傅里叶变换及其物理应用

〔英〕D. C. 香帕尼 著

科 学 出 版 社

53.31
41

傅里叶变换及其物理应用

〔英〕D. C. 香帕尼 著

陈难先　何晓民 译

科　学　出　版　社

1 9 8 0

D584/2-1

内 容 简 介

傅里叶变换在物理学各个领域中有着广泛的应用．本书介绍傅里叶变换的数学基础及其在物理学一些分支中的应用，并举出各种实例加以说明．全书内容精练，论证简明扼要，书末还有大量附录可供查阅．

本书可供理工科大学生、教师以及有关科技人员阅读参考．

D. C. Champeney
FOURIER TRANSFORMS
AND
THEIR PHYSICAL APPLICATIONS
Academic Press, London, 1973

傅里叶变换及其物理应用

〔英〕D. C. 香帕尼 著
陈难先 何晓民 译

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年4月第 一 版　　开本：787×1092 1/32
1980年4月第一次印刷　　印张：8 3/4
印数：0001—11,400　　字数：196,000

统一书号：13031·1247
本社书号：1738·13—3

定价： 1.10 元

序　　言

傅里叶变换以及和它相联系的折积和相关的概念，正在越来越多地应用于物理学的所有各分支. 编写本书的意图，是为在工作中遇到这些课题的人，不论是高年级大学生或研究生，还是其他人，提供一本入门书和参考书. 傅里叶变换已经在电工学中获得系统的应用，然而，在其他物理科学中，它们常常只是在光学、电学、量子力学或声学书中放在附录内介绍. 但是，象傅里叶变换这种有如此广泛应用的方法，应该有一个统一的论述，使有关的数学方法在不同现象领域中都得到说明和应用. 象矢量和波动这类论题常常就是这样处理的，我在本书中也尝试着这样去做.

本书的编排，按照一般的和逻辑的顺序，第一部分讲述数学方法，第二部分介绍应用. 但是，不熟悉这个课题的读者，如果把第一部分和第二部分结合起来阅读，恐怕要比起全部读完第一部分之后再读第二部分更好一些，因为正是这些应用才使得有关的公式获得了生命力. 读者可以先阅读第一、二、四章(跳过第三章)中的一维变换和谐的问题，这样就为阅读第七、八、九章中关于线性系统、谐振子、迴路和滤波器的大部分内容准备了足够的数学基础. 接着，读者可以阅读第三章以及第十一章中的衍射理论，把这些概念推广到多维情况；也可以阅读第五、六章中的相关和随机函数的内容与第十章中的信息复现理论. 剩下的第十二、十三、十四几章是关于光学相干、全息术、X-射线衍射、中子和电子衍射的，它们涉及到更深一些的应用.

由于傅里叶变换的应用如此之广，要对各方面的应用作包罗万象的介绍显然是不可能的．因此，题材的选取总是力求有代表性，使得在碰到其它许多问题时能够举一反三．这些题材大部分属于经典物理学而不是量子物理学；这样做的原因在于，量子物理中的大多数内容都能够在经典物理学的有关部分找到十分恰当的类比，而且总的说来，经典的描述更容易为读者所接受．

在第一部分中我所强调的主要是结论而不是证明，因为本书对象是应用科学家而不是数学家，所以大多数证明都放在附录中．关于更严格的论述，我介绍读者去参考其它适当的原著．在第二部分关于应用的叙述中，我力图说明怎么才能很有效地应用傅里叶变换，而不是对题材本身作介绍；有关现象的预备知识，是假定读者已经掌握的．

书中常常采用了简明的方法，以便用较小的篇幅来概括这方面的基础，并在有些地方略去了比较浅显的证明，以保证思路的连贯性．许多与傅里叶变换有关的小定理都是容易证明的（例如平移和伸缩的结果），在这种情况下，我总是让读者只注意结论，有意用了“可以证明，……”这类词句，来鼓励读者自己去求证．（下略）

D. C. 香帕尼

1972 年 11 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第二部分 应 用

第一部分 数学基础

第一章 傅里叶级数

§1.1 引言

众所周知，一个随时间作周期性变化的量可以“分解为它的简谐分量”. 这个量可以是某点因声波的通过而变化着的压强，也可以是某点因光波或无线电波的通过而变化着的电场强度，还可以是电路中某处的电压或电流. 在上述各种情况中，只要变化以某个基本频率不断重复，这种变化就能够看成是由一系列简谐振动所组成的，这些简谐振动的重复频率都是基频的整数倍. 不管在一个周期内这种变化是多么复杂和不规则，结论都是一样.

