随机微分方程及其应用

（第一卷）

〔美〕A. 弗里德曼 著

科学出版社

随机微分方程及其应用

第 一 卷

〔美〕A. 弗里德曼 著

吴让泉 译

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 简 介

本书阐述随机微分方程的理论以及它在概率论、偏微分方程以及随机控制问题中的应用.

第一卷共九章. 第一到五章介绍随机微分方程的基本理论，包括随机过程、马氏过程、布朗运动、随机积分和随机微分方程，第六章论述偏微分方程解与随机微分方程解之间的联系，第七章介绍基尔萨诺夫公式，第八、九章研究时间趋于无穷时随机微分方程组解的样本轨道性质.

读者对象为高等院校数学系高年级学生、教师及有关科技工作者.

A. Friedman
STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
AND APPLICATIONS
Volume 1
ACADEMIC PRESS, 1975

随机微分方程及其应用
第 一 卷
〔美〕 A. 弗里德曼 著
吴让泉 译
责任编辑 刘嘉善
科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1983年11月第一版 开本：787×1092 1/32
1983年11月第一次印刷 印张：9 1/8
印数：0001—8,000 字数：207,000

统一书号：13031·2412
本社书号：3294·13—1

定价：1.45 元

序

本书的目的在于发展随机微分方程组的理论，并阐述它在概率论、偏微分方程以及随机控制问题中的应用.

在第一卷里，我们叙述随机微分方程的基本理论，并选讲了几个专题. 第二卷将致力于随机微分方程的应用.

第一章至第五章构成随机微分方程的基本理论. 这方面的材料在其他教材中也会以这种或那种形式出现. 第六章论述了偏微分方程的解和随机微分方程的解之间的联系，这里有关偏微分方程的材料基本上是独立自足的，至于其中有些证明读者可参考有关的教材.

在第七章里建立了基尔萨诺夫（Гирсанов）公式，这个公式在随机控制理论中正变得愈来愈有用.

在第八章和第九章里，研究当时间趋于无穷时，随机微分方程组解的样本轨道的性态.

本书是按教材的风格来写的. 也就是说，材料基本上是独立自足的，并且在每一章的结尾都附有问题. 阅读本书的预备知识只是初等概率，尤其是，假定读者已熟悉了象条件期望、独立性以及波雷尔-康特立（Borel-Cantelli）引理等基本内容. 而这些预备知识可以在任何一本概率教材中找到. 比如布赖曼（Breiman）[1,3,4 章].

最后，感谢我的同事平斯基（Mark Pinsky），他与我进行了一些有益的讨论.

一 般 记 号

除非特别声明，所有函数均为实值函数。

在第 n 章里，第 m 节中的公式和定理分别用$(m.k)$和 $m.k$ 来表示. 当在第 l 章中，引用到公式$(m.k)$(或定理 $m.k$)时，如果 $l \neq n$，则用 $(n.m.k)$（或定理 $n.m.k$）表示；如果 $l = n$，则用 $(m.k)$（或定理 $m.k$)表示.

类似地，当在同一章中引用到第 m 节时，我们用 m 表示该节；当引用其他章（例如第 n 章）第 m 节时，我们用 $n.m$ 表示该节.

最后，当我们引用到条件 (A)，(A_1)，(B) 等等时，这些条件通常都在同一章里已经叙述过.

目　　录

第一章 随机过程

1. 随机过程的柯尔莫哥洛夫(Колмогоров)构造法

我们把几乎必然记为 a. s.,几乎处处记为 a. e.,几乎所有记为 a. a..

我们将使用下列记号:

R^n 为 n 维实欧氏（Euclid）空间;

$\mathscr{B}_n$ 为 R^n 的波雷尔（Borel）σ 代数，即由 R^n 的开集产生的最小 σ 代数;

R^∞ 为实数的所有无限序列（$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$）所构成的空间;

$\mathscr{B}_\infty$为包含所有 k 维矩形的 R^∞ 的子集之最小 σ 代数,即形如

$$\{(x_1, x_2, \cdots);\ x_1 \in I_1, \cdots, x_k \in I_k\}, \quad k > 0,$$

的所有集合,这里 $I_1, \cdots, I_k$ 均为区间.

