



信号处理中的傅里叶变换

用于实践的连续和离散方法

D. 阿基累斯 著

科 学 出 版 社



信号处理中的傅里叶变换

用于实践的连续和离散方法

D. 阿基里斯 著

史习智 黄 潮 译

科 学 出 版 社

1989

内 容 简 介

本书从数字信号处理角度出发,系统地论述了傅里叶变换的基本理论。全书共七章。内容包括:导论,信号与谱,离散傅里叶变换,离散傅里叶变换的数值计算,快速卷积和相关,信号处理中的傅里叶变换和样条内插以及用于谱分析的数字方法。其特点是着重于以矩阵方式阐明变换的性质,解释明确,选材精炼。

本书可供从事数字信号处理工作的广大科技人员以及高等院校各有关专业的高年级学生、研究生和教师参考。

D. Achilles

DIE FOURIER-TRANSFORMATION IN DER SIGNALVERARBEITUNG

Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis

Springer-Verlag, 1978

信 号 处 理 中 的 傅 里 叶 变 换

用于实践的连续和离散方法

D. 阿基里斯 著

史习智 黄 潮 译

责任编辑 陈菊华

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年 2 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1989 年 2 月第一次印刷 印张: 6 7/8

印数: 0001—1,950 字数: 153,000

ISBN 7-03-000769-7/O·200

定 价: 5.90 元

译 者 的 话

数字信号处理是用数字方法处理各种信号的技术，它的主要数学基础是傅里叶变换。自从1965年J. W. 库利 (J. W. Cooley) 和 J. W. 图基 (J. W. Tukey) 提出了离散傅里叶变换的快速算法——快速傅里叶变换 (FFT) 以来，数字信号处理技术已在通信、雷达、声学、振动、地球物理、土木工程、生物医学工程、机械故障诊断和结构动力学等各个重要领域里得到了广泛的应用。70年代初期起，针对以上应用而研制的专用分析软件和基于大规模集成电路的固件信号分析器陆续装备研究机关、高等学校和工厂。人们越来越关注这项技术的进展。从专业上来讲，数字信号处理已经发展成为一门新兴的独立学科，相应地，工业上正形成独特的信号处理机部门。

在这种形势下，人们对数字信号处理专著的需求是很迫切的。虽然自1969年出版了B. 戈尔德 (B. Gold) 和C. 雷德 (C. Rader) 的《数字信号处理》一书以来，特别是70年代后期，有二十余本专著问世，已为读者提供了较详尽的理论、设计与实践的知识，但这些著作大都来自美国，未能充分反映出世界其它地区在数字信号处理方面所做的基本研究与所持的观点。

联邦德国埃尔兰根 (Erlangen) 大学的D. 阿基累斯 (D. Achilles) 博士所写的《信号处理中的傅里叶变换》是一本来自欧洲地区的信号处理专著，具有一定的代表性 (埃尔兰根大学就是欧洲的信号处理研究中心之一)。该书特点是从

信号处理角度来论述傅里叶变换基本理论,既保持了数学严密性,又注意到信号处理的具体物理概念。在论述上,也与已有的著作有所不同。全书核心部分的三章(离散傅里叶变换、快速傅里叶变换与快速卷积和相关)都着重于矩阵表示,把旋转因子矩阵作为酉矩阵,在赋范空间中讨论变换的性质,从而给出变换的普遍规律。这无疑地提供了一份与 A. V. 奥本海姆 (A. V. Oppenheim) 等人著作并行的材料。

鉴于该书的代表性以及较独特的叙述方式,我们把它翻译出来,作为已有信号处理著作的补充。由于译者水平有限,错误与不妥之处在所难免,欢迎读者批评指正。

译者

• • •

前 言

一百五十多年来，傅里叶变换一直是物理学最重要的数学辅助手段之一。傅里叶变换的许多应用都可以广义地归纳为信号处理这个范畴。这方面的一个例子是光阑在光学成像中所起的作用，这种作用可解释为二维信号滤波。当信号处理用于分析自然界中随时间起伏的过程（地震、气象、潮汐研究等）和技术领域中随时间而变的过程（振动、交流电等）时，上述归纳方法的合理性更为明显，因为对这些过程的分析早就是傅里叶变换的任务了。作这些分析时，主要应用傅里叶变换的离散形式，即所谓离散傅里叶变换（缩写成 DFT）进行数值运算。

