物探工人自学参考读物

数　学

第二卷

微积分

下册

张秋光　主编

地质出版社

物探工人自学参考读物

数　学

第二卷

微积分

下册

张秋光　主编

地质出版社

物探工人自学参考读物
数学
第二卷
微积分
下册
张秋光　主编
地质部书刊编辑室编辑
责任编辑　唐光后
地 质 出 版 社 出 版
（北京西四）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售
*
开本：$787\times1092^{1}/_{32}$印张：$18^{3}/_{4}$插页 3 个字数：415,000
1982年 3 月北京第一版・1982年 3 月北京第一次印刷
印数1—3,330册・定价2.90元
统一书号：15038・新705

目　　录

第五章　常微分方程

我们知道，微积分的研究对象是函数，它是客观事物的内在联系在数学上的反映。因此，如何建立函数式，是科学技术的重要课题。在第一章第5节，我们举了一些如何建立函数关系式的实例，那些例子是比较简单的；对于比较复杂的科技问题，往往是先列出未知函数及其导数或微分之间的关系式，即微分方程，然后设法解微分方程，才能找出未知的函数式。

本章主要介绍微分方程的一些基本概念以及简单常微分方程的解法。

§1　什么是微分方程

先看两个实例：

【例1】　已知曲线上任意点(x,y)处的切线斜率为$2x$，且此曲线过（1,2）点，试写出它的方程。

解：　根据导数的几何意义，可知所求曲线$y=y(x)$应满足方程

$$\frac{dy}{dx}=2x, \tag{1}$$

或

$$dy=2xdx。$$

对方程两边积分，得

$$\int dy=\int 2xdx,$$

即

$$y=x^2+C。\qquad (2)$$

其中C是任意常数，待定。

由于所求的曲线通过（1,2）点，故曲线方程还应满足以下的条件：

$$x=1\text{时}，\ y=2。$$

将此条件代入（2），得

$$2=1^2+C,$$

由此定出 $$C=1。$$

这样，便找出了曲线方程：

$$y=x^2+1。\qquad (3)$$

【例 2】 已知在近地表的空间，如果不考虑空气阻力，落体作的是等加速运动，其加速度记作g（约为9、8米/秒^2）。试求落体的运动规律，即找出路程s随时间t变化的函数式。

解： 注意到加速度是速度$v(t)$对时间的导数，即路程对时间的二阶导数，按题意可知表示落体运动规律的函数$s=s(t)$应满足方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g,\qquad (4)$$

或

$$\frac{dv}{dt}=g。$$

两边积分，有

$$\int dv=\int gdt,$$

得

$$v=gt+C_1, \qquad (5)$$

即

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1,$$

再积分一次，

$$\int ds=\int(gt+C_1)dt,$$

得出

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2。 \qquad (6)$$

其中，C_1、C_2都是任意常数。

为具体起见，研究从某一大楼下落的物体。以大楼平台为原点，s轴垂直向下。如果物体是从八楼窗口（距平台8米）以5米/秒的初速下抛（图5—1），则函数$s(t)$、$v(t)$还要满足以下条件：

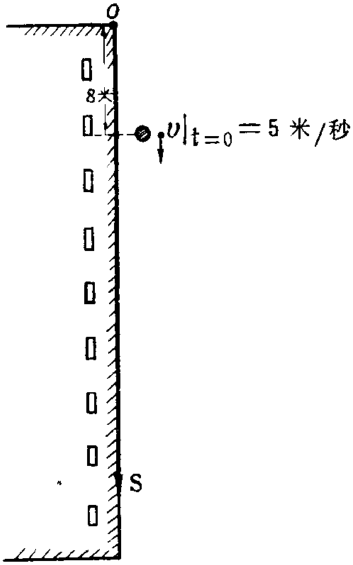

图 5—1

$$t=0\text{时}，\ s=8\text{米}，\ v=\frac{ds}{dt}=5\text{米/秒}。$$

把条件“$t=0$，$v=5$”代入（5），得

$$5=g\cdot 0+C_1,$$

求出 $\qquad C_1=5$；

再将条件“$t=0$，$s=8$”代入（6）式，则得

$$8=\frac{1}{2}g\cdot 0^2+C_1\cdot 0+C_2,$$

算出 $C_2=8$。

最后把$C_1=5$、$C_2=8$代入（6）式，便找出这种特定情况下的落体运动规律：

$$s=\frac{1}{2}gt^2+5t+8。\tag{7}$$

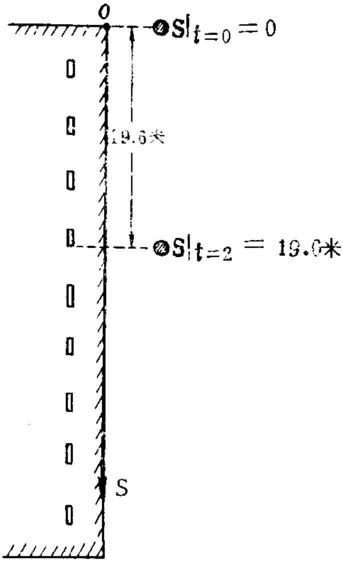

图 5—2

现在讨论另一情况。设从平台下抛一物体，并已知在2秒末物体正好掠过距平台19.6米的六楼窗口（图5—2），则函数$s(t)$需适合以下条件：

$t=0, s=0$；$t=2, s=19.6$。

将上述条件代入（6）式，则得

$$\begin{cases} 0=\frac{1}{2}g\cdot 0^2+C_1\cdot 0+C_2, \\ 19.6=\frac{1}{2}g\cdot 2^2+C_1\cdot 2+C_2。\end{cases}$$