显然 $\mathscr{B}_\infty$ 也是包含所有集

$$\{(x_1, x_2, \cdots);\ (x_1, \cdots, x_k) \in B\},\ B \in \mathscr{B}_k$$

的最小 σ 代数.

n 维分布函数 $F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是在 R^n 上定义的实值函数,并满足:

(i) 对于任意的区间 $I_k = [a_k, b_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\Delta_{I_1} \cdots \Delta_{I_n} F_n(x) \geqslant 0, \tag{1.1}$$

这里

$$\Delta_{I_k} f(x) = f(x_1, \cdots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

$$-f(x_1,\cdots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\cdots,x_n);$$

(ii) 如果当 $k\uparrow\infty$ 时，$x_j^{(k)}\uparrow x_j(1\leqslant j\leqslant n)$，则当 $k\uparrow\infty$ 时，

$$F_n(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\uparrow F_n(x_1,\cdots,x_n);$$

(iii) 如果对于某一j，$x_j\downarrow-\infty$，则 $F_n(x_1,\cdots,x_n)\downarrow 0$，并且如果对于所有 $j(0\leqslant j\leqslant n)x_j\uparrow\infty$，则

$$F_n(x_1,\cdots,x_n)\uparrow 1.$$

除非特别说明，随机变量恒假定为实值，即假定它们不取值$+\infty$或$-\infty$。

如果 $X_1,\cdots,X_n$ 均为随机变量，则 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 称为 n 维随机变量，或取值于 R^n 的随机变量．函数

$$F_n(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1<x_1,\cdots,X_n<x_n) \qquad (1.2)$$

系 n 维分布，反之，对于任意 n 维分布 F_n 存在一概率空间和取值于 R^n 的随机变量 X，使得它的分布函数为 F_n，即 (1.2) 成立．譬如，可参看布赖曼[1]．

分布函数列 $\{F_n(x_1,\cdots,x_n)\}$ 称为相容的，如果

$$\lim_{x_n\uparrow\infty}F_n(x_1,\cdots,x_n)=F_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1}),\quad n>1. \quad (1.3)$$

令 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，并令 $\{X_n\}$ 为随机变量列，我们称这样的随机变量列为离散时间随机过程，或可数随机过程，或随机序列．$(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布函数，$n\geqslant 1$，形成一相容序列．反之亦然，即

定理 1.1 设$\{F_n\}$是一满足相容条件(1.3)的 n 维分布函数列．那末，存在一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$与可数随机过程$\{X_n\}$使得

$$P(X_1<x_1,\cdots,X_n<x_n)=F(x_1,\cdots,x_n),\quad n\geqslant 1.$$

事实上，可以取 $\Omega=R^\infty$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}_\infty$，

$$P\{(x_1,x_2,\cdots);x_1<y_1,\cdots,x_n<y_n\}=F_n(y_1,\cdots,y_n)$$

并且更一般地，由(1.1)的左边给出

$$P\{(x_1, x_2, \cdots); \quad a_1 \leqslant x_1 < b_1, \cdots, a_n \leqslant x_n < b_n\}$$

同时

$$X_n((x_1, x_2, \cdots)) = x_n.$$

相容性条件保证了P在所有矩形域上有定义．这里非寻常之处主要在于P能被扩张成$(\Omega, \mathscr{F})$中的概率这一事实．而这一点出自柯尔莫哥洛夫扩张定理：

如果P在一切有限维矩形上有定义，并且

(i) $P \geqslant 0$，$P(R^\infty) = 1$；

(ii) 如果 $S_1, \cdots, S_n$ 是不相交的n维矩形，同时 $S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$，则

$$P(S) = \sum_{j=1}^{m} P(S_j);$$

(iii) 如果$\{S_j\}$是n维矩形的不减序列，且当 $j \uparrow \infty$ 时 $S_j \uparrow S$，则

$$\lim_{j \to \infty} P(S_j) = P(S);$$

那末，存在着P的唯一扩张使其成为$(R^\infty, \mathscr{B}_\infty)$上的概率．

证明可参看布赖曼[1].

