常微分方程青年论文专辑

秦元勋 主编

科学出版社

常微分方程青年论文专辑

秦元勋　主编

科　学　出　版　社

1 9 9 1

内 容 简 介

本书为1991年在北京召开的全国青年常微分方程学术讨论会的优秀论文专辑．内容包括：1.常微分方程的定性、稳定性、振动性理论和初边值问题；2.泛函微分方程的稳定性、振动性和周期解；3.动力系统与分支等非线性现象的研究；4.微分方程在控制论、生物、物理和力学等方面的应用．

本书可供大学数学、物理、力学、控制论、生物等专业的大学生、研究生、教师和有关的科研人员参考．

常微分方程青年论文专辑

秦元勋　主编

责任编辑　吕　虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

北京市京东印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1991年7月第一版　开本：850×1168　1/32

1991年7月第一次印刷　印张：15 3/4

印数：0001—2000　字数：411000

ISBN 7-03-002473-7/O·475

定　价：14.60元

《常微分方程青年论文专辑》编委会

编者的话

对青年人的培养是我国科技发展战略的一件大事．为积极支持有利于青年人成长的活动，应用数学研究所决定发起组织“全国青年常微分方程学术讨论会”，此项倡议得到了数学研究所的大力支持．据此我们成立了由主任：张锁春，副主任：赵怀忠、赵晓强，委员：秦元勋、王联、俞元洪、欧阳定武、张毅组成的会议筹备委员会，并联合向中国科学院教育局提交申请报告，获得了教育局的批准和会议经费，决定于1991年8月在北京召开“全国青年常微分方程学术讨论会”．

为了便于交流，汇集优秀的研究成果，决定出版此次会议论文集．本论文集的出版得到了科学出版社的大力支持和有关编辑的热心相助，也得到了参加征文的广大作者们的鼎力合作，从而使文集能在开会之时与作者见面．

本次会议的征文对象是年龄在35岁以下的硕士、博士和从事常微分方程有关领域研究的青年工作者．为了保证文集的质量和学术水平，每篇文章除了要求必须有教授推荐外，会议筹备组还聘请了有关专家进行评审，并由应用数学研究所和数学研究所有关的同志组成了编委会，对收到的近130篇论文逐一进行认真的审查，同时又对超过三千字的论文进行了压缩和修改，并对全稿进行了分类和加工．在此，编委会对付出辛勤劳动的同志们表示衷心的感谢！

我们相信，本次会议的召开和本文集的出版，必将有力地推动我国常微分方程研究的发展．我们衷心希望有志于我国科学事业发展的青年们，发扬为国争光、献身科学的精神，勤奋求实、开拓创新，在科学探索的征途上顽强拼搏，取得更丰硕的成果！

序

常微分方程是一门既古老又富有青春活力的学科．这是因为自Newton解决二体问题算起，至今已有三百多年的历史；另外，由于科学技术的不断发展，在工程技术、物理、化学、力学、生物学等学科领域中提出了大量急需解决的新问题，比如登月遇到的三体（地、月、飞船）问题，自动控制中的运动稳定性和控制问题，无线电技术中的非线性振动问题，生物种群的繁殖和捕食问题等等，都极大地推动常微分方程的理论和方法不断地向前发展．

常微分方程的研究从Newton的实域初等解析解到Cauchy的复域级数形式的解；从寻找初等解析解到证明解的存在性、唯一性；从用摄动理论寻找近似解到利用电子计算机得到数值解和推导公式；从 Poincarè 的实域曲线形式的定性研究到今日开展的复域曲面形式的定性研究；从有微分方程的Birkhoff动力系统研究到一般的动力系统的研究；从带有时滞的常微分方程研究到一般的泛函微分方程的研究；从微分方程的确定解研究到微分方程混沌解的研究等等，充分反映了这门学科的发展进程和丰富多彩的内容．很显然，这门学科的发展既来自实际的需要，又来自数学内部其它学科的推动（比如拓扑学、泛函分析、复变函数、计算数学等），尤其是现代高速电子计算机的发展，给这门古老的学科灌注了新的活力．现在该学科显得更加生气勃勃，生机盎然．

值得一提的是，对常微分方程进行深入的研究将会遇到极大的困难．众所周知，三体问题至今没有找到初等解析解；1841年Liouville就证明了最简单的非线性常微分方程——Riccati方程——一般不存在初等解析解；Hilbert第16问题尚未彻底解决等等，这就需要有志者前仆后继、坚持不懈地耕耘．

