统广泛应用于工矿企业、交通运输、电力工业、国防工业、武器系统等部门,这类控制系统的性能直接影响着生产机械的效率、产品质量、原材料和能量的消耗,在长期的生产实践和科学研究中,电气控制工程师们应用古典控制理论建立了这类系统的设计方法^[1~8]。随着电子技术的发展,在这类系统中广泛地采用功率半导体器件和运算放大器构成模拟式的控制器。经过不断改进和完善,从而得到了动特性和静特性都相当好的电气控制系统。例如电气传动中的双闭环调速系统。

然而随着生产的大规模发展和技术进步。工业部门对电气控制系统的特性、能耗等质量提出了愈来愈高的要求,尤其随着现代控制理论和计算机科学的进步,对电气控制系统提出了许多新的概念。

在50年代初期,苏联学者达维多夫(Давидов)等人就提出以最小能耗和最高生产率为指标的电力拖动的最优控制。这些新的概念,凭古典控制理论或凭经验都是无法接受的。鲍格莫洛夫(Богмолов)对达维多夫关于电力拖动的最优控制规律提出了异议,在苏联的电气传动学术界引起了一番争论^[9~11]。直至50年代中期,科热夫尼科夫(Кожевников)等人进一步从理论上进行了证明,电力拖动的最优控制规律才得到普遍承认,并被系统地介绍到了我国。然而由于当时计算机及控制手段都还处于发展的初级阶段,实现这一控制规律是困难而得不偿失的,美国学者瓦拉奇(Wallach)等就此发表了评论^[12]。70年代以来,由于计算机控制技术的发展和成本不断下降,实现电力拖动的最优控制已成为可能;又由于能源问题成了当今世界范围内的重要问题,因而以最小能耗和最高效率为性能指标的最优控制问题又重新提到了研究的日程上来^[13~16]。60年代以来由于晶闸管在传动系统中大量应用,佩什卡洛(Пышкало)等对这种传动系统的快速控制,最小能耗控制及奇异控制进行了大量的研究^[17~18]。

70年代以来国内外相继研究了以二次型为性能指标的电气最优控制系统,其中主要有发电机励磁、电动机调速和各种电炉的最优控制^[19~26]。用线性二次型最优控制理论对这类系统的调节器进行设计,通过理论分析和实验都证明了电机调速系统的最优调节器和最优伺服调节器的性能大大超过了用经典控制理论设计出来的调节器,而且可以用较简单的模拟式控制器实现这种最优控制规律,线路也并没有复杂化。目前工厂中现有的电气控制设备都不难改造成最优调节器控制。可以预期各类电气最优控制装置即将在工业部门得到广泛的应用。

80年代前后国内外对电气最优控制系统的抗扰性、状态和扰动观测器,多台电动机协调运转的最优控制进行了研究。鲁棒控制理论、自适应控制都开始应用于电气控制系统。

70年代以来由于微型计算机的发展,计算机辅助设计、计算机仿真以及微型计算机控制技术也越来越普遍地应用于电气控制系统^[21~24],使电气控制系统从研究实验到设计控制的手段都发生了深刻的变化。

在电气最优控制系统中是离不开计算机这一手段的,例如利用二次型性能指标最优控制方法设计系统,能提高系统的快速性和相对稳定性。但在最优反馈阵的设计中要解黎卡提方程,对加权矩阵要作寻优选择,为提高系统的动态抗扰性则还要计算和设计前馈阵,进行广义逆矩阵的运算等等。随着对象阶次的增加,必须依靠计算机进行辅助设计和仿真寻优。此外对于有限时调节器问题和最优控制中的两点边值问题都要利用计算机求其数值解。

70年代以来,在电气控制系统中广泛地采用运算放大器构成的模拟调节器,使电气控制系统的性能有了很大的改善,但由于工业水平的提高,对工业产品的质量提出越来越高的要求;同时由于一些新兴的高精度产业部门的出现,例如光纤制造业、塑料工业等,对电气控制系统的精度提出了更高的要求。然而模拟式控制器精度的提高是有限的,存在着零漂,给定信号的准确性和重复性差。因此,对于性能要求很高的电气控制系统,如用模拟式的调节器,将是复杂且不经济的。