随机过程是定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量族$\{X(t)\}$，这里t在实数区间I中变化(I为开的，闭的，或半开半闭.)我们也用$\{X(t), t \in I\}$，$\{X(t)\}(t \in I)$ 或者 $X(t)$，$t \in I$来表示随机过程.

一个随机过程确定一个分布函数集

$$F_{t_1 \cdots t_n}(x_1, \cdots, x_n) = P[X(t_1) < x_1, \cdots, X(t_n) < x_n], \quad (1.4)$$

这里 $t_1 < \cdots < t_n$，$t_j \in I$，$n = 1, 2, \cdots$；它们称为这个过程的有限维联合分布函数.

对于一切 $t_1 < \cdots < t_n$，$t_j \in I$，$1 \leqslant j \leqslant n$，$n = 1, 2, \cdots$ 有定义的分布函数所成的集合

$$\{F_{t_1 \cdots t_n}(x_1, \cdots, x_n)\}$$

称为相容的，如果

$$\lim_{x_k \uparrow \infty} F_{t_1 \cdots t_n}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= F_{t_1 \cdots t_{k-1} t_{k+1} \cdots t_n}(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n). \quad (1.5)$$

由 (1.4) 给出的集合是相容的，现在我们来证明其逆命题.

定理 1.2 如 (1.5) 给出一个相容的分布函数集，则存在一个定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机过程 $\{X(t), t \in I\}$，使得给定的分布函数是此过程的联合分布函数，即 (1.4) 成立.

证明　用 R^I 表示在 I 上所有实值函数 $x(\cdot)$ 的集合. 形如

$$B = \{x(\cdot);\ (x(t_1), x(t_2), \cdots) \in D\},\ D \in \mathscr{B}_\infty \quad (1.6)$$

的集称为具有可数基底 $\{t_j\}$ 的柱集. 用 $\mathscr{B}_I$ 表示具有可数基底的所有柱集的类. 此类显然是 σ 代数，并且它与 R^I 中所有有限维矩形

$$\{x(\cdot);\ x(t_1) \in I_1, \cdots, x(t_n) \in I_n\}$$

所产生的 σ 代数相重合，这里 $I_1, \cdots, I_n$ 都是区间.

我们取 $\Omega = R^I, \mathscr{F} = \mathscr{B}_I$. 在 I 中给定序列 $T = \{t_j\}$，用 $\mathscr{B}_T$ 表所有集合

$$\{x(\cdot);\ (x(t_1), x(t_2), \cdots) \in D\},\ D \in \mathscr{B}_\infty$$

的类. 由定理 1.1 和它后面的注记可知在 $(\Omega, \mathscr{B}_T)$ 上存在唯一的概率测度 P_T 使得

$$P_I\{x(\cdot);\ x(t_1) < x_1, \cdots, x(t_n) < x_n\}$$

$$= F_{t_1, \cdots, t_n}(x_1, \cdots, x_n),\ n \geq 1. \quad (1.7)$$

令 $P(B) = P_T(B)$，如果 $B \in \mathscr{B}_T$. 为了使这个定义有意义，需要证明，如果 $B \in \mathscr{B}_{T'}$，则

$$P_T(B) = P_{T'}(B), \quad (1.8)$$

这里 $T'=\{t'_j\}$.

令 $S=T\cup T'$, 则 $T\subset S$, $\mathscr{B}_T\subset\mathscr{B}_S$. 由于在$T$中具有基底的一切有限维矩形上 $P_T=P_S$, 因而在 $\mathscr{B}_T$ 的任何集上 $P_T=P_S$. 于是 $P_T(B)=P_S(B)$. 类似地, $P_{T'}(B)=P_S(B)$, 从而推得 (1.8).

已经定义了概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$, 现在,我们取

$$X(t,x(\cdot))=x(t);$$

则立刻得到 (1.4).

