

材料力学简明教程

下 册

金 愨 等 編



机械工业出版社

出版者的話

本書系根据交通大学、南京工学院、西北工业大学三校教材綜合、修改而成的，所以內容較為全面、簡明。書中每章之后附有复習題与習題。

本書下冊共十章，講述了超靜定梁、變形、复合应力、曲杆平面弯曲、厚壁圆筒、压杆的稳定、慣性力与振动、冲击应力…等問題。

本書可作为大学教材，也可供自学之用。

NO. 2574

1959年1月第一版 1959年1月第一版第一次印刷

850×1163¹/₃₂ 字数 197 千字 印張 7¹³/₁₆ 0,001— 7,200 册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷 新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第 008 号 定价(10) 1.25 元

下 册 目 录

第十六章 超靜定梁	7
§16.1 一般概念	7
§16.2 變形比較法	9
§16.3 圖解解析法的应用	10
§16.4 初参数法的应用	11
§16.5 多余反力及靜定基的选擇	12
§16.6 連續梁三矩方程	17
§16.7 連續梁的反力計算及 Q 圖与 M 圖的作法	22
§16.8 具有外伸臂的連續梁	28
§16.9 具有固定端的梁	31
复習題	34
習題	34
第十七章 应用变形能的概念求变形	37
§17.1 变形能的概念	37
§17.2 变形能的計算	37
§17.3 卡氏定理	41
§17.4 引用附加力的方法	47
§17.5 功的互等定理和位移互等定理	50
§17.6 馬克斯威尔-莫尔定理	52
§17.7 維力沙金法	55
§17.8 按变形能法求解超靜定問題	61
复習題	66
習題	66
第十八章 复合应力	71
§18.1 概述	71
§18.2 斜弯曲	71
§18.3 弯曲与拉伸或压縮的合成	79
§18.4 截面核心	85
§18.5 扭轉与弯曲的联合作用	87
复習題	96
習題	96
第十九章 曲杆平面弯曲	103
§19.1 概述	103
§19.2 曲杆截面上的內力素	103
§19.3 純弯曲时截面上正应力的分布	105

§19.4 不同形状截面中性轴位置的确定	109
§19.5 曲杆的应力计算和强度检查	114
§19.6 平面假设的结果与高劳文的准确解法之间的比较	116
§19.7 曲杆应力计算的例题	116
§19.8 曲杆的变形	118
§19.9 曲杆变形计算的例题	120
复习题	123
习题	123
第二十章 厚壁圆筒	125
§20.1 厚壁圆筒的应力计算	125
§20.2 厚壁筒的强度(塑性材料)	129
§20.3 组合厚壁筒	130
复习题	134
习题	134
第二十一章 压杆的稳定	135
§21.1 稳定平衡与不稳定平衡的概念	135
§21.2 临界载荷 P_K 之确定—欧拉公式	138
§21.3 杆端不同约束情况的影响	140
§21.4 (一)欧拉曲线(二)临界应力超过比例极限时丧失稳定的概念(三) 雅兴斯基的贡献	144
§21.5 (一) $(\sigma_K - \lambda)$ 全图(二)压杆材料的选择	147
§21.6 按照许用应力、折减系数的压杆计算	148
§21.7 压杆设计计算的一般程序	150
§21.8 压杆承受偏心载荷的计算	153
§21.9 纵横弯曲	154
§21.10 稳定计算的意义及其发展	156
复习题	158
习题	159
第二十二章 惯性力与振动的计算	161
§22.1 绪论	161
§22.2 等加速运动的杆件应力的计算	162
§22.3 旋轉圆环(飞轮輪緣)的应力计算	163
§22.4 平行杆和連杆的应力计算	164
§22.5 共振对应力的影响	167
§22.6 振动时应力的计算	168
§22.7 彈性体系質量的考虑对自由振动频率的影响	172
§22.8 苏联学者在振动理論上的贡献	173
复习题	174