青年是祖国未来的希望所在，十分可喜的是近年来我国的常微分方程学术界，涌现出一大批新生力量．他们崭露头角，朝气蓬勃，年青有为．全国青年常微分方程学术交流会的召开，为青年人提供交流成果的场所．本论文集是他们最新研究成果的汇集．本人为之喜悦万分，特乐于为之作序．我深信，在现有良好的基础上，坚持下去，中国人必将在这一领域中对世界作出应有的贡献．

秦元勋

1991.1.1.于美国佛罗里达大学

目　　录

一、常微分方程

二、泛函微分方程

三、动力系统和分支

四、微分方程的应用

一、常微分方程

一类三维多项式系统的强有根定理[1)]

赵晓强

（中国科学院应用数学研究所）

考虑复域中三维多项式系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dw_1}{dT}=P_1(w_1,w_2,w_3) \\ \dfrac{dw_2}{dT}=P_2(w_1,w_2,w_3) \\ \dfrac{dw_3}{dT}=P_3(w_1,w_2,w_3) \end{cases} \qquad (E_n^3)$$

其中$P_i(w_1,w_2,w_3)$为三元多项式，且$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{\deg P_i(w_1,w_2,w_3)\}=n$，以及$P_i(w_1,w_2,w_3)$（$i=1,2,3$）无公因子．设$P_i^*(w_1,w_2,w_3)$为$P_i(w_1,w_2,w_3)$的$n$次齐次式，记

$$\bar{P}_i(W_1,W_2,W_3,M)=M^nP_i\left(\frac{W_1}{M},\ \frac{W_2}{M},\ \frac{W_3}{M}\right)$$

$$i=1,2,3$$

显然，$P_i^*(W_1,W_2,W_3)=\bar{P}_i(W_1,W_2,W_3,0)$，作变换$T_1$：

$$w_1=\frac{1}{M},\quad w_2=\frac{W_2}{M},\quad w_3=\frac{W_3}{M}$$

则(E_n^3)变为

1） 国家自然科学基金资助项目．

$$\begin{cases} \dfrac{dW_2}{dT'} = W_2 \bar{P}_1(1, W_2 W_3, M) - \bar{P}_2(1, W_2, W_3, M) \\ \dfrac{dW_3}{dT'} = W_3 \bar{P}_1(1, W_2 W_3, M) - \bar{P}_3(1, W_2, W_3, M) \\ \dfrac{dM}{dT'} = M \bar{P}_1(1, W_2, W_3, M) \end{cases} \tag{1}$$

作一个二维复多项式系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dW_2}{dT} = W_2 P_1^*(1, W_2, W_3) - P_2^*(1, W_2, W_3) \equiv E(W_2, W_3) \\ \dfrac{dW_3}{dT} = W_3 P_1^*(1, W_2, W_3) - P_3^*(1, W_2, W_3) \equiv F(W_2, W_3) \end{cases} \tag{2}$$

记

$IS_1 = \{(1, W_2, W_3, 0) \in CP^3;\ (W_2, W_3)$

为（2）之有限奇点$\}$

$IS_1' = \{(0, W_2, W_3, 0) \in CP^3, (W_2, W_3, 0) \in CP^2$

为（2）之无穷远奇点$\}$

其中CP^2和CP^3分别为二维和三维复射影空间.

类似地，分别作变换T_2: $w_1 = \dfrac{W_1}{M}$, $w_2 = \dfrac{1}{M}$, $w_3 = \dfrac{W_3}{M}$;

T_3: $w_1 = \dfrac{W_1}{M}$, $w_2 = \dfrac{W_2}{M}$, $w_3 = \dfrac{1}{M}$, 可定义IS_2, IS_2'和IS_3, IS_3'.

定义 1 集合$IS = IS_1 \cup IS_2 \cup IS_3$称为($E_n^3$)之无穷远奇点集.

引理 1 如果 $\deg P_1^*(1, , w_2, w_3) \leqslant n-1$, 则 $IS_1' \subset IS_2 \cup IS_3$; 如果$\deg P_1^*(1, , w_2, w_3) = n$, 则$IS_1' = \{(0, W_2, W_3, 0) \in CP^3;$ $W_2, W_3 \in C\}$. 对于IS_2'和IS_3', 相应的结论也成立.