我们把这个证明中构造的随机过程称为用柯尔莫哥洛夫构造法得到的随机过程.

定义 ν 维可数随机过程(或 ν 维随机列)是 ν 维随机变量列 $\{X_n\}$. ν 维随机变量族 $\{X(t),t\in I\}$ 称为 ν 维随机过程.

ν 维随机列 $\{X_n\}$ 产生函数

$$F_n(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)=P(X_1<\bar{x}_1,\cdots,X_n<\bar{x}_n), \quad (1.9)$$

这里 $\bar{x}_i\in R^\nu$, 同时 $a<b$ 意指对于 $1\leqslant j\leqslant\nu$, $a_j<b_j$, 其中 $a=(a_1,\cdots,a_\nu)$; $b=(b_1,\cdots,b_\nu)$. 令

$$\begin{aligned}&G_{(n-1)\nu+k}(x_1,\cdots,x_{(n-1)\nu+k})\\&\quad=F_n(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{n-1},\bar{x}_n^*)\ (1\leqslant k\leqslant\nu), \quad (1.10)\end{aligned}$$

这里

$$\bar{x}_i=(x_{(i-1)\nu+1},x_{(i-1)\nu+2},\cdots,x_{i\nu}),\ \text{如果}\ 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$\bar{x}_n^*=(x_{(n-1)\nu+1},\cdots,x_{(n-1)\nu+k},\infty,\cdots,\infty),$$

显然序列 $\{G_t(x_1,\cdots,x_t)\}$ 是相容的分布函数列.

定义 对于一切 $\bar{x}_i\in R^\nu$ 有定义的函数 $F_n(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ 称为关于 R^ν 的 n 维分布函数,如果:

(i) 用 $\bar{a}_k=(a_{k_1},\cdots,a_{k_\nu})$, $\bar{b}_k=(b_{k_1},\cdots,b_{k_\nu})$ 代替 a_k,b_k,(这里 $\bar{a}_k<\bar{b}_k$) 同时在 $\Delta_{l_k}f$ 的定义中用 $\bar{x}_j$ 代替 x_j,条件 (1.1) 仍成立;

(ii) 如果对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\bar{x}_i^{(k)} \uparrow \bar{x}_i$（即 $\bar{x}_i^{(k)}$ 的每个分量增至 $\bar{x}_i$ 的相应分量)，则

$$F_n(\bar{x}_1^{(k)}, \cdots, \bar{x}_n^{(k)}) \uparrow F_n(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n);$$

(iii) 如果某 $\bar{x}_i$ 的第 k 个分量减小到 $-\infty$，则 $F_n(\bar{x}_1, \cdots, x_n) \downarrow 0$；如果所有 $\bar{x}_i$ 的一切分量都增加到 ∞，则 $F_n(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \uparrow 1$.

令

$$F_n(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n^*) = \lim_{k \to \infty} F_n(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n^k), \quad (1.11)$$

这里 $\bar{x}_n^*$，$\bar{x}_n^k$ 的前 k 个分量相同，而 $\bar{x}_n^*$ 与 $\bar{x}_n^k$ 剩下的 $\nu-k$ 个分量分别等于 ∞ 与 k. 于是，由(1.10)定义的分布函数 $G_{(n-1)\nu+1}, \cdots, G_{n\nu}$ 的集合显然是相容的.

关于 R^ν 的分布列 $\{F_n\}$ 称为相容的，如果

$$\lim_{\bar{x}_n \uparrow \infty} F_n(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) = F_{n-1}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{n-1}),$$

这里 $\bar{x}_n \uparrow \infty$ 意指 $\bar{x}_n$ 的每个分量增至 ∞. 显然这种情况的充要条件是由 (1.10)，(1.11) 所定义的相应分布列 $G_i(x_1, \cdots, x_i)$ 是相容的.

