〔美〕W. M. 罗森诺 等 主编

传热学手册

上册

科学出版社

传　热　学　手　册

（上　册）

［美］W. M. 罗森诺 等 主编

李荫亭 等 译

王补宣 等 校

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书是国内翻译介绍的第一本传热学手册．原书主编是国际上享有盛名的美国工程热物理学家，各章的作者也都是在他们所从事的分支领域中卓有成就的知名学者．本书比较简明而又比较全面，几乎概括了传热学的所有各个分支领域；书中不仅给出热物性数据和计算用的各种关系式，而且还对最新资料作了述评．全书共十九章，分上、下两册出版．上册包括一至九章，主要内容是：传热学的基本概念和基本数学方法，热物性数据，导热问题的各种解法（解析法、数值法和模拟法），自然对流，受迫对流（包括外部流动和通道内的流动）以及稀薄气体中的换热．下册包括十至十九章，主要内容有：强化传热的方法，电磁场对换热的影响，凝结，沸腾，两相流，辐射，烧蚀，传质冷却，换热器以及高温热防护系统．

本书主要对象是在动力、化工、航空、电力、冶金、核能、航天、电子、建筑等方面从事传热工作的科技人员，以及高等学校有关专业师生．对其他方面希望知道解决传热问题的办法的读者也有参考价值．

Warren M. Rohsenow *et al.* (Ed.)
HANDBOOK OF HEAT TRANSFER
McGraw-Hill, 1973

传热学手册
（上 册）

〔美〕W. M. 罗森诺 等 主编
李荫亭 等 译
王补宣 等 校

责任编辑 陈文芳

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年12月第一版 开本：787×1092 1/16
1985年12月第一次印刷 印张：44
印数：精 1—4,550 插页：精 2
平 1—2,100 字数：1,036,000

统一书号：15031・682
本社书号：4033・15—10

定价：布脊精装 11.20 元
平 装 10.20 元

原　　序

这本手册差不多是在十年之前奠定基础的，其时，编者、一群作者、以及出版公司的一位代表在费城的一次午餐会上碰头，讨论了编写计划．那时我们同意这本手册的宗旨应该是：以精炼而又便于利用的形式介绍传热学的最新知识，供生产部门的工程师、研究人员、教师、学生、以及技术员使用；简言之，要适用于任何一个寻求解决传热问题办法的人员．为了实现这个目标，把传热学这一总学科分为二十个分支领域，一些知名的专家承担了介绍他们各自所从事的分支领域中现有传热知识的责任．

本手册包括有一大批热物性数据；介绍了导热问题的各种解法（严格的解析解法、各种近似解法以及模拟法）和解；汇集了有关受迫对流（包括通道内的流动和外部流动）和自然对流的最新资料．书中还论述了磁场对传热的影响、固体表面跟稀薄气体之间的换热，报道了关于膜状凝结和珠状凝结、沸腾、以及两相流传热的最新知识．手册中有篇幅很大的一章是论述辐射和辐射特性的；有专门一章论述烧蚀；还有关于在固定和对流系统中的传质冷却的知识．此外，手册中还包括以下一些专题：高温热防护系统、强化传热的方法、以及换热器的具体设计步骤．

我们感谢威廉·贝格先生的合作，承蒙他编辑了这本书．我们感谢约瑟夫·埃杰顿、盖尔·帕克、基思·威尔金森、维克·恩菲尔德、以及 Scripta Technica 全体人员，他们在本书准备付印过程中完成了各项出色的工作．我们还要感谢 McGraw-Hill 公司的丹尼尔斯·菲谢尔、哈罗德·克劳福德、以及唐·道格拉斯，他们这些年来始终一贯地给予我们以支持和鼓励．最后我们要特别感谢我们的作者，他们在编写他们各自承担的章节中付出了艰巨劳动，他们跟编者一起耐心等待本手册最终出版．由于他们的努力，我们这本书对工程界当是有价值的．我们十分欢迎来自读者的批评建议，欢迎读者提出如何使本手册今后再版时更有实用价值这一方面的宝贵意见．

W. M. 罗森诺

J. P. 哈特尼特

目　　录

第一章 引 论

1. 传热学的基本概念

J. P. 哈特尼特(J. P. Hartnett)
W. M. 罗森诺 (W. M. Rohsenow)

1. 传热机理的类型

由于温差或温度梯度而传递的能量定义为热. 它由高温区流向低温区,因此,它是有方向性的. 传热的基本型式是传导与辐射.