证明 对系统（2），记 $k = \max\{\deg E(W_2, W_3),$

$\deg F(W_2,W_3)\}$，则$k\leqslant n+1$，且

$$\bar{E}(W_2,W_3,M)=M^k E\left(\frac{W_2}{M},\ \frac{W_3}{M}\right)$$

$$=W_2\frac{P_1^*(M,W_2,W_3)}{M^{n-k+1}}-\frac{P_2^*(M,W_2,W_3)}{M^{n-k}}$$

$$\bar{F}(W_2,W_3,M)=M^k F\left(\frac{W_2}{M},\ \frac{W_3}{M}\right)$$

$$=W_3\frac{P_1^*(M,W_2,W_3)}{M^{n-k+1}}-\frac{P_3^*(M,W_2,W_3)}{M^{n-k}}$$

由(E_n^2)无穷远奇点之定义[2]有

$$IS_1'=\{(0,W_2,W_3,0);\ (W_2,W_3,0)\in CP^2, \text{且} W_2\bar{F}(W_2,W_3,0)-W_3\bar{E}(W_2,W_3,0)=0\}$$

由于

$$W_2\bar{F}(W_2,W_3,0)-W_3\bar{E}(W_2,W_3,0)$$
$$=\left(\frac{W_3P_2^*(M,W_2,W_3)}{M^{n-k}}-\frac{W_2P_3^*(M,W_2,W_3)}{M^{n-k}}\right)\Bigg|_{M=0}$$

故有三种情形：

（1）如果$k=n+1$，也即$\deg P_1^*(1,W_2,W_3)=n$，则

$$IS_1'=\{(0,W_2,W_3,0)\in CP^3;\ W_2,W_3\in C\}$$

（2）如果$k=n$，则

$IS_1'=\{(0,W_2,W_3,0)\in CP^3;\ W_2P_3^*(0,W_2,W_3)-W_3P_2^*(0,W_2,W_3)=0\}$以及$\deg P_1^*(1,W_2,W_3)\leqslant n-1$．由于$P_1^*(W_1,W_2,W_3)$为$n$次齐次多项式，故$P_1^*(0,W_2,W_3)\equiv 0$．

又由于

$$IS_2=\{(W_1,1,W_3,0);\ W_1P_2^*(W_1,1,W_3)-P_1^*(W_1,1,W_3)=0,\ W_3P_2^*(W_1,1,W_3)-P_3^*(W_1,1,W_3)=0\}$$

$$IS_3=\{(W_1,W_2,1,0);\ W_1P_3^*(W_1,W_2,1)-P_1^*(W_1,W_2,1)=0,\ W_2P_3^*(W_1,W_2,1)-P_2^*(W_1,W_2,1)=0\}$$

故

$$IS_1'\cap\{(0,1,W_3,0)\in CP^3;W_3\in C\}\subset IS_2$$

$$IS_1'\cap\{(0,W_2,1,0)\in CP^3;W_2\in C\}\subset IS_3$$

所以

$$IS_1'\subset IS_2\cup IS_3.$$

（3）如果$k\leqslant n-1$，则$\deg P_1^*(1,W_2,W_3)\leqslant n-1$，也即$P_1^*(0,W_2,W_3)\equiv 0$. 故可设

$$P_1^*(W_1,W_2,W_3)=W_1[P_{11}^*(W_2,W_3)+P_{12}^*(W_1,W_2,W_3)]$$

其中$P_{11}^*(W_2,W_3)$，$P_{12}^*(W_1,W_2,W_3)$均为$(n-1)$次齐次式，且$\deg P_{12}^*(1,W_2,W_3)\leqslant n-2$. 再设

$$P_2^*(W_1,W_2,W_3)=P_{21}^*(W_2,W_3)+P_{22}^*(W_1,W_2,W_3)$$

$$P_3^*(W_1,W_2,W_3)=P_{31}^*(W_2,W_3)+P_{32}^*(W_1,W_2,W_3)$$

其中P_{21}^*，P_{22}^*，P_{31}^*，P_{31}^*都为n次齐次式，且$\deg P_{i2}^*(1,W_2,W_3)\leqslant n-1\ (i=2,3)$，也即$P_{i2}^*(0,W_2,W_3)\equiv 0\ (i=2,3)$，由于$k=\max\{\deg E(W_2,W_3),\ \deg F(W_2,W_3)\}\leqslant n-1$，故