習題.....	174
第二十三章 冲击时的应力	179
§23.1 冲击时应力的計算.....	179
§23.2 冲击时应力計算的实例.....	181
§23.3 軸向冲击时变截面杆內的应力.....	184
§23.4 从上面所得結果推出的实用結論.....	185
§23.5 被冲击系統質量的影响.....	186
§23.6 直到破坏的冲击試驗.....	187
§23.7 各种因素对冲击韌度之影响.....	189
§23.8 苏联学者在冲击抗力研究方面的貢獻.....	190
复習題.....	191
習題.....	191
第二十四章 在重复应力下材料的强度計算	195
§24.1 关于重复載荷对材料强度的影响的基本概念.....	195
§24.2 在重复应力情况下的强度校核.....	196
§24.3 在对称循环时持久極限的求法.....	197
§24.4 不对称循环时的持久極限.....	200
§24.5 应力集中对持久極限的影响.....	202
§24.6 零件尺寸对持久極限的影响.....	204
§24.7 其他因素对持久極限的影响.....	206
§24.8 許用应力的确定.....	207
§24.9 确定(p_r)的方法的改进.....	211
§24.10 确定許用应力的步驟.....	212
§24.11 在重复应力及复杂受力状态下的强度校核.....	215
§24.12 几种防止重复应力下破坏的实用方法.....	216
§24.13 苏联学者对于重复載荷理論的貢獻.....	217
复習題.....	218
習題.....	218
第二十五章 蠕滑計算的基础	221
§25.1 高温对金屬的机械性質的影响.....	221
§25.2 蠕滑及松弛現象.....	222
§25.3 蠕滑及松弛曲綫.....	223
§25.4 蠕滑計算时的許用应力.....	230
复習題.....	233
結束語	234
附录Ⅷ 求圓截面曲杆中性層位置的一个积分	241
附录Ⅸ 关于 y_0 的近似計算法	242
附录Ⅹ 計算曲杆正应力的另一公式	244
附录Ⅺ 确定临界載荷的能量法	246

出版者的話

本書系根据交通大学、南京工学院、西北工业大学三校教材綜合、修改而成的，所以內容較為全面、簡明。書中每章之后附有复習題与習題。

本書下冊共十章，講述了超靜定梁、變形、复合应力、曲杆平面弯曲、厚壁圆筒、压杆的稳定、慣性力与振动、冲击应力…等問題。

本書可作为大学教材，也可供自学之用。

NO. 2574

1959年1月第一版 1959年1月第一版第一次印刷

850×1163¹/₃₂ 字数 197 千字 印張 7¹³/₁₆ 0,001— 7,200 册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工业出版社印刷厂印刷 新华書店發行

北京市書刊出版业营业許可証出字第 008 号 定价(10) 1.25 元

下 册 目 录

第十六章 超靜定梁	7
§16.1 一般概念	7
§16.2 變形比較法	9
§16.3 圖解解析法的应用	10
§16.4 初参数法的应用	11
§16.5 多余反力及靜定基的选擇	12
§16.6 連續梁三矩方程	17
§16.7 連續梁的反力計算及 Q 圖与 M 圖的作法	22
§16.8 具有外伸臂的連續梁	28
§16.9 具有固定端的梁	31
复習題	34
習題	34
第十七章 应用变形能的概念求变形	37
§17.1 变形能的概念	37
§17.2 变形能的計算	37
§17.3 卡氏定理	41
§17.4 引用附加力的方法	47
§17.5 功的互等定理和位移互等定理	50
§17.6 馬克斯威尔-莫尔定理	52
§17.7 維力沙金法	55
§17.8 按变形能法求解超靜定問題	61
复習題	66
習題	66
第十八章 复合应力	71
§18.1 概述	71
§18.2 斜弯曲	71
§18.3 弯曲与拉伸或压縮的合成	79
§18.4 截面核心	85
§18.5 扭轉与弯曲的联合作用	87
复習題	96
習題	96
第十九章 曲杆平面弯曲	103
§19.1 概述	103
§19.2 曲杆截面上的內力素	103
§19.3 純弯曲时截面上正应力的分布	105