传导是热量从物体的高温部分向同一物体的低温部分传递,或者,从一个高温物体向另一个与它接触的低温物体传递. 传导过程是在分子一级发生的, 能量从较高能级的分子向较低能级的分子传递. 可以很容易地想像,在气体中,高温区域中分子平均动能大于低温区的分子平均动能. 处于恒定和随机运动中的具有较高能量的分子, 周期性地与较低能级的分子相碰撞、交换能量和动量. 这样,就存在一个能量从高温区向低温区的连续传递过程. 液体中,分子比气体中更加密集,但分子的能量交换过程与气体的在性质上仍然相似. 在非导电体(电介质)的固体中,热量是通过由原子运动引起的晶格波来传导的. 在导电良好的固体中,这种晶格振动对能量传递过程只有很小的作用,而大体上与气体中的分子运动相似的自由电子的运动,对导热起了主要作用.

在宏观范围内,我们指出,热流正比于温度梯度,比例因子被定义为导热系数 k:

$$\frac{q}{A} = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{1}$$

该式对固体、液体和气体中的导热过程都适用. 根据上述看法, 正如我们可以预料的那样,导电固体的导热系数要比电介质的大,而固体一般要比液体有更大的导热系数.

在处理导热问题时,常常引进另一个与导热系数有关的参数,这个参数就是导温系数(又称热扩散率) α

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \tag{2}$$

其中，ρ 是密度，c 是比热.

辐射，或者更准确地称之为热辐射，是物体因其温度而发射的电磁辐射. 这种热辐射与可见光、X 射线、无线电波具有相同的本质，它们的差别只是其波长不同而已. 眼睛能感觉到的电磁辐射处在 35 至 75 微米的范围内；这个波长范围被定义为电磁波谱的可见区. 无线电波有 10^4 微米和更长的波长，X 射线的波长为 0.01 至 1 微米，而热辐射指的是波长为 0.1 至 100 微米的射线. 所有受热的固体和液体，以及某些气体，都具有热辐射的能力. 在宏观范围内，热辐射的计算建立在斯蒂芬-玻耳兹曼定律的基础之上. 根据这个定律，理想辐射体辐射的热流与绝对温度成四次方关系

$$e_b = \sigma T^4 \tag{3}$$

其中，σ 是斯蒂芬-玻耳兹曼常数. 工程表面一般不是理想辐射体，因此，就真实物体的表面来说，上述定律应改为:

$$e = \varepsilon\sigma T^4 \tag{4}$$

ε 称为表面的发射率，其值在 0 和 1 之间.

对流，有时被看作是一种独特的传热型式，它是指从边界表面向运动流体的传热，或者是通过运动流体内的一个流动面的热量传递. 假若流体的运动是由泵，风机，风扇或某种类似的设备引起的，这样的传热过程称之为“受迫对流”. 假若流体的运动是由传热本身所产生的密度差造成的，这种过程称之为“自然对流”或自由对流. 对这些传热过程的细致观察表明，基本的传热机理是传导和辐射，两者均受流体运动的影响. 在低速流体流动中，对于通过边界表面流入或输出热量的对流过程，引进换热系数 h 是很方便的，它按著名的牛顿冷却定律，由式(5)来定义:

$$\frac{q}{A} = h(T_f - T_s) \tag{5}$$

其中，T_s 是表面温度，T_f 是流体的特征温度.

