

物探工人自学参考读物

数 学

第 二 卷

微 积 分

下 册

张秋光 主编

地 质 出 版 社

物探工人自学参考读物

数 学

第 二 卷
微 积 分

下 册

张秋光 主编

地 质 出 版 社

物探工人自学参考读物

数学

第二卷

微积分

下册

张秋光 主编

地质部书刊编辑室编辑

责任编辑 唐光后

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：787×1092¹/₃₂印张：18³/₄插页3个字数：415,000

1982年3月北京第一版·1982年3月北京第一次印刷

印数1—3,330册·定价2.90元

统一书号：15038·新705

目 录

第五章 常微分方程	1
§ 1 什么是微分方程	1
§ 2 可分离变量的一阶微分方程	8
§ 3 二阶常系数线性微分方程	20
一、二阶常系数线性齐次微分方程	20
1. 解的性质	20
2. 特征方程法	22
二、二阶常系数线性非齐次微分方程	31
1. 解的性质	31
2. 用待定系数法求非齐次方程的特解	32
3. 用拉格朗日常数变易法求非齐次方程的特解	42
§ 4 二阶常系数线性微分方程的应用	46
一、机械振动	46
1. 自由振动	48
2. 强迫振动	53
二、电磁振荡	57
1. 无源 $R-L-C$ 串联电路	58
2. 有源 $R-L-C$ 串联电路	59
§ 5 二阶变系数线性微分方程	63
简短的结语	66
第六章 幂级数	70
§ 1 常数项级数	70
一、级数收敛与发散的定義	70

二、收敛级数的基本性质	76
三、敛散判别法	81
1. 通项判别法	81
2. 正项级数敛散判别法	83
3. 交错级数判别法	93
4. 任意项级数敛散判别法	95
四、级数的代数运算	98
§ 2 函数项级数	99
一、收敛域	100
二、和函数	101
三、一致收敛的概念	102
四、一致收敛级数的性质	107
五、函数项级数判别法	110
§ 3 幂级数	114
一、幂级数的收敛半径	115
二、幂级数的性质	118
§ 4 将函数展成幂级数	123
一、泰勒级数	123
二、马克劳林级数	129
§ 5 幂级数的应用	135
一、近似计算	135
二、解微分方程	140
三、关于欧拉公式	143
附录 均差与差分	148
一、均差	148
1. 拉格朗日插值多项式的递推公式 均差	149
2. 均差插值多项式及均差插值公式	153
3. 均差之计算	156
4. 应用举例——区域场的近似表示	160

二、差分	164
1. 差分的概念	165
2. 差分与均差及差分与导数之关系	167
3. 牛顿前插公式	168
4. 应用举例——二度异常向下延拓	170
简短的结语	178
第七章 空间解析几何	181
§ 1 空间直角坐标系	181
§ 2 向量代数	185
一、两向量相等	186
二、向量的加法	186
三、向量的减法	187
四、向量的数乘	187
五、向量的坐标表示	190
六、向量的标积	199
七、向量的矢积	203
八、混合积和二重矢积	208
§ 3 二元函数与曲面	211
一、多元函数的概念	211
二、二元函数的图象——曲面	215
三、简单曲面举例(球面、柱面、圆锥面等)	221
四、平面	229
1. 向径	229
2. 平面的点法式方程	229
3. 平面的一般方程	232
§ 4 空间曲线(包括直线)	237
一、空间曲线的一般方程	237
二、空间曲线的参数方程	241
简短的结语	248

附录 行列式	251
一、二阶行列式的定义	251
二、三阶行列式的定义	253
三、 n 阶行列式的定义	260
四、行列式的性质	262
五、克莱姆法则	268
第八章 偏导数	273
§ 1 二元函数的极限与连续性	273
一、极限	273
二、连续性	278
§ 2 偏导数	280
一、偏导数的概念与计算	280
二、高阶偏导数	285
三、偏导数的几何意义	292
四、磁法勘探中的导数法	296
§ 3 全微分	303
一、全微分的概念	303
二、全微分在误差估计中的应用	307
§ 4 二元函数的泰勒公式	312
一、泰勒公式和泰勒级数	312
二、应用实例——重力异常的垂向二次导数	316
1. 垂向二次导数的作用	316
2. 垂向二次导数的计算公式	321
§ 5 复合函数求导法	331
§ 6 多元函数的极值	347
一、自由极值问题	347
二、条件极值问题	351
§ 7 最小二乘法	357
一、寻求经验公式	357