几十年前，随着电通信系统理论的建立，傅里叶变换进入了一个崭新阶段，成为通信技术人员不可缺少的数学工具。但系统理论的研究决不仅仅局限于通信技术，它在其它技术和自然科学领域内也已成功地用来解决各种各样的课题。近十几年来，由于应用了十分有效的快速傅里叶变换 (FFT) 算法，信号处理有了巨大进展，这种认识现在更普遍化了。傅里叶变换在这个最新的发展阶段中，已远远超出了原先对信号和系统进行解析描述阶段的水平。今天，它已成功地借助数字计算机来实现信号处理，并对一般的技术系统，物理系统和生物系统进行辨识和模拟。

本书是为在工作中越来越多地遇到信号处理问题的工程技术人员和自然科学工作者写的。本书重点讨论对于信号处理有意义的傅里叶变换最重要的原理。书中数学表示式的推

导很详细,容易看懂。阅读本书时,并不要求读者事先具备关于系统理论的知识。

第一章是导论,用两个例子阐明信号处理和傅里叶变换这两个概念。首先,用雷达天文学中一个信号处理的实例来显示如何借助傅里叶变换从一个信号中获得许多信息,这些信息初看起来似乎是不可能得到的。随后,对一个线性时不变系统作了基本观察,以此来说明傅里叶变换和系统理论之间的相互关系。

第二章说明怎样用傅里叶变换来定义不同等级信号的谱。在考虑有限能量信号的情况下,给出了傅里叶积分的主要性能。通过简单明了的阐述,引入分布的傅里叶变换理论,对于用数学方法描述信号和系统这种分布有重要作用。接着,将周期信号和随机信号作为有限功率信号放在一起进行讨论,给出了与周期信号相关联的傅里叶级数和谐波分析的表示式。定义了随机信号的功率谱密度,然后用系统理论进行观察表明,这个定义在物理上是有意义的。随后,从不连续信号的讨论中引出关于数字信号的处理问题。在这一章的最后,对比了模拟系统和数字系统,傅里叶变换和离散傅里叶变换之间的关系。

离散傅里叶变换及其特性是第三章讨论的内容。表示式选用了统一的、一目了然的矩阵形式。离散傅里叶变换的双重性表现得很明显:一方面,它表现为具有自封闭映射定律的完全独立的酉变换。另一方面,它与傅里叶变换又十分相近,这在许多模拟中都得到了体现。这两种性能在信号处理中都有其深刻的意义。这里所选择的表示式是兼容的,这种兼容性表现为任何时刻,离散傅里叶变换的变换常数都能解释为采样间隔。

引入选抽算子和分段算子以后,就能对离散傅里叶变换

进行结构分解,这种分解直接导出快速傅里叶变换原理,这是第四章讨论的内容。文中对最重要的快速傅里叶变换方法给出闭合的矩阵表示式。这种表示式对数学上描写有任意素因子分解的快速傅里叶变换流图特别有效。第四章除了一些实用概念外,还叙述了一些补充材料,如离散傅里叶变换叠加定理的应用和三角函数对称性的利用。

第五章讨论对信号处理有重要意义的离散卷积运算和相关运算。这里也采用了矩阵形式,用这种形式能对长信号序列的分段方法给出一目了然的表示式。作者对计算时间作了比较,估计了在按块进行处理时最有利的分段长度。

第六章叙述傅里叶变换、样条内插和离散傅里叶变换之间的关系,并指出如何充分利用这些关系进行数值傅里叶变换和信号处理。这里特别阐述了用样条函数表示的连续信号的数字处理方法和混合处理方法。

对许多技术方面和自然科学方面的应用来说,随机信号功率谱的数字确定是一个特别重要的领域。第七章对此作了详细的叙述,介绍了一些最重要的新方法,用许多实例作了验证,并对它们作了相互比较。