对于无界对流中的表面，如浸在大容积流体中的平板，管子，旋转体等表面上的换热，通常是用远离表面的流体温度 T_f(常以 $T_{f\infty}$ 为标记)来定义式(5)中的 h. 对于有界对流，如流体流过管内，通道，或横跨管束等，T_f 通常取作焓-混合-平均温度，常用 T_m 表示.

这样定义的换热系数可能包含着辐射和传导两者的共同作用. 若忽略辐射的作用，把传热只归因于传导，在这种情况下，可以得出:

$$h = \frac{\dfrac{q}{A}}{T_f - T_s} = \frac{-k\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)_s}{T_f - T_s} \tag{6}$$

于是，换热系数就被认为是表面处的无量纲温度梯度. 它对几何形状、流体物理性质和流体的速度是敏感的.

对于包含高速气体流动(高亚声速或超声速)的对流过程，更有意义和更常使用的换热系数由下式给出:

$$\frac{q}{A} = h(T_r - T_s) \tag{5a}$$

其中 T_r，常被称为“绝热壁温”或“恢复温度”，它是在没有任何热流进出表面、也没有表面与周围介质的辐射换热的情况下，表面所能达到的平衡温度. 绝热壁温通常取决于流体

性质和界壁性质．一般说来，绝热壁温可由无量纲恢复因子 r 表示为：

$$T_r = T_f + r\frac{V^2}{2c_p}$$

气体的 r 值通常在 0.8 和 1.0 之间．可以看出，对低速流动，恢复温度等于自由流温度 T_f．因此，式(5a)化简为式 (5)．按这种观点，可以认为式(5a)是换热系数的普遍定义．

对于某些物理情况，可以解析地确定流场和温度分布，并且由此可以估计换热系数 h．在这类能够解析的情况下，对于既包括辐射又包括传导的传热过程分别确定这两种传热型式的作用，再把换热系数表示为式(6)所定义的形式，即把传递热量只归因于传导的结果，这样做将是方便的．不用说，在确定总的传热时，必须把辐射的效应加上．不巧的是，在许多工程问题中，对流传热不能解析地确定，而必须用实验来估计．在这种情况下，假若辐射也是一个重要环节，通常不可能把传导和辐射分开，因此换热系数也不能解释为无量纲温度梯度，而宁可用式(5)来定义．下面有关受迫和自然对流的章节将着重说明换热系数的确定问题．

2. 比率方程

导热方程(1)给出了热流与温度梯度之间的关系．它是表象性方程类型的一个例子，利用它可以判断其它一些比率过程．这里特别感兴趣的是动量和质量传递的比率方程．

a. 动量传递　考虑两块平行平板之间的流体，两平板的间距为 S，下平板静止，上平板以速度 V 运动．在稳态条件下，速度分布将是线性的，如图 1 所示．为了维持运动，

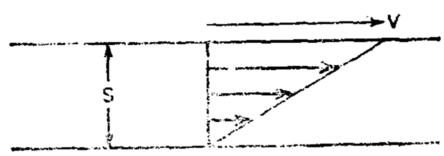

Fig. 1.

图 1

必须有力 F 连续作用于上平板，并且有一大小相等而方向相反的力传递给静止平板．这个力与平板面积 A 之比率　F/A　称为切应力 τ，对于工程上比较重要的许多流体来说，切应力的大小正比于速度 V，反比于平板间距 S

$$\tau = \mu\frac{V}{S} \tag{7}$$

比例因子 μ 叫做动力粘度，它是流体的一种属性．满足这种关系的流体，如水和空气，都称为牛顿流体．还有一种更复杂的所谓非牛顿流体，它遵循更复杂的规律，将在后面的章节里论述．把这一基本的牛顿定律推广到更一般的流体运动，我们可以写出

$$\tau = \mu\left(\frac{dV_x}{dy}\right) \tag{8}$$

这个切应力 τ 可以用动量 ρV_x 的输运来解释．运动较快的分子将动量传给运动较慢的相邻的分子，因此在 y 方向造成了一个 x 方向动量的净传递．这可由下面重写的牛顿关系式看出：

$$\tau=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{d}{dy}(\rho V_x) \tag{9}$$