近年来,随着大规模集成电路的发展,大大提高了线路的集成度、可靠性以及信息处理的速度;同时,体积、成本和功率损耗也大大降低,出现了高运算能力价廉的微处理器。微型计算机的问世和它的迅速发展为电气控制系统的高精度、高效率、智能化、多功能、最优化、自适应化创造了条件,电气系统由模拟控制阶段进入了数字控制的阶段。

随着微型计算机在控制系统中的应用,近年来对微型计算机最优调节器的时延问题和离散系统的抗扰问题进行了研究。综观电气控制系统的发展过程,计算机科学和现代控制理论的各个分支在电气控制工程中都得到了应用,电气控制系统(主要为电气传动和电力系统)这门传统的学科在内容上已经发生了深刻的变化。

1-2 电气最优控制的基本问题

电气最优控制的基本问题有二:其一是以效率为性能指标的最优控制,例如最小能耗、最大行程、最大转速变化、最短时间控制等;第二个基本问题是二次型性能指标的最优控制,例如电动机调速、发电机励磁、随动系统等二次型性能指标的最优控制。后者是以提高系统的动态性能为目标的控制。这两大基本问题是互相有联系的。二次型性能指标也包含着快速性、降低能耗和提高效率等,单纯以效率为指标而不考虑系统的动态性能往往是难以接受的。例如,电车最小能耗控制的加速度会令人产生极大的反感。然而以效率为指标的最优控制作为电气控制系统的理论仍然是有价值的,可以作为设计中的一种理想参考曲线。这种理想参考曲线的思想在经典的电气控制理论中就已经采用过。例如在电气传动系统不考虑发热限制的快速控制中,电流的理想参考曲线是矩形的。

以下我们通过几种电气最优控制系统的例子说明以上二个基本问题和最优控制的基本概念。

其中,例一是一个RC电路极大输出的最优控制问题;例二、三是电气传动二次型指标的最优控制问题;例四是直流电动机的最小能耗控制问题。

例1-1 有一电路如图1-1,输出电压是一宽度为 T 的脉冲,试求在线路电阻 R 上规定的能耗为 K 的条件下使输出电压 $v_o(t)$ 平均值为极大的输入电压波形。

根据上述电路可以列出微分方程

$$i(t) = \frac{1}{R} [V_0(t) - V_i(t)]$$

$$-\frac{d}{dt} V_0(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

$$-\frac{d}{dt} q(t) = i^2(t) R$$

其中, q 是电阻 R 上消耗的电能。令 $V_0 = x_1$, $q = x_2$ 。 $U_i = u$, 上述方程又可写成如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{RC}(x_1 - u) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{R}(x_1 - u)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

其中的 x_1 、 x_2 称为该电路的状态变量, $\dot{x}_1 \triangleq \frac{dx_1}{dt}$,

$\dot{x}_2 \triangleq \frac{dx_2}{dt}$, 上式又称作状态方程。电路中各变量的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_1(T) &= V \\ x_2(T) &= K \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

根据题意可写出性能指标

$$J = \int_0^T \frac{V_0(t)}{T} dt \quad (1-3)$$

现在的问题就是在满足状态方程式 (1-1) 和边值式 (1-2) 条件下求使性能指标式 (1-3) 取极大的输入电压、输出电压及电阻上的能耗的时间曲线。

使性能指标取极大的这些曲线中, 输入量即输入电压称为最优控制曲线; 电阻上的能耗及输出电压称为最优轨线。

这个最优控制问题中的状态变量只有 2 个, 求解也比较容易。可以用极小值原理获得解析结果, 我们将在本章的最后一节讨论它的解法。

例1-2 最优调节器问题示例: 直流调速系统的受控对象 (如图 1-2 所示) 为晶闸管-直流电动机。

其中, K_s ——可控整流功率放大器的电压放大系数; T_s ——等效于可控整流功率放大器

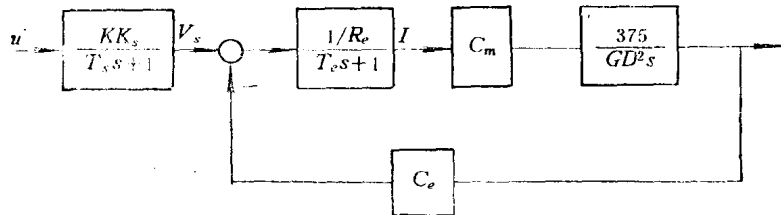


图 1-2

的惯性环节的时间常数; T_e ——电枢电路的电磁时间常数; R_e ——电枢电路电阻; GD^2 ——机电系统折算到电动机轴上的飞轮矩; C_e 、 C_m ——各为电机的电势常数和转矩常数; u ——可控整流功率放大器的输入电压(控制量); V_e ——可控整流功率放大器的输出电压; n ——电动机转速; I ——电枢电流。