§19.4 不同形状截面中性轴位置的确定	109
§19.5 曲杆的应力计算和强度检查	114
§19.6 平面假设的结果与高劳文的准确解法之间的比较	116
§19.7 曲杆应力计算的例题	116
§19.8 曲杆的变形	118
§19.9 曲杆变形计算的例题	120
复习题	123
习题	123
第二十章 厚壁圆筒	125
§20.1 厚壁圆筒的应力计算	125
§20.2 厚壁筒的强度(塑性材料)	129
§20.3 组合厚壁筒	130
复习题	134
习题	134
第二十一章 压杆的稳定	135
§21.1 稳定平衡与不稳定平衡的概念	135
§21.2 临界载荷 P_K 之确定—欧拉公式	138
§21.3 杆端不同约束情况的影响	140
§21.4 (一)欧拉曲线(二)临界应力超过比例极限时丧失稳定的概念(三) 雅兴斯基的贡献	144
§21.5 (一) $(\sigma_K - \lambda)$ 全图(二)压杆材料的选择	147
§21.6 按照许用应力、折减系数的压杆计算	148
§21.7 压杆设计计算的一般程序	150
§21.8 压杆承受偏心载荷的计算	153
§21.9 纵横弯曲	154
§21.10 稳定计算的意义及其发展	156
复习题	158
习题	159
第二十二章 惯性力与振动的计算	161
§22.1 绪论	161
§22.2 等加速运动的杆件应力的计算	162
§22.3 旋轉圆环(飞轮輪緣)的应力计算	163
§22.4 平行杆和連杆的应力计算	164
§22.5 共振对应力的影响	167
§22.6 振动时应力的计算	168
§22.7 弹性体系质量的考虑对自由振动频率的影响	172
§22.8 苏联学者在振动理論上的贡献	173
复习题	174

習題.....	174
第二十三章 冲击时的应力	179
§23.1 冲击时应力的計算.....	179
§23.2 冲击时应力計算的实例.....	181
§23.3 軸向冲击时变截面杆內的应力.....	184
§23.4 从上面所得結果推出的实用結論.....	185
§23.5 被冲击系統質量的影响.....	186
§23.6 直到破坏的冲击試驗.....	187
§23.7 各种因素对冲击韧度之影响.....	189
§23.8 苏联学者在冲击抗力研究方面的貢獻.....	190
复習題.....	191
習題.....	191
第二十四章 在重复应力下材料的强度計算	195
§24.1 关于重复載荷对材料强度的影响的基本概念.....	195
§24.2 在重复应力情况下的强度校核.....	196
§24.3 在对称循环时持久極限的求法.....	197
§24.4 不对称循环时的持久極限.....	200
§24.5 应力集中对持久極限的影响.....	202
§24.6 零件尺寸对持久極限的影响.....	204
§24.7 其他因素对持久極限的影响.....	206
§24.8 許用应力的确定.....	207
§24.9 确定(p_r)的方法的改进.....	211
§24.10 确定許用应力的步驟.....	212
§24.11 在重复应力及复杂受力状态下的强度校核.....	215
§24.12 几种防止重复应力下破坏的实用方法.....	216
§24.13 苏联学者对于重复載荷理論的貢獻.....	217
复習題.....	218
習題.....	218
第二十五章 蠕滑計算的基础	221
§25.1 高温对金屬的机械性質的影响.....	221
§25.2 蠕滑及松弛現象.....	222
§25.3 蠕滑及松弛曲綫.....	223
§25.4 蠕滑計算时的許用应力.....	230
复習題.....	233
結束語	234
附录Ⅷ 求圓截面曲杆中性層位置的一个积分	241
附录Ⅸ 关于 y_0 的近似計算法	242
附录Ⅹ 計算曲杆正应力的另一公式	244
附录Ⅺ 确定临界載荷的能量法	246

第十六章 超靜定梁

§16.1 一般概念

在前面几章里，我們討論了靜定梁，靜定梁的反力是仅由靜力学的平衡条件就能解决的。如果梁所受的約束数目，超过了維持平衡所必需的数目，則單憑靜力学的平衡条件，將不能决定其反力，这种梁就称为超靜定梁。

在超靜定梁中，那些超过維持平衡所必需的約束，常被称为多余約束，相应的反力常被称为多余反力（有时亦称为附加約束及附加反力）。不过这里的所謂“多余”，严格地說起来是不很恰当的：虽然就保持剛体平衡的必要性的观点來說，在超靜定梁中，有些約束是多余的；但是从工程技术的观点来看，这些約束，不但并非“多余”而且往往很为有用，甚至是必需的。例如，为了减少悬梁（圖 16.1