比率 $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ 已经给出了它自己的定义式，并被称为运动粘度 ν，即

$$\nu=\frac{\mu}{\rho} \tag{10}$$

运动粘度的量纲是 L^2/T，其公制单位为米²/小时．对于液体，动力粘度 μ 和运动粘度 ν 主要取决于温度，对压力相对说来是不敏感的，但在临界点附近除外．对于气体，动力粘度也取决于温度，而与压力几乎没有什么关系，但运动粘度则受温度和压力的影响很大，且与压力成反比．一般说来，液体的动力粘度要比气体的大，而气体的运动粘度则往往要大于液体的．例如，在大气压力和 20℃ 的情况下，水的动力粘度大约比空气高 50 倍，而空气的运动粘度则大约是水的 10 倍．

b. 质量传递　考虑位于间距为 S 的两个平行表面之间的滞止的纯干燥气体；将下表面弄湿，这可以通过在表面上敷设一个多孔吸液芯，或者利用在固体表面上保持一个薄液体层来实现．上表面是这样选取的，即使它能瞬时吸收从下表面可能传递过来的任何蒸汽．紧挨湿表面处的蒸汽分密度保持在 C_s，而在理想吸收表面处的分密度则认为是可以忽略的．如果能在某个足够长的时间间隔内保持这些条件，那么就将保证出现稳定状态，其时我们可以看到，分密度的分布是线性的．在这些条件下，从下表面向上表面传输的蒸汽量与 C_s 值成正比，而与板的间距成反比，

$$\frac{W}{A}=D\frac{C_s}{S} \tag{11}$$

其中，W 是被传输的蒸汽质量，A 是表面面积．比例因子 D 被称为质量扩散系数或通用扩散系数，其量纲是 L^2/T，公制单位是米²/小时．假若把这种关系推广到更复杂的系统，我们有：

$$\frac{W}{A}=-D\frac{\partial C}{\partial y} \tag{12}$$

这个关系式称为斐克扩散定律．

3. 流体力学基本概念

在处理对流问题时，了解流体绕外表面或通过闭合通道运动时的特性是很重要的．对于连续绕流外表面的液体和气体，可以看到，表面与流体间的相对速度在表面上变为零．从表面向外，速度迅速增加到自由流的数值，实际上，在距离表面不远的 S 处，速度已经达到自由流的数值．发生速度变化的这一薄层被称为边界层，这个术语是普朗特（Prandtl）建议的，他首先认识到这个基本现象．由于切应力正比于粘度和速度梯度之乘积，显然，大部分切应力仅仅发生在有速度梯度的边界层内，而在边界层外面，切应力将消减到很小．因此，可以指出，粘性效应只局限于边界层内，边界层外面的流动可认为是无粘性的．这样一来，在分析绕流外表面的流场时，无粘流方程可用以分析自由流的流场．而后把这样得到的速度分布

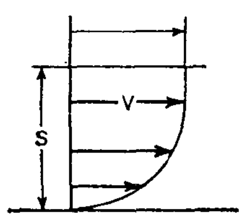

图 2

跟边界层方程联立求解．边界层方程考虑了粘性影响，可用以分析壁面附近的流场．用这种办法，就能确定作用于外表面上的阻力．

在流场中，在外表面有输入或传出热量（或质量）的情况下，发现有一个与速度边界层类似的薄层，叫做热边界层*（或浓度边界层），导热（或扩散）的影响将限制在该层之内．这个区域外面，流动基本上是无传导和非扩散的．

在流体流过闭合通道的情况下，边界层在通道进口处开始形成．在这个进口区域，存在一个无粘性流动核心和一个边界层．在离进口处顺流某一距离上，边界层向通道轴线发展并接合到一起，这时速度从通道轴线处的最大值，逐渐减小到边界表面上的零值．