D. 阿基里斯

目 录

第一章 导论.....	1
1.1 引例	1
1.2 在频域上描述信号的意义	8
第二章 信号与谱.....	12
2.1 有限能量信号	12
2.1.1 绝对可积信号	13
2.1.2 吉布斯现象,非绝对可积信号.....	20
2.1.3 信号持续时间与带宽,迅速衰减的信号与谱.....	24
2.2 分布	30
2.3 有限功率信号	40
2.3.1 周期信号	40
2.3.2 随机信号	50
2.4 不连续信号	67
2.4.1 定义和系统理论的意义	67
2.4.2 用采样值表示信号的问题	71
2.4.3 不连续信号和离散傅里叶变换	76
第三章 离散傅里叶变换.....	81
3.1 定义和表示式	81
3.2 变换定律	84
3.3 序列的选抽和分段	97
第四章 离散傅里叶变换的数值运算.....	103
4.1 前言	103
4.2 快速傅里叶变换原理	105
4.2.1 库利-图基算法.....	105

4.2.2 快速傅里叶变换信号流图的确定	107
4.3 叠加定理的应用	112
4.4 以 2 为基数的快速傅里叶变换	117
4.4.1 FFT 信号流图	118
4.4.2 简单的 FFT 程序	125
4.4.3 以 2 的高次幂为基数的算法,实数序列	126
第五章 快速卷积和相关	130
5.1 离散卷积和相关作为循环运算	130
5.2 长数据序列的分段	139
第六章 信号处理中的傅里叶变换和样条内插	149
6.1 信号处理前言	149
6.2 样条信号和谱	151
6.3 样条信号的卷积、相关和解卷积	161
6.4 样条信号中不连续性的考虑	168
第七章 谱分析的数字方法	180
7.1 经典方法	180
7.2 对修正的周期图求平均	186
7.3 周期图的平滑	200
参考文献	207

第一章 导 论

1.1 引 例

我们从傅里叶变换用于信号处理的许多例子中先选出一个作为引子。这个例子通过对雷达脉冲的时间-频率分析来确定行星表面的结构。它一方面能够特别清楚地显示傅里叶变换的主要作用，另一方面能够很直观地表明各种相互关系。

首先，简单介绍一下雷达天文学^[1.1-1.3]。这门学科是研究我们的太阳系的，与地球邻近的行星，太阳，月亮和其它天体，是雷达脉冲发射的目标。雷达脉冲由天文雷达的抛物面天线发射出去。被目标反射或散射的很小一部分脉冲能量返回到雷达的天线。将这种信号从叠加的噪声信号中滤出来并加以处理，就可以得到所需的信息。信号处理过程是比较复杂的，一般要用数字计算机进行实时处理。计算机直接连在雷达系统上。用这种信号处理方式，可以测定例如行星位置和行星在轨道上运行的速度。所得到的数据精度比相应的光学观察方法要高出几个数量级。即使象金星那样被不透明的大气所包围的行星，我们也能获得有关它的转动和表面结构的信息。

为了对这些相互关系有一个概括了解，我们以一种简化模型为出发点。设发射脉冲是一个具有以下形式的载频矩形脉冲：

$$u(t) = \begin{cases} \sin 2\pi f_0 t, & 0 \leq t \leq \theta \\ 0, & \text{其余} \end{cases} \quad (1.1-1)$$

则载频 f_0 和脉冲持续时间 θ 的选择依赖于所观察目标的特征和以实验为基础的课题。典型数据是 $f_0 = 500\text{MHz}$ 和 $\theta = 500\mu\text{s}$ 。

若 R 是雷达和某一个行星间的最短距离，则脉冲回波在经过时间 $T = 2R/c$ 后才能记录到，由真空中的光速 ($c \approx 3 \times 10^8 \text{km/s}$) 和测定的 T ，可以很精确地求出 R 值。测量的时刻取决于回波脉冲前沿什么时候到达。这个回波脉冲前沿必定是由行星的最前缘部分反射产生的。由于从地球可见到的行星表面的其余距离较远的部分对回波脉冲也有贡献，所以，回波脉冲持续时间要比发射脉冲持续时间长 $2r/c$ ，其中 r 是行星的半径^[1,4]。