若令 $x_1 = n$, $x_2 = I$, $x_3 = V_e$ 。

根据系统的动态结构图(1-2)有如下的微分方程即状态方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{375C_m}{GD^2} x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{C_e}{RT_e} x_1 - \frac{1}{T_e} x_2 + \frac{1}{RT_e} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{T_e} x_3 + \frac{KK_e}{T_e} u \end{aligned} \right\} \quad (1-4a)$$

若记成矢量 Θ 的形式则有:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_m 375}{GD^2} & 0 \\ -\frac{C_e}{R T_e} & -\frac{1}{T_e} & \frac{1}{R T_e} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{KK_e}{T_e} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (1-4b)$$

给定初始条件

$$x(t_0) = x_0 \quad (1-5)$$

终端状态自由。

根据调节器问题的性质,可规定性能指标为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + ru^2] dt \quad (1-6)$$

或记为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

性能指标中的 R 和 Q 是加权矩阵

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}(q_{11}, q_{22}, q_{33}) \\ R &= [r] \end{aligned}$$

以上的性能指标表示了系统的变量即状态偏离平衡位置的偏差的二次型。

调节的目的是使偏离平衡位置的状态尽量回到平衡位置上来,使 x 趋近于零,这就相当

⊖ 过去习惯上常用“向量”。由于它易与“相量”相混淆,本书中将按 GB2900-82《电工名词术语标准》和数学上的常规,一律采用“矢量”。——编辑注

于使以上的性能指标为最小。在性能指标中还包含了控制 u 的二次型，该项是为考虑到控制功率的限制而设。

于是，调速系统的最优调节器问题可以叙述为：在给定系统状态方程式(1-4)和初值式(1-5)的条件下，求使性能指标式(1-6)取极小的最优控制。显然这是以动态性能为目标的最优控制问题。

在这个最优控制问题中，从工程的角度考虑，其状态轨线和控制的时间函数并不特别重要，我们需要得到的是最优控制的综合问题，即最优控制怎样通过状态变量表示出来而得到状态反馈形式的调节器。关于这种最优控制问题以及以上调速系统的调节器的设计问题将在第五、六章中讨论。

例1-3 具有时延的最优伺服控制问题示例——轧机压下装置的电气控制系统。该系统的被调量系钢材的厚度，控制的目的在于保持其厚度的恒定（见图 1-3）。

现以 ϑ 、 ω 分别表示电动机的角位移（按照一定的比例关系即表示轧辊的间隙）和角速度； i_f 、 C_f 分别表示发电机的励磁电流及励磁常数； R 为 G—M 电枢电路的电阻； R_f 、 L_f 分别表示发电机励磁电路的电阻和电感； u_k 为可控整流器的输出电压； I 为电枢电流； J 为轧机压下装置运动部件折算到电动机轴上的总惯量； ϑ_d 为延时检测的位移信号； τ 为检测延时间。

考虑到检测延时，在可控整流的输入和输出端应有下述关系

$$u_k = K_s(u - K_2 \vartheta_d)$$

$$\vartheta_d = \vartheta(t - \tau)$$

其中 K_2 是厚度检测的变换系数； u 为控制输入。

由于可控整流的等效延时时间常数大大小于发电机励磁电路时间常数，故可忽略。则发电机励磁电路方程为

$$L_f \frac{di_f}{dt} = u_k - R_f i_f$$

发电机-电动机电枢电路在忽略电感的条件下，其电势平衡方程为

$$I = \frac{C_f i_f - C_e \omega}{R_e}$$

若令 $x_1 = \vartheta$ ， $x_2 = \omega$ ， $x_3 = i_f$ ，考虑到以上的延时关系以及两个电路方程，可写出如下系统的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{C_m C_f}{J R_e} x_3 - \frac{C_m C_e}{J R_e} x_2 \end{aligned} \quad (1-7)$$