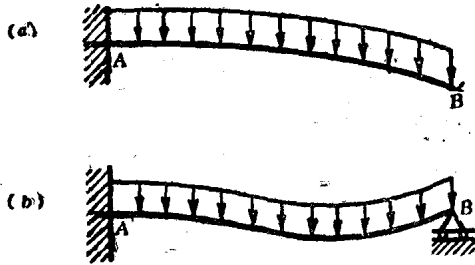


圖 16.1

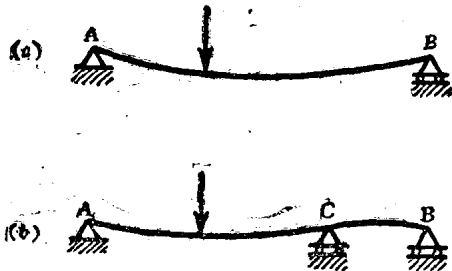


圖 16.2

a) 的变形，可在其自由端加一支座（圖 16.1 b）；为了减少双支梁（圖 16.2 a）的跨度，可增加一个中間支座（圖 16.2 b）。像这样对于靜定梁增加了約束，往往可以减小梁的最大撓度，使

梁安全适用，也可以减小梁的最大弯矩，从而节省材料。

对于超静定梁，为了强度计算，需要画出剪力圖及弯矩圖，因此必須求出反力；为了刚度计算，也需要求出反力；求出了反力之后，就可以和静定梁一样地，繪制剪力圖和弯矩圖，并进行强度或刚度计算了。本章将介绍求解超静定梁反力的基本方法。

在第四章中我們业已看到：解拉伸和压缩的超静定問題时，可以根据结构的变形諧調条件，列出所謂补充方程。这里，不难想到，在解超静定梁时，也可以采用同样的办法；也即根据梁的变形諧調条件，列出足够的补充方程，連同静力学的平衡方程，以求出梁的反力。

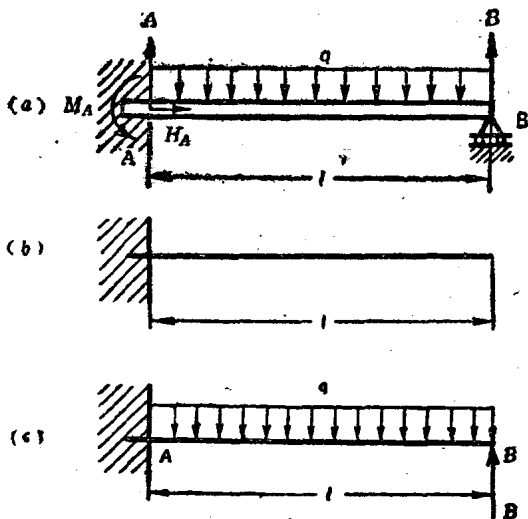


圖 16.3

現在，就圖

16.3 (a) 中所示的超静定梁 AB ，來說明如何根据变形諧調条件，列出补充方程。这个梁共有四个反力，但静力学的平衡方程只有三个，也就是說有一个多余反力。如果以反力 B 为多余，就是認為圖 16.3 (a) 中的超静定梁是由圖 16.3 (b) 中的静定梁加上一个附加支座而成的；这样去掉了多余約束而得到的静定梁，称为原来超静定梁的静定基。就圖 16.3 中的梁而論，要想求出超静定梁的反力，須要在静定基上加上均布載荷 q 及多余反力 B (圖 16.3 c)，使它成为与原有超静定梁 (圖 16.3 a) 相符的体系。但是这还不够；在圖 16.3 (a) 中的 B 点不能沿着垂直于梁軸的方向移动，現在圖 16.3 (c) 中的梁尚有这种可能；为

了使这两个梁完全一致地工作，必須对后者加上一个限制的条件，即靜定基在載荷 q 及力 B 的作用下，截面 B 的撓度等于零，即

$$y_B = 0. \quad (1)$$

这就是用来决定多余反力 B 的变形諧調条件。在这里所根据的变形諧調条件是梁端 B 不离开支座。

下面将指出如何通过变形諧調条件，列出补充方程，从而求出梁的反力。

§16.2 变形比較法

仍以圖 16.3 中的超靜定梁为例。由迭加原理知，圖 16.3 (b) 中靜定基的截面 B 的撓度，等于仅由均布載荷 q 所引起的撓度 y_{Bq} 与仅由集中力 B 所