如果我们把定理 1.1 用到后一序列，我们推出关于 R^ν 对任意相容的分布函数列存在一个可数的 ν 维随机过程 $\{X_n\}$，它们的分布函数为 F_n，即 (1.9) 成立. 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 可取为 $\Omega = R^{\nu,\infty} =$ 所有无穷序列 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots)$ 的空间，$\bar{x}_n \in R^\nu$，且 $\mathscr{F} = \mathscr{B}_{\nu,\infty}$ 是包含所有有限维矩形

$$\{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots);\ \bar{x}_1 \in \bar{I}_1, \bar{x}_2 \in \bar{I}_2, \cdots\}$$

的最小 σ 代数，这里 $\bar{I}_j$ 是 R^ν 中的区间.

分布函数 $\{F_{t_1, \cdots, t_n}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)\}$ 的集合(这里 $t_1 < \cdots < t_n$，$t_i \in I$，$n = 1, 2, \cdots$)称为相容的，如果

$$\lim_{\bar{x}_k \uparrow \infty} F_{t_1 \cdots t_n}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$$

$$= F_{t_1\cdots t_{k-1}t_{k+1}\cdots t_n}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_{k+1}, \cdots, \bar{x}_n).$$

定理 1.3 已知一个关于 R^ν 的分布函数的相容集 $\{F_{t_1\cdots t_n}(\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n);\ t_1 < \cdots < t_n, t_i \in I\}$，则存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 和在它上面定义的一个 ν 维随机过程 $X(t)(t \in I)$ 使得

$$P[X(t_1) < \bar{x}_1, \cdots, X(t_n) < \bar{x}_n] = F_{t_1\cdots t_n}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n). \quad (1.12)$$

函数族 $F_{t_1\cdots t_n}$ 称为过程 $X(t)$(关于 R^ν)的有限维联合分布函数.

这个命题的证明类似于定理 1.2 的证明. 如上所述，它是建立在把定理 1.1 扩张到关于 R^ν 的分布函数上. 这里 Ω 是把 I 映到 R^ν 内的一切函数所成的空间 $R^{\nu,I}$，同时 $\mathscr{F} = \mathscr{B}_{\nu,I}$ 是由 $D \in \mathscr{B}_{\nu,\infty}$ 的所有形如 (1.6) 之集合所组成. 在这个证明中，过程 $X(t)$ 的构造法称为柯尔莫哥洛夫构造法.

2. 可分过程与连续过程

定义 一个 ν 维随机过程 $\{X(t), t \in I\}$ 称为可分的，如果存在 I 的稠密可列子集 $T = \{t_j\}$ 与 Ω 的子集 N 且 $P(N) = 0$，使得对于 I 的任何开子集 J 与 R^ν 的任何闭子集 F，当 $\omega \notin N$ 时成立着

$\{X(t, \omega) \in F$ 对于一切 $t \in J\} = \{X(t_j, \omega) \in F$ 对于一切 $t_j \in J\}$. T 称为可分性集，或简称为可分集.

定义 在同一概率空间上的两个 ν 维随机过程 $\{X(t)\}$ 和 $\{X'(t)\}(t \in I)$，如果对一切 $t \in I$，有

$$P[X(t) \neq X'(t)] = 0,$$

则称为随机等价，并说 $\{X'(t)\}$ 是 $\{X(t)\}$ 的一个等价形.

定理 2.1 任何一个 ν 维过程必随机等价于一个可分的随机过程.

即使原过程的随机变量为实值，该可分过程的随机变量

实际上仍可取值$\pm\infty$.

关于这个定理的证明读者可参看杜博(Doob)[1]. 在本书的正文用不到定理 2.1.

由定理 2.1 得知，当从已给的分布函数集去构造随机过程时(如在柯尔莫哥洛夫构造法中)，总可认为这个过程是可分的.

令 $X(t)$ 是对于 $t\in I$ 的 ν 维随机过程，于是对每个 t，$X(t)$为一随机变量 $X(t,\omega)$. 函数 $t\to X(t,\omega)$ (ω 固定)称为过程的样本轨道. 如果对于 a.a.ω，关于一切 $t\in I$ 样本轨道均为连续函数，则称随机过程是连续的. 如果对于 a.a.ω，样本轨道均右(左)连续，则称随机过程右(左)连续.

