有限单元法及其在冶金机械中的应用

中国金属学会　冶金继续工程教育丛书

冶金工业出版社

康贵信　邹家祥　编著

冶金继续工程教育丛书

有限单元法及其在冶金机械中的应用

康贵信　邹家祥　编著

冶金工业出版社
1 9 9 1

（京）新登字036号

内容提要

本书是“冶金继续工程教育丛书”之一。该书内容包括有限单元法的平面问题、轴对称问题、空间问题和薄板弯曲问题，在每章中都有冶金机械方面的应用实例。并附有平面问题和轴对称问题的FORTRAN语言源程序，对其作了详细说明及应用时输入数据的填写方式。

本书是冶金机械专业工程技术人员继续教育用书之一，可供从事冶金机械及其它机械工程技术人员使用，也可供大专院校师生、研究生参考。

冶金继续工程教育丛书
有限单元法及其在冶金机械中的应用
康贵信　邹家祥　编著

*

冶金工业出版社出版发行
（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）
新华书店总店科技发行所经销
冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092　1/32　印张12 1/8字数274千字
1991年10月第一版　1991年10月第一次印刷
印数00001～4 500册
ISBN 7-5024-0821-5
TH·48　定价8.00元

序

中国金属学会组织编写了《冶金继续工程教育丛书》，为大家办了一件好事。积极开展继续教育，对于提高冶金科技人员水平，促进冶金工业的发展具有重要意义。希望冶金战线各级领导重视这项工作，努力创造条件，为科技人员在职学习提供方便；同时也殷切希望广大冶金科技工作者坚持学习，不断吸收新知识，学习新技术，为实现四化、振兴中华做出更大贡献。

中国继续工程教育协会理事
冶金工业部副部长 徐大铨
一九八八年十二月

前　言

电子计算机的发展在机械设计的理论基础——力学学科领域里引起了深刻的变革。变革的标志之一，就是有限单元法已迅速推广应用于航空、造船、机械、建筑等工程部门，并取得了显著效果，已成为复杂结构设计必不可少的方法和工具。有限单元法所以在机械设计中得到广泛应用，因为它是一种迅速而准确地分析结构强度和刚度等问题的工程计算方法。它不仅可对已有的结构进行校核计算，而且能够对设计构件中的模型进行多种方案的分析比较并选择出最佳方案。

有限单元法是力学和现代计算技术相结合的产物，是计算机辅助设计的一个重要组成部分。有限单元法计算的特点，是把整个连续的弹性物体看作是由若干个简单的有限个单元组成的集合体，通过对各个单元的特性分析，以及考虑每个单元在整体结构中相互联系的特征，将离散化模型的数学表达式变成为代数方程式，用数值方法求解这些代数方程，就能成功地计算出物体上各处的应力和位移。

本书主要是为了使冶金机械工程师掌握一些弹性力学有限单元法的基本原理及其在冶金机械工程中的应用，书中对平面问题有限单元法进行了较详细地介绍，关于轴对称问题、空间问题和薄板弯曲问题也给予了相应的介绍。

学习有限单元法，需要具有弹性力学、矩阵代数、电子计算机算法语言和程序设计等基础知识。

为了适应工程技术人员在业务方面的提高，并考虑到一

般工程技术人员对材料力学、结构力学比较熟悉，本书是按着力学分析方法编写的。

为了便于应用，本书在附录中列出了FORTRAN语言编制的平面问题分析的源程序和轴对称问题分析的源程序，并做了简要的说明。

在各章中附有冶金机械方面的计算实例，对有限单元法在冶金机械方面的应用提供了范例，供从事冶金机械工作的技术人员和从事其它机械工程技术人员参考。

本书由康贵信、邹家祥编写，康贵信主编。全书由施东成主审，徐灏复审，他们对书稿提出了不少宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于编写水平所限，书中不妥之处，望读者提出批评指正。

编　者

一九八九年　三月

目　　录

1

概　述

1.1　有限单元法的应用与发展

电子计算机的应用，在力学学科领域中引起了变革，近三十年来发展起来的有限单元法就是一种有代表性的计算方法。

有限单元法的构思在数学界1943年已有发现，因当时没有计算机，所以没有得到发展。有限单元法在工程上的应用，于1956年由特纳（Turner）等人应用于飞机的结构分析。我国在50年代也开始了有限元理论的系统研究，并在解决实际工程问题上取得了进展。经过三十多年，有限单元法在各方面得到广泛应用，继续不断地向广阔领域探索前进。

由弹性力学平面问题扩展到空间问题和板壳问题。对拱坝、涡轮叶片、飞机、船体、冶金机械等复杂结构进行了应力分析。

由平衡问题扩展到稳定问题与动力问题。对结构在地震力与波浪力作用下的动力反应进行了分析。

由弹性问题扩展到弹塑性与粘弹性问题，土力学与岩石力学问题、疲劳与脆性断裂问题。

由结构计算问题扩展到结构优化设计问题。

由固体力学扩展到流体力学、渗流与固结理论、热传导与热应力问题、磁场问题（例如感应电动机的磁场分析）以及建筑声学与噪音问题。

由工程力学扩展到力学的其它领域（例如冰川与地质力学、血管与眼球力学等）。

目前，有限单元法已成为一门日益成熟的学科。

60年代初，有限单元法主要应用于计算简单的零部件，大的、复杂的问题尚不能解出。这个时期，许多人在单元类型上进行研究取得了成果，并编出了一批小程序。

60年代美国国家宇航局进行调查并提出报告，认为有限单元法潜力很大，应该组织力量搞大型有限元程序、编制出NASTRAN程序。国外到70年代有限元计算的特点是使用大型计算机、编制大程序，解大题。由计算线性问题发展为亦可解各种非线性问题。与NASTRAN程序出现的同时，德国ASKA公司也编出了大程序，美国ELAS公司与大学合作编出了计算地下结构、矿山等土建方面的计算程序。于是有限元的程序又向着结构化、模块化及层次化方面发展。