$$W_2P_{11}^*(W_2,W_3)-P_{21}^*(W_2,W_3)\equiv 0$$

$$W_3P_{11}^*(W_2,W_3)-P_{31}^*(W_2,W_3)\equiv 0$$

所以

$$W_3P_{21}^*(W_2,W_3)\equiv W_2P_{31}^*(W_2,W_3)$$

从而我们有

$$W_3P_2^*(W_1,W_2,W_3)-W_2P_3^*(W_1,W_2,W_3)$$

$$\equiv W_3P_{22}^*(W_1,W_2,W_3)-W_2P_{32}^*(W_1,W_2,W_3)$$

故由前面IS_2和IS_3的表达式不难看出，

$$\{(0,1,W_3,0);W_3\in C\}\subset IS_2,\{(0,W_2,1,0);W_2\in C\}\subset IS_3$$

因此，$\{(0,W_2,W_3,0)\in CP^3;\ W_2,W_3\in C\}\subset IS_2\cup IS_3$，特别地，$IS_1'\subset IS_2\cup IS_3$.

由（1），（2）和（3）知，引理1结论成立.

定义2　设Σ为(E_n^3)之一相曲面[3]，如果对于无穷远点$(W_1^0,W_2^0,W_3^0,0)\in CP^3$，存在点列$(w_1^{(n)},w_2^{(n)},w_3^{(n)})\in\Sigma(n=1,2;\cdots,\infty)$，使得对某一$i(1\leqslant i\leqslant 3)$有$\lim\limits_{n\to\infty}|w_i^{(n)}|=+\infty$，以及对所有

$j(1\leqslant j\leqslant 3,\ j\neq i)$有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_j^{(n)}}{w_i^{(n)}}=\frac{W_j^0}{W_i^0}$，则称$\Sigma$过点$(W_1^0,W_2^0,W_3^0,0)\in CP^3$.

引理2[4] 设Σ为(E_n^3)的一非有限奇点的相曲面。如果Σ经过无穷远点$(W_1^0,W_2^0,W_3^0,0)\in CP^3$，且对某一$i(1\leqslant i\leqslant 3)W_i^0\neq 0$，则它必经过$IS_i\cup IS_i'$中某一点.

如果(E_n^3)的相曲面Σ过其某一有限或无穷远奇点P，我们称P为Σ的一个“根”。

定理 如果(E_n^3)满足下列三不等式之一：

$$\deg P_1^*(1,w_2,w_3)\leqslant n-1,\quad \deg P_2^*(w_1,1,w_3)\leqslant n-1$$

$$\deg P_3^*(w_1,w_2,1)\leqslant n-1$$

则它的任一非有限奇点之相曲面必经过其某一无穷远奇点，因此任一相曲面必有根.

证明 不妨设$\deg P_3^*(w_1,w_2,1)\leqslant n-1$，则$P_3^*(w_1,w_2,0)\equiv 0$. 由引理1知，$IS_3'\subset IS_1\cup IS_2$. 设$\Sigma$为$(E_n^3)$的一非有限奇点之相曲面，由解析系统的有根定理[4]知，Σ必经过某一无穷远点$(W_1^0,W_2^0,W_3^0,0)\in CP^3$. 有两种情形：

1）如果$W_3^0\neq 0$，由引理2，Σ必经过$IS_3\cup IS_3'$中某一点. 又由于$IS_3'\subset IS_1\cup IS_2$，故定理结论成立.

2）如果$W_3^0=0$，不妨设$W_1^0\neq 0$. 再由引理2，Σ必经过$IS_1\cup IS_1'$中某一点. 如果Σ经过IS_1中点，则定理结论成立. 如果Σ经过IS_1'中点，设其为$(0,\overline{W}_2^0,\overline{W}_3^0,0)\in CP^3$，则又有两种情形：

（1）如果$\overline{W}_3^0\neq 0$，则由1）知结论成立.

（2）如果$\overline{W}_3^0=0$，则$\overline{W}_2^0\neq 0$，也即Σ经过无穷远点$(0,1,0,0)\in CP^3$. 作变换T_2：

$$w_1=\frac{W_1}{M},\quad w_2=\frac{1}{M},\quad w_3=\frac{W_3}{M}$$

则(E_n^3)变为