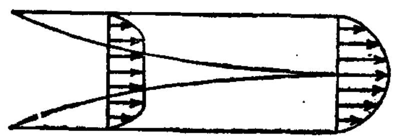

图 3

a．层流和湍流　1883年奥斯本·雷诺（Osborne Reynolds）指出，存在着两种类型根本不同的流体运动，他将这两类流动称为“层流”和“湍流”．例如，在绕流平板的情况下，平板前缘附近的边界层是光滑的或流线形的．这段边界层内各点的速度保持常值，不随时间而变化．在这个区域中，动量和能量传递是由牛顿切应力规律和傅里叶导热关系

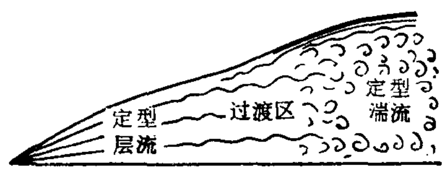

图 4

式所描述的扩散过程实现的．这个区域就是层流区域．假如平板足够长、或速度足够高，我们继续考察远离它的下游，那么就可以看到，流动性质发生了明显的变化．在边界层中任何一点，速度总是在某一平均值附近随时间而变化，如图5所示．现在，动量和能量传

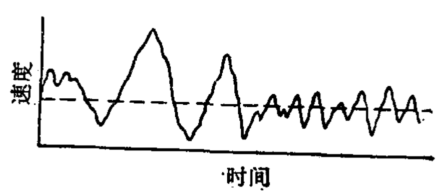

图 5

递不再受扩散过程控制了，而是宏观的涡旋从一个流体层向另一流体层随机运动，并在这一过程中传递动量和能量．湍流输运过程的分析要比层流情况更加困难，在一般情况下，处理方法是半经验性质的．

流动并非突然从层流变成湍流运动的，而是存在一个中间区域，它把定型层流运动与定型湍流**运动连接起来．这就是过渡区．实验已经证明，当无量纲物理量 $\left(\frac{u_c x}{\nu}\right)$、即所

---

* 热边界层又称温度边界层．——校者注

** 定型湍流又称充分发展的湍流、完全湍流、或旺盛湍流．——校者注

谓绕外表面流动的临界雷诺数，达到500000量级时，层流边界层开始经历这种过渡，而临界雷诺数的大小则取决于自由流中的湍流度.

对于圆管内的流动，已经发现，如果雷诺数 $\frac{\bar{u}d}{\nu}$ 低于 2300，流动一般将是层流，其中 $\bar{u}$ 是平均速度，d 是管子直径，ν 是运动粘度. 假若雷诺数大于10000，则流动发展为定型湍流. 在2300到10000的区域中，流动被认为具有过渡性质. 设法减小进口流动中的扰动，有可能改变这些雷诺数的数值，但是，对一般的工程应用来说，所引的数据是有代表性的.

b. 流动分离　在逆向压力梯度区，如在弯曲物体绕流中所遇到的，边界层会从表面分离. 在开始分离这一位置上，切应力变为零，而在这一点以后，贴近壁面的区域出现逆流，如图6所示. 在分离区域，边界层方程不再适用了，因此，流动的分析一般是很困难的.