在声波情况下，我们可以把这种分析实地演示出来. 用一大排扬声器，各自发射一种频率为某基频整数倍的简谐波，这样，通过调节各个扬声器的振幅和相位，就能很逼真地建立起任何想要得到的波动花样. 用这种办法，也能够模拟出乐器所产生的复杂的重复波形. 但是，这种模拟在实用上受到限制，这是因为，表征乐音的压强变化除重复成份外，还叠加有非周期成份（嘶嘶响的噪音和初始瞬态过程）. 这里所以能够进行调和分析和综合，一方面是因为空气中各声波的叠加所得到的净压强变化很好地近似等于每个波单独发生时所得到的压强变化的代数和；另一方面是因为有关的纯数学结果与傅里叶级数展开有关，而这是本章要介绍的.

在上面引用的例子中，时间和频率总是作为互相关联的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一对变量出现的，其它许多体系也是这类情况，只是相关的变量对有所不同而已. 例如,在弦振动的分析中,变量对是距离和波数(波长的倒数);在衍射问题中,变量对是散射元位置矢量和散射波的波矢量;在量子力学中,则是位置矢量和动量矢量.

本书不打算主要介绍分解周期函数所用的傅里叶级数展开,而将重点讨论傅里叶变换,它也能对不一定是周期的函数进行分析. 因此,傅里叶变换在应用上是更为普遍,稍后我们还将看到,在特殊情况下可以由它化成傅里叶级数. 然而,我们还是从傅里叶级数开始,因为它是一种重要的特殊情况,并可由它很好地(并非必须)引出傅里叶变换.

§1.2 傅里叶级数展开的基本公式

若函数$f(t)$表示一个随时间变化的量，τ是基本的重复周期，则称 $\omega = 2\pi/\tau$ 为体系的基频，它的单位是弧度每秒 $f(t)$可以分解为无穷多个频率为基频整数倍的谐分量之和.这个陈述在数学上可用下列互相等价的公式 (1.1)—(1.5) 来表示,这就是众所周知的傅里叶级数展开，究竟用哪一个公式，则要根据方便和习惯.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\} \qquad (1.1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\} \qquad (1.2)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \qquad (1.3)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega t + \theta_n) \qquad (1.4)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{+in\omega t}. \tag{1.5}$$

这里系数 a_n, b_n, c_n, d_n, g_n 表示未知振幅，而 ϕ_n 和 θ_n 表示未知相位．确定这些系数乃是调和分析的核心问题．傅里叶发现，它们可以根据已知的 $f(t)$ 从下述积分计算出来．在这些公式中已经把这些系数间的联系包括在内了．

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}\oint f(t)dt = g_0 = f(t) \text{ 的平均值}, \tag{1.6}$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\oint f(t)\cos n\omega t\, dt = g_n + g_{-n}$$
$$= c_n \cos\phi_n = d_n \sin\theta_n \quad [n \geqslant 1], \tag{1.7}$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\oint f(t)\sin n\omega t\, dt = i(g_n - g_{-n})$$
$$= -c_n \sin\phi_n = d_n \cos\theta_n \quad [n \geqslant 1], \tag{1.8}$$

$$g_n = \frac{1}{\tau}\oint f(t) e^{-in\omega t} dt \quad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots]. \tag{1.9}$$

以下各式对于说明这些系数的联系是有用的：

$$g_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ g_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad [n \geqslant 1]; \tag{1.10}$$

$$c_n^2 = d_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4g_n g_{-n} \quad (\text{符号不定}) \quad [n \geqslant 1]; \tag{1.11}$$

$$\tan\phi_n = -b_n/a_n,\ \tan\theta_n = a_n/b_n,\ (\text{相位不定}) \quad [n \geqslant 1]. \tag{1.12}$$