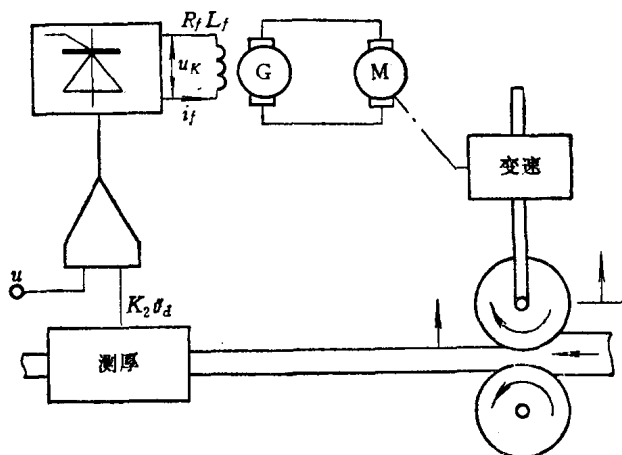


图 1-3

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L_f} u_k - \frac{R_f}{L_f} x_3$$

$$u_k = K_s(u - K_3 x_{1d})$$

$$x_{1d} = x_1(t - \tau)$$

给定初始条件

$$x(t) \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \quad (1-8)$$

或记作

$$x[t_0 - \tau, t_0]$$

性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [Q(x_1 - D)^2 + R u^2] dt \quad (1-9)$$

式中 D ——给定位移。

该压下装置电气系统的最优控制问题归结为在式 (1-7)、(1-8) 的条件下求使式 (1-9) 取极小的最优控制 u 和最优轨线 x 。

性能指标表示了系统输出量与给定量的偏差的二次型的积分。该控制的目的是要使系统的输出量与给定量的偏差尽可能接近于零, 即要求输出量跟随给定量。这类问题称为跟踪或伺服问题。如以最优控制实现这类控制, 则称为最优伺服调节器。

以上轧机的最优控制问题, 其状态方程是三维的, 且带有延时, 用极小值原理求解是很困难的, 所以要用数值的方法搜索其最优控制。关于它的算法将在第八章中介绍。

例1-4 最小能耗控制问题: 直流他励电动机由零转速起动到某一终点转速, 要求起动过程能耗最小, 试求出最优的电流曲线和转速曲线。

如果只考虑该问题的主要损耗, 即电枢电路电阻上的损耗, 并且忽略电枢电路的电感, 根据直流他励电动机电枢电路方程和运动方程, 可写出如下的状态方程:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\lambda'}{\mu_p} n$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{375C_m}{GD^2} I$$

若令 $x_1 = \vartheta$ $x_2 = n$ 又可写成

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\mu_p} x_2 \quad (1-10)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{375C_m}{GD^2} I$$

式中 μ_p 为与机械传动比有关的常数

在以上控制问题中取电枢电流 I 为控制量, 则根据电机的换向条件的限制应满足如下的不等式约束:

$$I \leq I_m \quad (1-11)$$

开始起动和起动的终态应满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_1(t_f) &= x_{1f} \\ x_2(t_f) &= x_{2f} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

起动过程中电枢电路的电能损耗

$$\Delta E = \int_0^{t_f} R_e I^2 dt \quad (1-13)$$

其中, R_e 为电枢电阻, 根据问题的性质, 取式 (1-13) 为性能指标。

以上的控制问题可叙述为在满足式 (1-10)、(1-11)、(1-12) 的约束条件下求使性能指标式 (1-13) 取极小的最优控制 (电流) 及最优状态轨线 (转速和转角)。显然这是以提高效率为目标的最优控制问题。这个最优控制问题的解法将在本章后面及第三、四章中讨论。

由以上各例可总结出最优控制问题的一般提法: 在满足状态方程、边界条件以及在对控制变量、状态变量的物理限制的条件下求使规定的性能指标达到极小 (或极大) 的最优控制和最优状态轨线。

最优控制 $u^*(t)$ 一旦确定以后, 代入状态方程即可解出最优轨线 $x^*(t)$; 再把 $u^*(t)$ 和 $x^*(t)$ 代入性能指标的表达式, 即可计算出性能指标的最优值。显然性能指标的值取决于控制函数 $u(t)$ 的选取。性能指标的定义域是控制函数空间, 其值域是实数轴。这种关系称作泛函。性能指标是一个泛函, 因此求解最优控制问题归结为泛函的条件极值问题。