上面作为例子引用的发射脉冲包含 $\theta f_0 = 2.5 \times 10^5$ 个载波振荡周期。因此，与 $1/\theta$ 成比例的谱线宽度相对于载波频率来说是很小的。由于多普勒效应，回波脉冲谱线一般相对于 f_0 有一个位移，并且展宽了。如果我们观察频域内的信号，也就是进行频谱分析的话，就可获得关于所观察行星的平移、转动和表面结构的信息。

我们先考虑纯粹的平移。设行星向着地球移动的速度分量为 v_r ，在忽略相对论效应的情况下，回波脉冲的载频可由下式给出：

$$f = f_0(1 + 2v_r/c). \quad (1.1-2)$$

利用此式可以从接收信号的频移中确定 v_r 。

若行星以角速度 Ω 围绕着一个轴转动，为了简化表示式，我们假定这个轴垂直于行星-地球的连线，则行星上所有对回波脉冲有贡献的各个表面单元与雷达之间的相对速度一般是不同的。由此得出的频率移动最大为 $\pm 2f_0 r \Omega / c$ (图 1.1)。

因此,信号谱的总展宽值为

$$B = 4f_0 r \Omega / c. \quad (1.1-3)$$

确定 B 以后,就能得知行星转动的角速度 Ω 。用这种方法第一次精确地测定了金星和水星的自转^[1.5, 1.6]。

现代信号处理给人印象特别深刻的成果是获取了行星表面结构的图片。从地球观察太阳系的各个行星时,对金星的张角最大。若取金星与地球之间最远和最近距离的中间位置,这个张角约为 $1'$ (弧度)。这意味着,金星(当然也就包括了所有其它的行星)完全处于雷

达的光束锥以内,即使用最大的全可控雷达也不例外^[1.7]。

所以,想直接从角度上分辨行星的表面结构是不可能的。但是,雷达脉冲的回波包含了行星表面的整个结构情况的信息,因为这个回波是由许许多多行星表面不规则的凹凸部分发生的局部反射合成的。信号处理的任务就是从脉冲回波中取出这种信息。下面我们将简要地指出,如果既在频域内也在时域内对信号进行分析,就能够解决这个问题。

行星各个表面单元产生的局部反射的延迟时间是相等和固定不变的。这些表面单元位于围绕着地球-行星轴的许多同心圆上。因为由行星转动引起的表面单元的相对速度对地球来说是固定不变的,所以这些表面单元也位于许多同心圆上,但这些同心圆所围绕的轴,是一根既垂直于地球-行星的连线,也垂直于行星的转动轴线的轴。鉴于这种情况,这些表

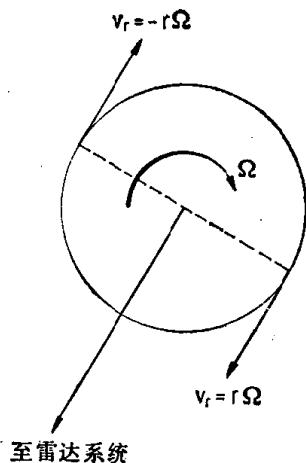


图 1.1 转动时的多普勒效应

面单元所导致的局部反射都呈现相同的多普勒位移。在投影到行星图象平面上时，延迟相同的线是一些围绕行星中心的同心圆，而多普勒频移相同的线是平行于行星转动轴的平行线(图 1.2)，在由此形成的坐标网格中，每个表面单元都能用一定的延迟和一定的多普勒频移来表征，并都能归属到回波脉冲的某一个确定的时间-频率区域中去。