上述各式中的 $\oint$ 表示在一个完整周期中对 $f(t)$ 进行积分，即从任意的 t_1 到 $t_1 + \tau$ 作积分．值得注意，在对某个具体函数 $f(t)$ 进行积分时，适当选择积分区间即 t_1 值，常常能使运算简化．例如，从 $t = -\tau/2$ 积分到 $t = \tau/2$ 常比从 $t = 0$ 到 $t = \tau$ 要简单．如果我们不去管这种级数展开是否可能这件麻烦事，而是直接假定它们能成立，则公式(1.6)到(1.9)的推导就很简捷．具体推导放在书末的附录A中．

§1.3 关于基本公式的补充说明

1. $f(t)$ 的允许形式

函数 $f(t)$ 必须在 $t=-\infty$ 到 $t=\infty$ 之间都存在，必须以某个本征周期 τ 作不断重复，并且必须是单值的. $f(t)$ 可以是复值函数，它的各个系数也可以是复数. 要注意复数形式的傅里叶级数(1.5)是一个等式. 如果 $f(t)$ 是实函数，我们不要以为 $f(t)$ 只是这复数和的实部；这种情况下，g_n 往往是一些适当的复数，它们使级数和正好成为实数. $f(t)$ 可以包含若干个间断点(例如方波或锯齿波)，如果它在每个周期内只有有限个极大值和极小值，而且没有无穷型间断点，那它就将是一个适当的函数. 这些条件称为狄里希利条件，在文献[9, 16, 20 和 21]中有更详尽的讨论. 另外，$f(t)$ 在每个周期中可以包含有限个 δ 函数. δ 函数在附录 B 中介绍.

2. 简化条件

如果 $f(t)$ 是偶函数即 $f(t)=f(-t)$，则式(1.2)中只含余

表 1.1

$f(t)$	系　　数
实函数	$a_n, b_n, c_n, d_n, \phi_n, \theta_n$ 为实数； g_n 为复数，$g_n=g^*_{-n}$，$g^*_n=g_{-n}$； $a_n=\mathrm{Re}\,2g_n$，$b_n=-\mathrm{Im}\,2g_n$
虚函数	a_n, b_n, c_n, d_n 为虚数，ϕ_n, θ_n 为实数； g_n 为复数，$g_n=-g^*_{-n}$，$g^*_n=-g_{-n}$； $a_n=2i\,\mathrm{Im}\,g_n$　$b_n=2i\,\mathrm{Re}\,g_n$　$[n\geqslant 1]$，
偶函数	$g_n=g_{-n}$，$\phi_n=0$，$\theta_n=\pi/2$，$a_0=g_0$， $b_n=0$，$a_n=c_n=d_n=2g_n$　$[n\geqslant 1]$
奇函数	$g_n=-g_{-n}$，$\phi_n=-\pi/2$，$\theta_n=0$， $a_n=0$，$b_n=c_n=d_n=2ig_n$
实值偶函数或虚值奇函数	g_n 为实数
实值奇函数或虚值偶函数	g_n 为虚数

弦函数项；如果 $f(t)$ 是奇函数即 $f(t)=-f(-t)$，则只含正弦函数项．如果原点的位置并不重要，那就能够通过坐标原点的选择使某些函数成为偶函数或奇函数，以便简化运算．如果 $f(t)$ 是实数的或纯虚数的，则还有其它简化．这些结果可罗列如表 1.1.

3. 复数相位

如果 θ_n 和 ϕ_n 是复数，则展开式中含 θ_n 和 ϕ_n 就会使人感到极不方便，但是在 $f(t)$ 为实值或虚值函数，或者偶函数或奇函数这些情况下，这种展开仍然是方便的．但公式 (1.1)—(1.12) 是适用于任何情况的，由关系式 $\sin ix = i\sinh x$，$\cos ix=\cosh x$ 和 $\tan ix = \tanh x$ 对此能作一致的解释．应当注意，由 a_n 和 b_n 去求 c_n，d_n，ϕ_n 和 θ_n 时，用公式 (1.11) 和(1.12)会发生符号和相位的不定的情况，这时若用公式(1.7)和(1.8)就不会出现这个问题．