解此联立方程组，求出

$$C_1=0,\ C_2=0。$$

于是又得出在另一特定情况下的落体运动规律：

$$s=\frac{1}{2}gt^2。\tag{8}$$

分析了两个实例，现在我们可以对有关微分方程的一些

基本概念作一说明。

含有未知函数的导数（或微分）的方程称为微分方程。例如，(1)、(4) 式就是两个微分方程。

未知函数为一元函数的微分方程叫常微分方程，未知函数为多元函数的微分方程，叫偏微分方程。在（1）及(4) 式中，未知函数 $y(x)$、$s(t)$ 都是一元函数，因此，它们都是常微分方程。

在微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶。例如（1）、（4）式分别为一、二阶微分方程。

凡是能满足微分方程的函数，均称为微分方程的解。例如函数（2）和（3）式都是微分方程（1）的解；函数 (6)、(7)、(8)都是微分方程（4）的解。找出满足微分方程的函数叫做解微分方程。

如果常微分方程的解含有任意常数，且独立任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解。例如，含有一个任意常数的函数族 $y=x^2+C$便是一阶微分方程$dy/dx=2x$的通解；含有二个独立任意常数的函数族 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 则是二阶微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}=g$的通解。

由于通解中含有任意常数，它只能反映微分方程所描写的某一类客观事物变化的一般规律，还不能完全确定其中某一具体事物变化的特殊规律。要完全确定某一具体事物变化的特殊规律，必须确定这些任意常数。为此，要根据具体问题的实际情况，提出能确定这些任意常数的附加条件，称为定解条件。例如满足微分方程（1）即斜率为 $2x$ 的曲线有无数条，彼此的纵坐标相差一个常数（图 5—3）；但既满足微分方程又满足定解条件

$$y\Big|_{x=1}=2$$

的曲线却只有一条。又如满足微分方程（4）即加速度为g的路程函数也有无数个，因为初始位置以及初始速度的不同,其具体的运动规律也各异。但加速度为g，又同时满足定解条件

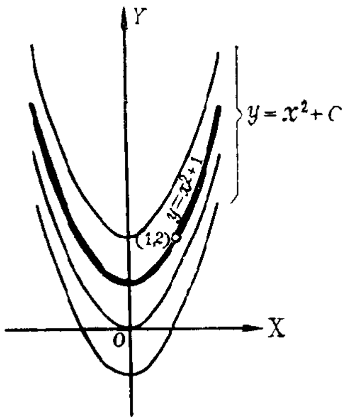

图 5—3

$$s\Big|_{t=0}=8,\quad s'\Big|_{t=0}=5 \quad (9)$$

的路程函数则只有一个，即（7）式；加速度为g又满足定解条件

$$s\Big|_{t=0}=0,\quad s\Big|_{t=2}=19.6$$

的路程函数也只是一个，即（8)式。如果对自变量的某一个值给出相应的函数值以及导数值，由此来确定解中的任意常数，这种定解条件又称为初值条件，(9）式就是初值条件。

既满足微分方程又满足定解条件的解，叫做微分方程的特解。换句话说，特解是指确定了通解中任意常数后所得之解。如（7）式就是微分方程（4）满足初值条件（9）的特解。

类似于例1和例2，利用常微分方程寻求未知函数式的一般步骤如下：

第一步：分析问题，建立微分方程，并提出定解条件；

第二步：求微分方程的通解；

第三步：根据定解条件，求出微分方程的特解。

习题 1 分别指出下列微分方程的阶数：

（1） $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=e^x$，

（2） $x(y')^2-2yy'+x=0$，

（3） $(y''')^2+5(y')^4-y^5+x^7=0$，

（4） $(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$。

习题 2 下列函数是否为相应的微分方程的解？

（1） 微分方程 $xy'=2y$；

函数 $$y=5x^2$$

（2） 微分方程 $y''-2y'+y=0$；

函数 $1^\circ\ y=e^x$，

$2^\circ\ y=xe^x$，

$3^\circ\ y=x^2e^x$，

$4^\circ\ y=(C_1+C_2x)e^x$ （C_1, C_2是任意常数）。

（3） 微分方程 $(x+y)dx+xdy=0$；

函数 $y=\frac{C^2-x^2}{2x}$ （C为任意常数）

习题 3 验证函数 $v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$是满足微分方程

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv$$

和定解条件

$$v\Big|_{t=0}=0$$

的特解（除 v、t 外，其余均为常量）。

习题 4 求下列微分方程的通解：

（1）
$$\frac{dy}{dx}=3x+5,$$

（2）
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\cos x。$$

习题 5 分别求满足下列微分方程及定解条件的特解：

（1） $\frac{dy}{dx}=e^{x}$， $y\Big|_{x=0}=0$；

（2） $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$， $y\Big|_{x=0}=0$， $y'\Big|_{x=0}=2$；

（3） $y''=x^2-x$，$y\Big|_{x=0}=0$， $y\Big|_{x=1}=0$。

§2 可分离变量的一阶微分方程

并不是任何一阶微分方程都是容易求解的，这里仅限于讨论经常遇到的一种类型——可分离变量的一阶微分方程。先看一例❶。

【例3】 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2 \tag{10}$$

的通解及满足初始条件（即初值条件）

$$y\Big|_{x=0}=1$$

❶ 其实，例 1 与例 2 都是用分离变量法解出的。