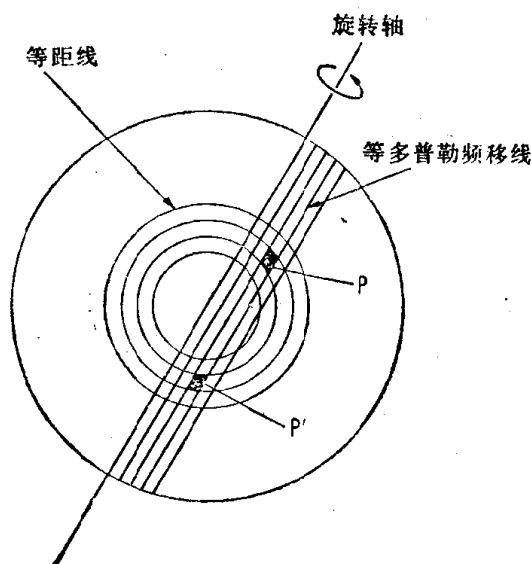


图 1.2 回波延迟相同和多普勒频移相同的区域

这个区域内的信号功率依赖于行星上相对应表面单元的物质组成情况和几何形状，由此对表面结构能作出推论。为了确定局部回波的位置，我们先将回波脉冲分成许多段。分段时，以发射脉冲的持续时间作为坐标。因为发射脉冲的持续时间决定可分辨的距离，并进而确定间距环的宽度。然后，借助快速傅里叶变换(参看第四章)，用数字计算机对每一段进行频谱分析。作为图例，图 1.3 显示了对月亮的雷达回波所做的这种时间-频率分析(分辨率较低)^[1,2]。图中记录了信

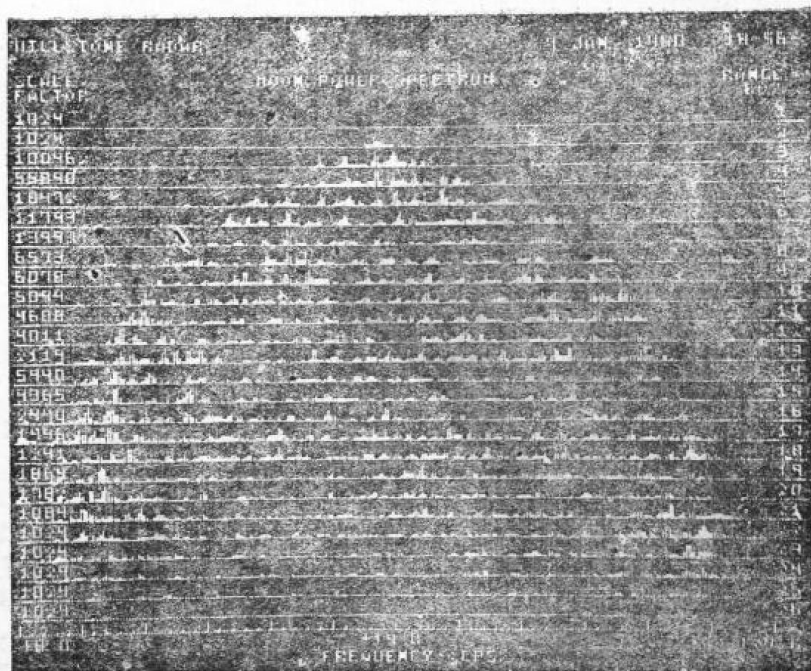


图 1.3 月亮的雷达回波的瞬时谱分析(取自 [1.8])

号的强度值(以频率作为横坐标,以时间作为纵坐标).整个回波脉冲分成持续时间各为 $500\mu\text{s}$ 的 25 个段,对每一段都进行了谱分析.图中所表示的谱,从上到下,也就是说,随着延迟时间的增长不断变宽,因为相应的间距环进入了多普勒频移较大的范围.

如果象绘制地图那样将强度投影成象,就得到一幅行星表面的图象(分辨率足够高的情况下).拍摄月亮所取得的图象(图 1.4 显示了这样一幅分辨率为 1cm^2 的雷达图象)的精度保证了所拍摄到的行星图象(如图 1.5 所表示的金星表面那样)是符合真实结构情况的.这里还要说明一下,对时间-频率区域进行定位时出现的双重性(图 1.2 中的点 P 和 P'),