容易看出右(或左)连续随机过程是可分的，而且 I 中的任何稠密序列是可分性集.

随机过程 $\{X(t),t\in I\}$ 称为依概率连续，如果对于任意 $s\in I$ 和 $\varepsilon>0$，

$$P[|X(t)-X(s)|>\varepsilon]\to 0,\ \text{如果}\ t\in I,t\to s.$$

下面的定理是属于柯尔莫哥洛夫的.

定理 2.2 设 $X(t)(t\in I)$ 为 ν 维随机过程. 如果有三个正常数 C,α,β 使得

$$E|X(t)-X(s)|^\beta\leqslant C|t-s|^{1+\alpha}, \tag{2.1}$$

则存在 $X(t)$ 的一个等价形为连续过程.

证明 为了简单起见取 $I=[0,1]$. 设 $0<\gamma<\alpha/\beta$ 并且 δ 为正数使得

$$(1-\delta)(\alpha+1-\beta\gamma)>1+\delta. \tag{2.2}$$

则由 (2.1)，

$$P\{|X(j2^{-n})-X(i2^{-n})|>[(j-i)2^{-n}]^\gamma,\ \text{对于某些}\ 0\leqslant i\leqslant j\leqslant 2^n,\ j-i\leqslant 2^{n\delta}\}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j<2^n \\ j-i\leqslant 2^{n\delta}}} [(j-i)2^{-n}]^{-\beta\gamma} E\,|X(j2^{-n}) - X(i2^{-n})|^{\beta}$$

$$\leqslant C_1 \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j<2^n \\ j-i\leqslant 2^{n\delta}}} [(j-i)2^{-n}]^{1+\alpha-\beta\gamma}$$

$$\leqslant C_2 2^{n[1+\delta-(1-\delta)(1+\alpha-\beta\gamma)]}$$

$$= C_2 2^{-n\mu}.$$

由(2.2)这里 $\mu > 0$，并且 C_1, C_2 均为正常数．由于 $\sum 2^{-n\mu} < \infty$，故由波雷尔-康特立引理推得，对于 a.a.ω，

$$|X(j2^{-n}) - X(i2^{-n})| \leqslant h((j-i)2^{-n}),$$

如果 $\quad 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2^n,\ j - i \leqslant 2^{n\delta},\ n \geqslant m(\omega)$， (2.3)

这里 $h(t) = t^{\gamma}$ 并且 $m(\omega)$ 是某一充分大的正整数．

设 t_1, t_2 是在区间 $(0, 1)$ 中使得 $t_1 < t_2$ 的任意两个有理数，$t = t_2 - t_1 < 2^{-m(1-\delta)}$，这里 $m = m(\omega)$ 与(2.3)中的相同．选取 $n \geqslant m$ 使得

$$2^{-(n+1)(1-\delta)} \leqslant t < 2^{-n(1-\delta)}.$$

我们可以把 t_1, t_2 表示为

$$t_1 = i2^{-n} - 2^{-p_1} - \cdots - 2^{-p_k},$$
$$t_2 = j2^{-n} + 2^{-q_1} + \cdots + 2^{-q_l},$$

这里 $n < p_1 < \cdots < p_k$，$n < q_1 < \cdots < q_l$． 那末 $t_1 \leqslant i2^{-n} \leqslant j2^{-n} \leqslant t_2$，同时 $j - i \leqslant t2^n < 2^{n\delta}$．

由 (2.3)，

$$|X(i2^{-n} - 2^{-p_1} - \cdots - 2^{-p_r}) - X(i2^{-n} - 2^{-p_1} - \cdots - 2^{-p_{r-1}})| \leqslant h(2^{-p_r}).$$

故

$$|X(t_1) - X(i2^{-n})| \leqslant \sum_{r=1}^{k} h(2^{-p_r}) \leqslant C_3 h(2^{-n}) \quad (C_3\ \text{常数}).$$

类似地，