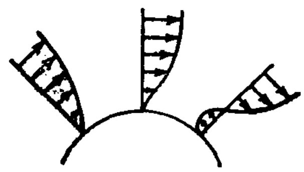

图 6

4. 单位

整个手册一般使用英制工程单位*，尽管有几章的作者选择了另外的单位制. 为了帮

表1　无量纲物性群

物性群[1)]	符号	名称
$\Delta p/\rho V^2$	Eu	欧拉 (Euler) 数
$\alpha t/r_0^2$	Fo	傅里叶 (Fourier) 数
$(L/d)(k/Vd\rho c_p)$	Gz[$=(L/d)$/RePr]	格雷兹 (Graetz) 数
$g\beta(\Delta T)L^3\rho^2/\mu^2$	Gr	格拉晓夫 (Grashof) 数
λ/L	Kn	努森 (Knudsen) 数
α/D	Le	刘易斯 (Lewis) 数
$V/V_{声}$	Ma	马赫 (Mach) 数
hL/k, hd/k	Nu	努赛尔 (Nusselt) 数
$Vd\rho c_p/k$	Pe(=Re Pr)	贝克列 (Peclet) 数
$c_p\mu/k$	Pr	普朗特 (Prandtl) 数
$g\beta(\Delta T)L^3\rho^2c_p/\mu k$	Ra(=Gr Pr)	瑞利 (Rayleigh) 数
$\rho VD/\mu$, $\rho VL/\mu$	Re	雷诺 (Reynolds) 数
$\mu/\rho D$	Sc	施米特 (Schmidt) 数
$h_D d/D$	Sh	舍伍德 (Sherwood) 数
h/c_pG	St(=Nu/RePr)	斯坦顿 (Stanton) 数
$V_\infty^2/c_p(\Delta T)_0$	E	埃克特 (Eckert) 数
V^2/gL	Fr	弗劳德 (Froude) 数
$f_r d/V$	St	斯特劳哈尔 (Strouhal) 数
$\rho V^2L/\sigma$	We	韦伯 (Weber) 数

1) f_r = 振荡频率，σ = 表面张力.

* 考虑到国际上通用公制，所以本手册翻译时已把英制工程单位一概改为公制单位. ——译者注

助手册的使用者，给出了换算表（表 2），以便有助于以任一单位制迅速进行计算．此外，工程结果尽可能以无量纲形式给出，而与单位制无关，并且由无量纲数求解所要求的有量纲物理量也比较简单明了．在传热学中经常碰到的无量纲物性群列于表 1．

5. 一般方程

下面给出一些传热学中碰到的一般方程．在这一节里把它们汇集在一起，以备参考使用．

a. 连续方程

向量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla \cdot(\rho \boldsymbol{V})=0$$

或

$$\frac{D \rho}{D t}+\rho \nabla \cdot \boldsymbol{V}=0$$

不可压缩流

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}=0$$

笛卡儿坐标：

$$\frac{D}{D t}=\frac{\partial}{\partial t}+u \frac{\partial}{\partial x}+v \frac{\partial}{\partial y}+w \frac{\partial}{\partial z}$$

柱坐标：

$$\frac{D}{D t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r \frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}+v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

球坐标：

$$\frac{D}{D t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r \frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

笛卡儿坐标：u，v，w 分别是 x，y，z 方向的分速度．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0$$

不可压缩流

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

柱坐标：v_r，v_θ，v_z 分别是 r，θ，z 方向的分速度．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r)+\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0$$

不可压缩流

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r)+\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

球坐标：v_r，v_θ，v_ϕ 分别是 r，θ，ϕ 方向的分速度．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r)+\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta)+\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi)=0$$

不可压缩流

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}=0$$

b. 动量方程(奈维-斯托克斯方程)

$P=$ 压力

$F=$ 每单位体积的彻体力

$\mu=$ 粘度

$\lambda=$ 第二粘度系数$\left(对单原子气体,\lambda=\frac{-2}{3}\mu\right)$

$\zeta=\lambda+\frac{2}{3}\mu(=0,$对单原子气体)

向量形式

$$\rho\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right]=\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})\right]$$

$$=-\nabla P+\boldsymbol{F}-\nabla\times[\mu(\nabla\times\boldsymbol{V})]+\nabla\left[\left(\zeta+\frac{4}{3}\mu\right)\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]$$

或者以 λ 表示:

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right]=\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})\right]$$

$$=-\nabla P+\boldsymbol{F}-\nabla\times[\mu(\nabla\times\boldsymbol{V})]+\nabla[(\lambda+2\mu)\nabla\cdot\boldsymbol{V}]$$

ρ、μ 为常数

$$\rho\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right]=-\nabla_p+\boldsymbol{F}+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}$$

笛卡儿坐标

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=F_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=F_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=F_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