4. 半波级数

虽然非周期性函数不能用傅里叶级数表示，但仍能对它得到一个在有限区间(例如) $t=0$ 到 $t=T$ 内成立的级数表达式．这是可以做到的．首先作一周期函数，使它在所论及的区间内和这非周期性函数 $f(t)$ 相同(区间外不必相同)，然后再求出这周期函数的级数表示即可．这个周期函数的周期 τ 显然可以是比 T 大的任意值．如果是 $\tau \geqslant 2T$，你就可以进一步把所论及的区间内的 $f(t)$ 用只含正弦项的或只含余弦项的级数来表示．对 $\tau = 2T$ 的特殊情况，这种级数就称为半波正弦级数或半波余弦级数．令 $\omega=\dfrac{2\pi}{\tau}=\dfrac{\pi}{T}$，即得下述结果：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (0 < t < T), \tag{1.13}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \tag{1.14}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \quad (n \geqslant 1), \tag{1.15}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt \quad (n \geqslant 1). \tag{1.16}$$

用正弦和余弦级数来代替感兴趣区间内的 $f(t)$ 的方法，对简单的斜坡函数来说如图 1.1 所示.

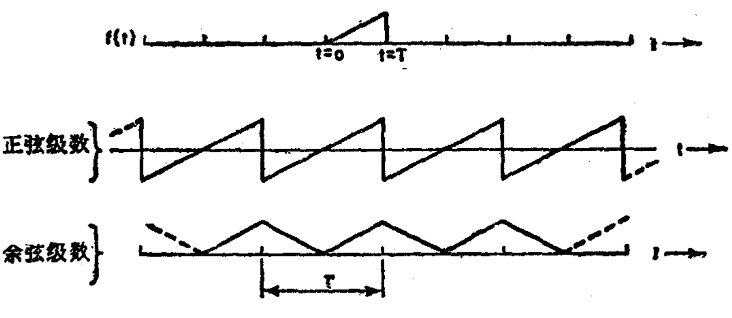


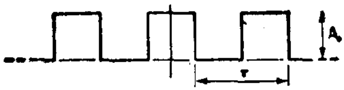
图 1.1

5. 吉布斯现象

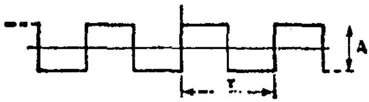
虽然含一个有限跃变的函数可以用一个傅里叶级数去综合，但是，如果展开式只有有限项，则综合成的函数在跃变点附近可能有出入，从而会发生振荡. 另外，随着项数趋于无限，出入的大小并不趋于零，尽管这时振荡周期趋近于零. 对

于多数用途来说，这种现象是无关重要的，因为在 t 的一个有限的区间内总可以通过足够多的项使得综合函数的平均值能以任意想要的精度和实际函数匹配. 但是在这种情况下，对傅里叶级数求导数时必须小心。 这现象在文献[16 和 20]中有更完善的阐述.

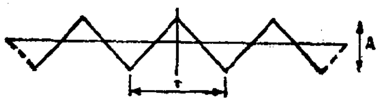
§1.4 若干图示函数的傅里叶级数表



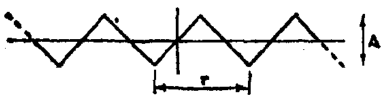
$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left\{\cos\omega t-\frac{\cos 3\omega t}{3}+\frac{\cos 5\omega t}{5}-\cdots\right\} \quad (1.17)$$



$$\frac{2A}{\pi}\left\{\sin\omega t+\frac{\sin 3\omega t}{3}+\frac{\sin 5\omega t}{5}+\cdots\right\} \quad (1.18)$$



$$\frac{4A}{\pi^2}\left\{\cos\omega t+\frac{\cos 3\omega t}{3^2}+\frac{\cos 5\omega t}{5^2}+\cdots\right\} \quad (1.19)$$



$$\frac{4A}{\pi^2}\left\{\sin\omega t-\frac{\sin 3\omega t}{3^2}+\frac{\sin 5\omega t}{5^2}-\cdots\right\} \quad (1.20)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com