引起的撓度 y_{BB} 之和，因此，上节的变形諧調条件 (1) 可写成

$$y_{Bq} + y_{BB} = 0. \quad (1)$$

由表 13.1 可知：

当靜定基仅受均布載荷 q 时 (圖 16.4 a)，截面 B 的撓度为

$$y_{Bq} = -\frac{ql^4}{8EI};$$

靜定基仅受集中力 B 时 (圖 16.4 b)，

$$y_{BB} = +\frac{Bl^3}{3EI}.$$

代入方程 (1)，得

$$-\frac{ql^4}{8EI} + \frac{Bl^3}{3EI} = 0;$$

由此即得

$$B = \frac{3}{8}ql.$$

在这个方法中，我們先給靜定基在載荷 q 作用下以变形的可

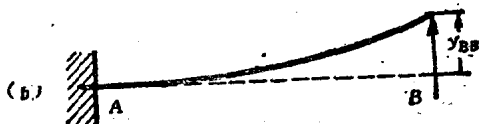
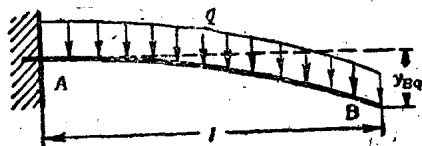


圖 16.4

能, 然后选择外力 B 把截面 B 推回, 即使 B 所引起的挠度与 q 所引起的挠度数值相等而方向相反。这种方法称为变形比较法。

多余反力 B 求出以后, 其余的反力由平衡方程即可求得:

$$A = \frac{5}{8}ql, \quad H_A = 0, \quad M_A = \frac{1}{8}ql^2。$$

取任一截面的右侧部分来研究 (圖 16.5 a), 即得剪力及弯矩方程如下:

$$Q(x) = -B + qx = -\frac{3}{8}ql + qx,$$

$$M(x) = \frac{3}{8}qlx - \frac{q}{2}x^2。$$

$$\text{在 } x = \frac{3}{8}l \text{ 处, } \frac{dM}{dx} = Q = 0,$$

$$M_{\max} = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l - \frac{q}{2}\left(\frac{3}{8}l\right)^2 = +\frac{9}{128}ql^2。$$

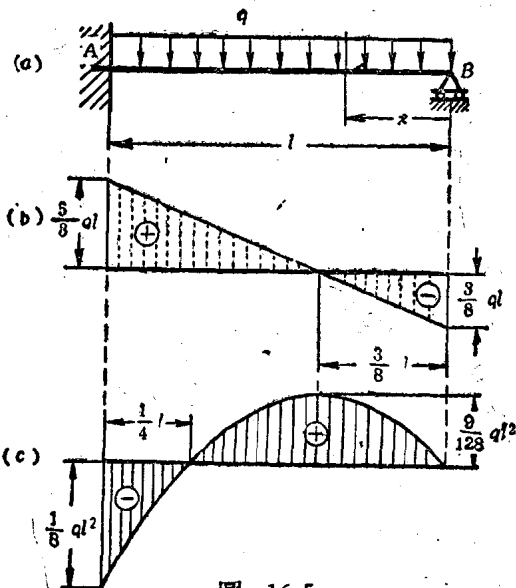


圖 16.5

由此可以画出这梁的

剪力圖及弯矩圖 (如圖 16.5 b 及 16.5 c)。

讀完此节后可作習題 16.1, 16.2。

§16.3 圖解解析法的应用

求解超靜定梁的反力, 可应用圖解解析法。例如, 为了求解上节中所举的超靜定梁 (圖 16.3 a), 可画出虛梁及虛載荷如圖 16.6, 那么变形諧調方程 $v_B = 0$ 也就是这里虛梁的平衡方程 $\Sigma M_{Bf} = 0$, 亦即

$$\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot Bl\right) \frac{2l}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{q}{2} l^2\right) \frac{3l}{4} = 0;$$