求解最优控制问题的解析方法主要有变分法、极小 (大) 值原理和动态规划。古典变分法一般只能求解没有控制约束的那一类最优控制问题, 或控制域为开域的情形。50 年代后期由苏联学者庞特里亚金 (Пунтриядин) 建立的极大值原理 (在很多文献以及本书中采用极小值原理) 以及由美国学者贝尔曼 (Bellman) 建立的动态规划, 则可用于求解控制域为有界闭域的那类最优控制问题。这两种理论的建立是控制理论由“经典”转向现代的重要标志。

通过极小 (大) 值原理和变分法求解最优控制归结为解一组微分方程的两点边值问题。对于维数稍高的系统, 要获得解析的结果是不可能的, 所以用数值的方法搜索最优控制以及微分方程两点边值问题的数值方法是求解最优控制问题的重要计算方法。

1-3 最优控制问题的数学描述

从 1-2 节的例子可见, 最优控制问题中应包含状态方程、边界条件、控制约束, 有时还包含状态约束。现分述如下:

1. 状态方程 它反映了被控系统在动态过程中所遵循的物理或化学规律。在集中参数的情况下, 动态系统的运动规律可以用一组一阶常微分方程来描述, 写成矢量的形式。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1-14)$$

式中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是空间 R^n 中的矢量, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$ 是空间 R^r 中的矢量; $f(x, u) = [f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_n(x, u)]^T$ 是 n 维矢量函数。设函数 $f_i(x, u)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 对 xu 是连续的; 对 x 是连续可微的。

2. 边界条件 即物理系统的初始状态和终端状态应满足的条件, 初始时刻 t_0 和初始状态通常是给定的, 即

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1-15)$$

但应说明, 在某些特殊的情况中, 初始状态不一定按照上式给定。

在终端时刻 $t = t_f$ 。要求 满足终端约束条件

$$N_i(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (m \leq n) \quad (1-16)$$

在 R^n 空间中, 所有满足式 (1-16) 式的点 $\mathbf{x}(t_f)$ 组成的集合, 记成 Ω 。

$$\Omega = \{\mathbf{x}(t_f): N_i(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m\} \quad (1-17)$$

我们称 Ω 为目标集, 其中函数 $N_i(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ 对 $\mathbf{x}$ 、 t 连续可微。

终端时刻 t_f 可以是固定的, 也可以是不固定的。例如如在快速控制问题中, t_f 是自由的。

我们把具有式 (1-16) 终端约束的问题, 叫做可变终端问题。若没有终端约束条件, 则称为自由终端问题。若 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 是给定的, 则称为固定终端问题。这时目标集蜕化成一个点, 且式 (1-16) 可记为

$$\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f = 0$$

各分量 $x_i(t_f)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 也可以部分自由、部分固定、部分满足一定约束条件。后二者均可以用式 (1-16) 表示。

3. 控制变量 u 假定对象的运动是可以控制的, 我们把允许控制的值域称作控制域 U 。如果对控制量没有约束, 则控制量的值域

$$U = R^r$$

即控制量可以在整个 r 维空间中取值。一般情况下控制变量 u 都受到一定的约束, 则 U 为 R^r 中的一个子集, 例如:

$$U = \{u_i: a_i \leq u_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r\}$$

a_i, b_i 为常数, 则 U 是一有界闭集。

如果控制域是一超球时, 则有

$$u = \{u_i: |u_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, r\}$$

显然, 应在 $u \in U$ 的条件下求解最优控制。

许多问题的最优控制不但能在控制域的边界上取值, 甚至在边界上跳来跳去 (例如开关型或 Bang-Bang 型的控制), 所以函数 $u(t)$ 应包括分段连续函数。我们把在控制域上取值的, 且具有有限个第一类间断点的时间的分段连续函数 $u(t)$ 称为容许控制, 则根据状态方程 (1-14) 可知状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 可以是时间的分段可微的连续函数。至此, 我们可以把控制域记为

$U = \{u(t): \text{分段连续具有有限个第一类间断点的函数}\}.$

$$\varphi_i(u) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1-18)$$

4. 性能指标 根据控制的要求, 应有一个衡量系统控制质量的指标, 在最优控制中性能指标有三种形式:

积分型的,

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (1-19)$$

具有积分型性能指标的最优控制问题称作拉格朗日 (Lagrange) 问题。

f_0 是 x 、 u 的连续函数, 对 x 是连续可微的。

一般型的,

$$J[u] = s(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t)) dt \quad (1-20)$$