二、趋势面分析	364
三、基点网平差	367
简短的结语	377
第九章 重积分	380
§ 1 二重积分的概念和性质	380
§ 2 二重积分的计算	387
一、直角坐标系中二重积分的计算	387
二、极坐标系中二重积分的计算	401
§ 3 三重积分的概念	408
§ 4 三重积分的计算	410
一、直角坐标系中三重积分的计算	411
二、柱坐标系中三重积分的计标	422
三、球坐标系中三重积分的计算	431
简短的结语	441
第十章 微积分在重力和磁法勘探中的综合应	
用举例	443
§ 1 位场	443
一、引力场	443
二、静磁场	448
§ 2 泊松公式	452
§ 3 若干简单形状均匀地质体重磁场的正演	
公式	458
一、球	459
二、水平圆柱	465
三、板	467
§ 4 几种正演量板简介	471
一、二度量板	471
1. 米可夫量板	471

2. 杨格量板	487
二、似二度量板	491
1. Z_a 似二度量板	491
2. Δg 似二度量板	534
简短的结语	543
习题答案	544
参考文献	589

第五章 常微分方程

我们知道，微积分的研究对象是函数，它是客观事物的内在联系在数学上的反映。因此，如何建立函数式，是科学技术的重要课题。在第一章第5节，我们举了一些如何建立函数关系式的实例，那些例子是比较简单的，对于比较复杂的科技问题，往往是先列出未知函数及其导数或微分之间的关系式，即微分方程，然后设法解微分方程，才能找出未知的函数式。

本章主要介绍微分方程的一些基本概念以及简单常微分方程的解法。

§1 什么是微分方程

先看两个实例：

【例1】 已知曲线上任意点 (x, y) 处的切线斜率为 $2x$ ，且此曲线过 $(1, 2)$ 点，试写出它的方程。

解： 根据导数的几何意义，可知所求曲线 $y=y(x)$ 应满足方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad (1)$$

或

$$dy = 2x dx.$$

对方程两边积分，得

$$\int dy = \int 2x dx,$$

即

$$y = x^2 + C. \quad (2)$$

其中 C 是任意常数，待定。

由于所求的曲线通过 $(1, 2)$ 点，故曲线方程还应满足以下的条件：

$$x = 1 \text{ 时, } y = 2.$$

将此条件代入 (2)，得

$$2 = 1^2 + C,$$

由此定出

$$C = 1.$$

这样，便找出了曲线方程：

$$y = x^2 + 1. \quad (3)$$

【例 2】 已知在近地表的空问，如果不考虑空气阻力，落体作的是等加速运动，其加速度记作 g (约为 9.8 米/秒²)。试求落体的运动规律，即找出路程 s 随时间 t 变化的函数式。

解： 注意到加速度是速度 $v(t)$ 对时间的导数，即路程对时间的二阶导数，按题意可知表示落体运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足方程

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g, \quad (4)$$

或

$$\frac{d v}{d t} = g.$$

两边积分，有

$$\int dv = \int g dt,$$

得

$$v = gt + C_1, \quad (5)$$

即

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1,$$

再积分一次,

$$\int ds = \int (gt + C_1) dt,$$

得出

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2.$$

(6)

其中, C_1 、 C_2 都是任意常数。

为具体起见, 研究从某一大楼下落的物体。以大楼平台为原点, s 轴垂直向下。如果物体是从八楼窗口(距平台8米)以5米/秒的初速下抛(图5-1), 则函数 $s(t)$ 、 $v(t)$ 还要满足以下条件:

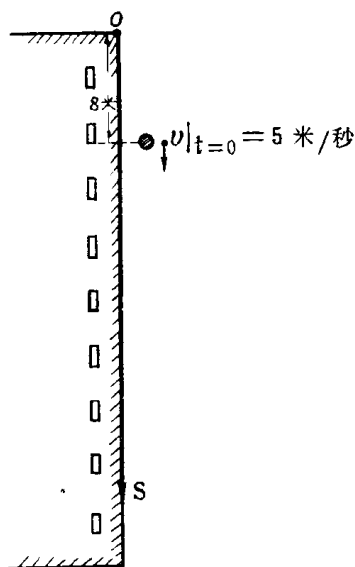


图 5-1

$$t=0 \text{ 时, } s=8 \text{ 米, } v = \frac{d s}{d t} = 5 \text{ 米/秒。}$$

把条件“ $t=0$, $v=5$ ”代入(5), 得

$$5 = g \cdot 0 + C_1,$$

求出

$$C_1 = 5;$$

再将条件“ $t=0$, $s=8$ ”代入(6)式, 则得

$$8 = \frac{1}{2}g \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

算出 $C_2 = 8$ 。

最后把 $C_1 = 5$ 、 $C_2 = 8$ 代入 (6) 式，便找出这种特定情况下的落体运动规律：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + 5t + 8. \quad (7)$$

现在讨论另一情况。设从平台下抛一物体，并已知在 2 秒末物体正好掠过距平台 19.6 米的六楼窗口 (图 5-2)，则函数 $s(t)$ 需适合以下条件：

$$t=0, s=0; \quad t=2, s=19.6.$$

将上述条件代入 (6) 式，则得

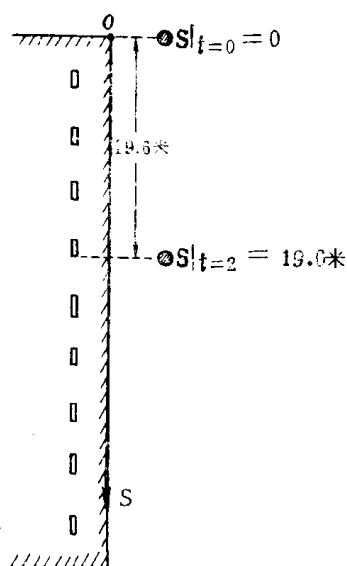


图 5-2

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}g \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 19.6 = \frac{1}{2}g \cdot 2^2 + C_1 \cdot 2 + C_2. \end{cases}$$

解此联立方程组，求出

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

于是又得出在另一特定情况下的落体运动规律：

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \quad (8)$$

分析了两个实例，现在我们可以对有关微分方程的一些

基本概念作一说明。

含有未知函数的导数（或微分）的方程称为微分方程。例如，(1)、(4) 式就是两个微分方程。

未知函数为一元函数的微分方程叫常微分方程，未知函数为多元函数的微分方程，叫偏微分方程。在(1)及(4)式中，未知函数 $y(x)$ 、 $s(t)$ 都是一元函数，因此，它们都是常微分方程。

在微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶。例如(1)、(4)式分别为一、二阶微分方程。

凡是能满足微分方程的函数，均称为微分方程的解。例如函数(2)和(3)式都是微分方程(1)的解；函数(6)、(7)、(8)都是微分方程(4)的解。找出满足微分方程的函数叫做解微分方程。

如果常微分方程的解含有任意常数，且独立任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解。例如，含有一个任意常数的函数族 $y = x^2 + C$ 便是一阶微分方程 $dy/dx = 2x$ 的通解；含有二个独立任意常数的函数族

$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ 则是二阶微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ 的通解。