由此可得

$$B = \frac{3}{8}ql.$$

多余反力 B 求出以后, 其余的反力求法同前。不难看出, 当虚载荷的图形简单时, 用图解解析法来解超静定梁, 常较简便。

§16.4 初参数法的应用

应用初参数法也可以求出超静定梁的多余反力。例如 §16.2 中所举的超静定梁,

若以反力 B 为多余, 可取支点 B 为坐标原点, 并取坐标轴如图 16.7 所示, 于是任一截面的旋转角及挠度的普遍方程各为

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + B \frac{x^2}{2l}$$

$$- q \frac{x^3}{3l}; \quad (1)$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 \frac{x}{l}$$

$$+ B \frac{x^3}{3l} - q \frac{x^4}{4l}. \quad (2)$$

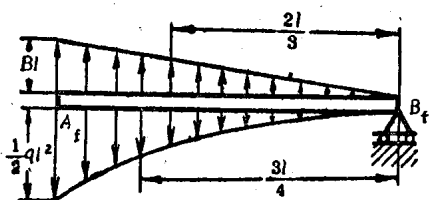


圖 16.6

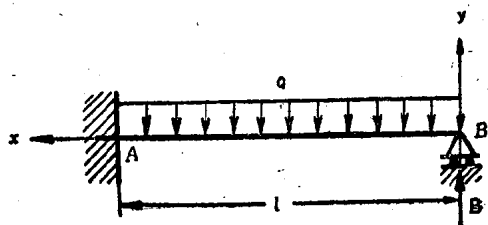


圖 16.7

前述的变形协调条件, 在这里就是

$$y_0 = 0.$$

梁端 A 的边界条件为:

$$x=l, \theta_A = 0 \text{ 及 } y_A = 0.$$

将变形条件及边界条件代入式 (1) 及 (2), 即得:

$$0 = EJ\theta_0 + B \cdot \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6}; \quad (3)$$

$$0 = EJ\theta_0 l + B \cdot \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24}. \quad (4)$$

消去上二式中的 θ_0 , 即得多余反力

$$B = \frac{3}{8}ql。$$

其余的反力求法同前。

由以上所述，可以看出当静定基仅受一种载荷所产生的变形（如图 16.4 中的 y_{Bq} 及 y_{BB} ）已经求得时，变形比较法尚属便利，否则将不如用初参数法了；尤其是载荷情况复杂时，用初参数法，往往较为简便。

§16.5 多余反力及静定基的选择

在超静定梁中，哪些反力是多余反力，本无一定；解题时多余反力的选择，可根据解题的方便来决定。对于同一问题，如所选的多余反力不同，相应的静定基当然就不同，于是补充方程也将随之而异。

例如，在前述的一端固定一端铰支的超静定梁中（图 16.3 a），共有四个反力，如不以反力 B 为多余，就可以取反力偶 M_A 为多余。

这个反力偶 M_A 的产生，是由于梁在 A 端受了阻止截面转动的约束；如果去掉这个多余约束并保留其余的原有约束，显然相应的静定基在 A 端可以转动但仍不能移动，应该是一个不动铰链支座； B 端仍照原样，足见静定基是一简梁（图

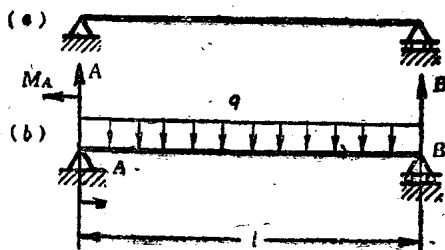


图 16.8

16.8 a)。为了使静定基与原有超静定梁成为相符的体系，须在静定基上加上均布载荷 q 及力偶 M_A ，如图 16.8 (b)；不难看出，现在的变形协调条件将是

$$\theta_A = 0。 \quad (1)$$

参看图 16.9，足见上式可写成

$$\theta_A = \theta_{Aq} + \theta_{AM} = 0。 \quad (2)$$

由表 13.1 查得

$$\theta_{Aq} = -\frac{ql^3}{24EI},$$

$$\theta_{AM} = +\frac{M_A l}{3EI};$$

代入方程 (2), 即得

补充方程

$$-\frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_A l}{3EI} = 0,$$

由此即可求得

$$M_A = +\frac{1}{8}ql^2.$$

这里的正号表示所得的

M_A 与圖 16.8 及圖 16.9 中所設的方向一致。求出多余反力偶 M_A 以后, 其余的反力就可用平衡条件来决定了。

这里用圖解解析法, 很容易求出多余反力偶 M_A 。繪出虛梁及虛載荷, 如圖 16.10, 由虛梁的平衡条件 $\Sigma M_{B_f} = 0$, 我們得到

$$\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot M_A\right) \frac{2}{3} l - \left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{8} ql^2\right) \frac{1}{2} = 0;$$