ρ、μ 为常数

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+F_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+F_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+F_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

柱坐标

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2}{r}\right]&=F_r-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]\\&+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{v_r}{r}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right]&=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{2\mu}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)\right]\\&+\frac{2\mu}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{Dv_z}{Dt}&=F_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\right]\end{aligned}$$

ρ，μ 为常数

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right]&=F_r-\frac{\partial P}{\partial r}\\&+\mu\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{v_r}{r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right]&=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\\&+\mu\left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]&=F_z-\frac{\partial P}{\partial z}\\&+\mu\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]\end{aligned}$$

球坐标

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right]&=F_r-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mu\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right\}\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\\&\times\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\mu\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right\}\right]+\frac{\mu}{r}\left[4\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{4v_r}{r}-\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}-\frac{2v_\theta\text{ctg}\theta}{r}+r\text{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{\text{ctg}\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\Bigg]$$

$$\rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_rv_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\text{ctg}\theta}{r}\right]=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)\right.$$

$$\left.+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\mu\left\{\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right\}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right\}\right]+\frac{\mu}{r}\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{v_\theta\text{ctg}\theta}{r}\right)\cdot\text{ctg}\theta+3\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right\}\right]$$

$$\rho\left[\frac{Dv_\phi}{Dt}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\text{ctg}\theta}{r}\right]=F_\phi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi}$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{2\mu}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+v_r+v_\theta\text{ctg}\theta\right)+\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right\}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mu\left\{\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right\}\right]+\frac{\mu}{r}\left[3\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+2\text{ctg}\theta\left\{\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right\}\right]$$

ρ，μ 为常数

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right]$$

$$=F_r-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2v_r}{\partial\phi^2}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2v_\theta\text{ctg}\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\frac{v_rv_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\text{ctg}\theta}{r}\right]$$

$$=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2v_\theta}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\text{ctg}\theta}{r}\right]$$

$$=F_\phi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi}+\mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial^2v_\phi}{\partial\phi^2}-\frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{\partial}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]$$

c. 能量方程

e = 内能(每单位质量的)，

P = 压力，

Q = 内部产生的热量,即内热源,

$\boldsymbol{q}_r$ = 辐射热流向量,

T = 温度,

k = 导热系数,

ρ = 质量密度,

Φ = 机械、或粘性耗散函数,

i = 焓(每单位质量的).

向量形式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\nabla\cdot(k\nabla T)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r=\rho\frac{De}{Dt}+P\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\rho\left[\frac{De}{Dt}+P\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\frac{DP}{Dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\nabla\cdot(k\nabla T)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

ρ, k 为常数

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+k\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r=\rho\frac{De}{Dt}$$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\frac{DP}{Dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+k\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

对于理想气体

$$\frac{Di}{Dt}=c_p\frac{DT}{Dt}$$

$$\frac{De}{Dt}=c_v\frac{DT}{Dt}$$

笛卡儿坐标

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$
$$=\rho\left[\frac{De}{Dt}+P\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=\rho\frac{De}{Dt}+P\nabla\cdot\boldsymbol{V}$$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\frac{DP}{Dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

ρ, k 为常数

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+k\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r=\rho\frac{De}{Dt}$$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\frac{DP}{Dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+k\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

$$\Phi=2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\Bigg]+\lambda\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]^2$$

柱坐标

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

$$=\rho\frac{De}{Dt}+P\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\rho\left[\frac{De}{Dt}+P\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\frac{DP}{Dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

ρ, k 为常数

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+k\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r=\rho\frac{De}{Dt}$$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\frac{DP}{Dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+k\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

$$\Phi=\mu\left[2\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\}+\left(\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)^2\right]$$

$$+\lambda\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2$$

球坐标

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)$$

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r=\rho\frac{De}{Dt}+P\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\rho\left[\frac{De}{Dt}+P\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\frac{DP}{Dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2k\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r$$

ρ, k 为常数

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\Phi+k\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r=\rho\frac{De}{Dt}$$