由于通解中含有任意常数，它只能反映微分方程所描写的某一类客观事物变化的一般规律，还不能完全确定其中某一具体事物变化的特殊规律。要完全确定某一具体事物变化的特殊规律，必须确定这些任意常数。为此，要根据具体问题的实际情况，提出能确定这些任意常数的附加条件，称为定解条件。例如满足微分方程(1)即斜率为 $2x$ 的曲线有无数条，彼此的纵坐标相差一个常数(图5-3)；但既满足微分方程又满足定解条件

$$y \Big|_{x=1} = 2$$

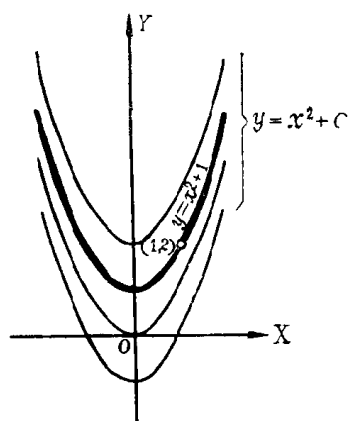


图 5-3

的曲线却只有一条。又如满足微分方程 (4) 即加速度为 g 的路程函数也有无数个, 因为初始位置以及初始速度的不同, 其具体的运动规律也各异。但加速度为 g , 又同时满足定解条件

$$s \Big|_{t=0} = 8, \quad s' \Big|_{t=0} = 5 \quad (9)$$

的路程函数则只有一个, 即 (7) 式; 加速度为 g 又满足定解条件

$$s \Big|_{t=0} = 0, \quad s \Big|_{t=2} = 19.6$$

的路程函数也只是一个, 即 (8) 式。如果对自变量的某一个值给出相应的函数值以及导数值, 由此来确定解中的任意常数, 这种定解条件又称为初值条件, (9) 式就是初值条件。

既满足微分方程又满足定解条件的解, 叫做微分方程的特解。换句话说, 特解是指确定了通解中任意常数后所得之解。如 (7) 式就是微分方程 (4) 满足初值条件 (9) 的特解。

类似于例1和例2, 利用常微分方程寻求未知函数式的一般步骤如下:

- 第一步: 分析问题, 建立微分方程, 并提出定解条件;
- 第二步: 求微分方程的通解;

第三步: 根据定解条件, 求出微分方程的特解。

习题 1 分别指出下列微分方程的阶数:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x,$$

$$(2) \quad x(y')^2 - 2yy' + x = 0,$$

$$(3) \quad (y''')^2 + 5(y')^4 - y^5 + x^7 = 0,$$

$$(4) \quad (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

习题 2 下列函数是否为相应的微分方程的解?

$$(1) \quad \text{微分方程 } xy' = 2y;$$

$$\text{函数} \quad y = 5x^2$$

$$(2) \quad \text{微分方程 } y'' - 2y' + y = 0;$$

$$\text{函数} \quad 1^\circ y = e^x,$$

$$2^\circ y = xe^x,$$

$$3^\circ y = x^2 e^x,$$

$$4^\circ y = (C_1 + C_2 x)e^x \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

$$(3) \quad \text{微分方程 } (x + y)dx + xdy = 0;$$

$$\text{函数} \quad y = \frac{C^2 - x^2}{2x} \quad (C \text{ 为任意常数})$$

习题 3 验证函数 $v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$ 是满足微分方程

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

和定解条件

$$v \Big|_{t=0} = 0$$

的特解 (除 v 、 t 外, 其余均为常量)。

习题 4 求下列微分方程的通解:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 3x + 5,$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \cos x.$$

习题 5 分别求满足下列微分方程及定解条件的特解:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = e^x, \quad y \Big|_{x=0} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x, \quad y \Big|_{x=0} = 0, \quad y' \Big|_{x=0} = 2,$$

$$(3) \quad y'' = x^2 - x, \quad y \Big|_{x=0} = 0, \quad y \Big|_{x=1} = 0.$$

§ 2 可分离变量的一阶微分方程

并不是任何一阶微分方程都是容易求解的, 这里仅限于讨论经常遇到的一种类型——可分离变量的一阶微分方程。先看一例^①。

【例3】 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad (10)$$

的通解及满足初始条件 (即初值条件)

$$y \Big|_{x=0} = 1$$

① 其实, 例 1 与例 2 都是用分离变量法解出的。