由此, 即得

$$M_A = \frac{1}{8}ql^2.$$

若取 A 为多余反力, 須知这个反力的产生; 是由于梁在 A 端受了限止上下移动的約束; 除去了这个多余約束, 靜定基在 A 端可沿豎向移动, 但仍不能沿水平方向移动, 亦不能轉动, 相应的支座, 当如圖 16.11 所示, 即梁的 A 端有一滑塊, 可在光滑的槽里作豎向滑动。采用圖 16.11 中这样的靜定基时, 变形諧調条件当为

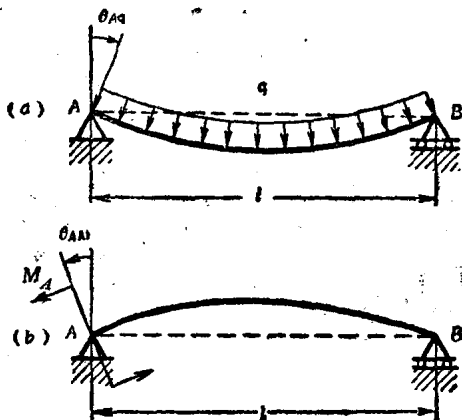


圖 16.9

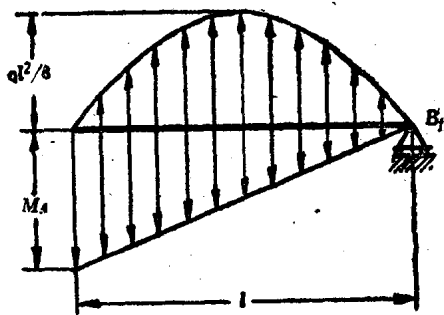


圖 16.10

$$y_A = 0.$$

选取这样的静定基，应用前述方法当可求出超静定梁的反力；但是显然不及取 B 或 M_A 为多余反力时计算简

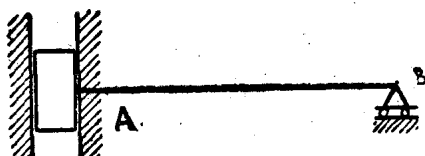


圖 16.11

便，因为这个静定基不是常见的梁，初学者对它很不熟悉。

由原超静定梁平衡条件 $\Sigma X = 0$ ，即得 $H_A = 0$ ，足见不能取 H_A 为多余反力。

现在再用下面的几个例题，来说明多余反力及静定基的选择。

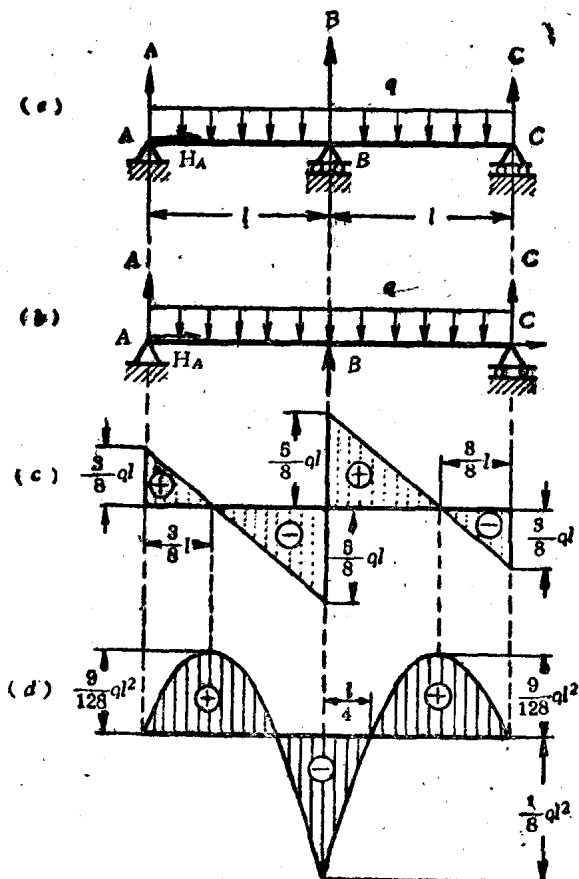


圖 16.12