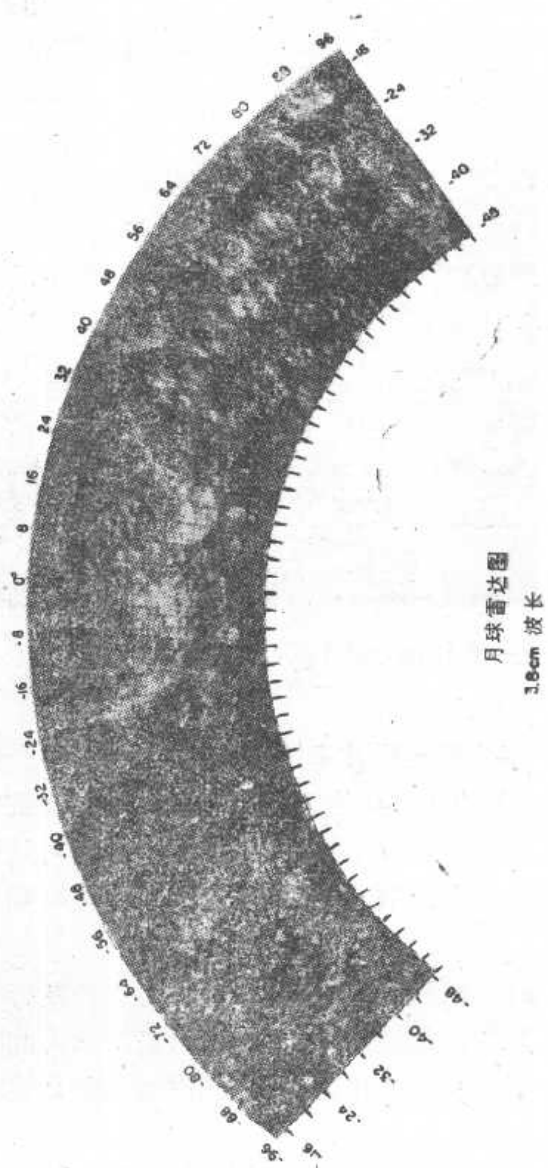


图 1.4 通过雷达回波信号的瞬时谱分析求得的月亮图(取自 [1.9])

可以用特殊的技术来消除。观测月亮时,利用雷达射束的会聚就能做到每次只观察月亮的两个半球面中的一个。观测行星时,可以用干涉仪方法^[1.9,1.10],这里就不详细介绍了。

这一节中所讨论的例子,仅仅是信号处理中许许多多有趣的应用傅里叶变换的可能性之一。当然,讨论时所采用的是大为简化的表达方式。文中提到的关于信号处理的概念和方法,在以后的章节中还将更详细地加以阐述。

在下一节中,我们进一步讨论信号的频域表示方法。

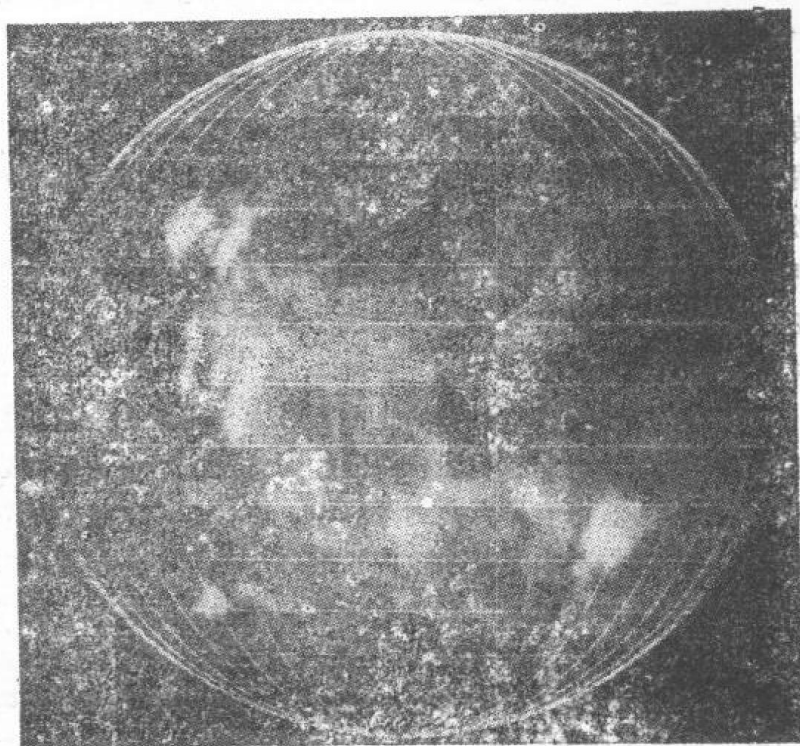


图 1.5 通过雷达回波信号的瞬时谱分析求得的金星图
(取自 [1.10])