相应的最优控制问题称鲍尔札 (Bolza) 问题。 s 和 f_0 是 x 、 u 的连续函数, 对 x 是连续可微的。

终端型的,

$$J[u] = s(x(t_f), t_f) \quad (1-21)$$

相应的最优控制问题称梅耶 (Mayer) 问题。

以上三种类型的性能指标, 经过适当的处理后可以相互转化。例如对积分型的性能指标, 引入一个新的变量 $x_{n+1}(t)$

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = f_0(x, u) \quad x_{n+1}(0) = 0$$

显然积分型性能指标就转化为终端型的

$$J[u] = x_{n+1}(t_f)$$

以上的系统式 (1-14) 及性能指标式 (1-19)、(1-20) 都不明显地依赖于时间 t 。我们称这样的系统为自治系统, 自治系统的解的轨线沿着时间轴 t 移动是不变的, 因此, 对于自治系统, 重要的仅仅是过程持续的时间, 并且可以取 $t_0 = 0$ 。

对于非自治系统的最优控制问题

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x \in R^n \\ J[u] &= s(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt \end{aligned}$$

假定初始时间 t_0 是给定的。

如果我们引入一个辅助变量 x_{n+1}

令

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \quad x_{n+1}(t_0) = t_0$$

显然有 $x_{n+1} = t$, 利用未知变量 x_{n+1} 能将以上非自治系统的状态方程转化成自治方程组

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x, x_{n+1}, u), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{x}_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

$$J[u] = s(x(t_f), x_{n+1}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, x_{n+1}, u) dt$$

因此, 自治系统与非自治系统并无本质区别。在控制中经常称自治系统为定常系统, 非自治系统为时变系统。

综上所述, 最优控制问题可以这样叙述: 如果存在某一个控制 $u^*(t) \in U$ 、 $t \in (t_0, t_f)$, 在满足式 (1-14)~(1-17) 的条件下, 使性能指标取极小值, 或者对任何控制 $u(t) \in U$, 均有

$$J[u^*] \leq J[u] \quad \forall u \in U$$

则 u^* 称为 (在极小意义下的) 最优控制, 相应的 $x^*(t)$ 称为对应于最优控制 $u^*(t)$ 的最优轨线。类似地可以定义在极大意义下的最优控制与最优轨线。在工程中经常遇到如下的几

类最优控制问题。快速控制，其性能指标为

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

线性二次型性能指标最优控制：其状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

性能指标为、

$$J[u] = x^T(t_f) S x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) \dot{x}(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

式中矩阵 S 、 $Q(t)$ 是半正定的，记为 S 、 $Q(t) \geq 0$ ； $R(t)$ 是正定的，记为 $R(t) > 0$ 。如上节中的例 1-2 即线性二次型最优控制问题。

最小能量控制：一般指当上述二次型指标中 S 、 Q 为零阵时的最优控制问题。事实上，该问题转变为控制能量最小的问题。

然而物理系统的主要能耗往往并不是控制能量的消耗，因此如果性能指标表示物理系统的主要能量消耗，都可以称作最小能耗控制问题。例如调速系统的主要能量消耗并非控制量的能耗，而应为输出的机械能量以及主回路电阻上的能量消耗。因此，这两部分能耗应包含在调速系统最小能耗的性能指标之中。

以上是连续系统最优控制问题的数学描述。下面给出离散系统的数学描述。对于离散系统有状态方程

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \varphi(k, x(k), u(k)) \\ x(k_0) &= x_0 \\ k &= k, k_0+1, k_0+2, \dots, k_f \end{aligned} \quad (1-22)$$

其 $x(k) = [x_1(k) x_2(k) \dots x_n(k)]^T$ 是 R^n 空间中的矢量， $\varphi = (\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)^T$ 是矢量函数。

终端约束，

$$N_j(k_f, x(k_f)) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (m \leq n) \quad (1-23)$$

控制约束，

$$\varphi_i(u(k)) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (l \leq r) \quad (1-24)$$

满足约束条件式 (1-24) 的控制称作允许控制。

性能指标，

$$J[u] = s(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f} f_0(k, x(k), u(k)) \quad (1-25)$$

离散系统的最优控制问题就是在满足式 (1-22)~(1-24) 的各种约束条件下寻找使性能指标式 (1-25) 取极小值的最优控制。

离散问题式 (1-22)~(1-25) 常称为多级决策过程。

实际上，在进行连续系统最优控制问题的数值计算时，首先要将连续系统离散化，从而得到一个离散最优问题，然后解离散问题。