目前我国已使用的SAP（A STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAM）程序，是分析线性结构静力和动力问题的通用有限元程序。发展至今已有十多年的历史。它是美国加利福尼亚大学伯克利分校E.L.Wilson，K.J.Bathe，F.E.Perterson教授等领导下，从1970年开始发展起来的。目前，我国应用较多的SAP5是1974年完成的，并具有绘图功能。于1981年我国又引进了1979年开始使用的SAP6程序，它比SAP5功能更加完善，增加了子结构，前后处理比较完善等。现已在我国许多科研单位、高等院校和工厂等装机使用。同时引进了SAP7，它可以分析非线性结构静力和动力问题的程序。

我国有关高等院校、科学院所亦编制了一些计算程序，如KDXK、RRR程序、综合结构程序，并经过了实际算题的考验，解决了一批工程实际问题。

有限单元法在冶金机械方面的工程应用效果也是显著的，解决了一些实际课题，例如：滑块式万向接轴强度问题计算，轧机机架的刚度及强度问题的平面、空间的计算，VC轧辊、转炉托圈、连续铸钢机的钢包回转台、拉矫机构件等的位移场及应力场；轧机轧辊和连铸坯等的温度场及应力场等的计算，为设计和生产解决了问题，有的已达到了国内、外先进水平。

有限单元法用于力学分析可以解决许多问题。力学分析方法分为两类：解析法和数值法。由于数学及力学研究水平的限制，大量的工程实际问题难以用解析法求解，往往需要借助于数值法计算，有限单元法就是一种离散化数值计算方法。

由于选用基本未知量不同，有限单元法可以分为三类：

位移法——以节点位移为基本未知量；

力　法——以节点力为基本未知量；

混合法——以一部分节点位移和一部分节点力作为基本未知量。

由于位移法的基本未知量为位移分量（u，v）比力法的基本未知量应力分量（σ_x，σ_y，τ_{xy}）数量少，使用弹性力学的基本方程就可以求解。位移法得出的线性方程组和计算程序简单，故得到广泛应用。

有限单元法，从推导方法来看，也可以分为三类：

直接法——把各个单元的节点力与节点位移的关系式，按照一定的次序进行叠加，而求出整个物体的线性方程组的方法，称为直接法。这种方法的优点是比较直观，易于理解，

但只适用求解比较简单的问题。直接刚度法是一个典型的代表。

变分法——应用变分原理，把有限单元法归结为求泛函的极值问题。对于固体力学来说，就是应用最小能量原理求整个物体的线性方程组。变分原理的应用，使有限单元法建立在更加坚实的数学基础上，并扩大了其应用范围。

加权余数法——即迦辽金法。这种方法可以直接从基本微分方程式求出近似解，而不需要利用泛函的概念。因此，对于不存在泛函的工程领域都可采用，从而进一步扩大了有限单元法的应用范围。

1.2 有限单元法解题的基本思路

弹性力学的求解是建立在三个基本方程（平衡方程、几何方程和弹性方程）的基础上的。以平面问题为例，用位移法求解，即取位移分量 u，v 为基本未知量，其余六个未知量都用 u、v 来表示。要求解 u、v 就是应当构造出一组用 x、y 表示的函数形式，即 $u=f(x, y)$，$v=\varphi(x, y)$，将其代入以位移表示的平衡方程中能得到满足，如不满足，再修改直到满足为止，这一组设定的函数就是所求位移分量 u，v 的解（理论证明这样的解是唯一的），再利用几何方程及弹性方程就可求得三个应力 σ_x，σ_y 和 τ_{xy}。

上述方法的关键和基本困难在于，必须通过各种办法构造出一组这样的表达式，它即满足弹性力学的基本方程，又满足边界条件。这就是说必须使最后求出的解——位移表达式和应力表达式，既反映构件内部各点应力和位移连续变化的规律；而在到达构件边界的轮廓线处又能使求出的应力和位移数值与边界上已知条件一致。反过来说，正是特定的边

界条件决定了构件内应力和位移连续变化的特殊规律，即决定了解的特定函数形式。

下面以受均布力简支梁（图1-1）为例来说明位移函数的选取问题，应用弹性力学求得的解析解为：

1）应力表达式

$$\sigma_x=\frac{q}{2I}\left[\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)y+\left(\frac{2}{3}y^2-\frac{h^2}{10}\right)y\right] \tag{1-1}$$

$$\sigma_y=-\frac{q}{2I}\left(\frac{y^2}{3}-\frac{h^2}{4}y+\frac{h^3}{12}\right) \tag{1-2}$$

$$\tau_{xy}=-\frac{qx}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right) \tag{1-3}$$

2）位移表达式

$$u=\frac{q}{2EI}\left[\left(\frac{l^2}{4}x-\frac{x^3}{3}\right)y+x\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{h^2}{10}y\right)\right.$$
$$\left.+\mu x\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{h^2}{4}y+\frac{h^3}{12}\right)\right] \tag{1-4}$$

$$v=-\frac{q}{2EI}\left\{\frac{y^4}{12}-\frac{h^2}{8}y^2+\frac{h^3}{12}y\right.$$
$$\left.+\mu\left[\left(\frac{h^2}{4}-x^2\right)\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{6}-\frac{h^2}{20}y^2\right]\right\}$$
$$-\frac{q}{2EI}\left[\frac{l^2}{8}x^2-\frac{x^4}{12}-\frac{h^2}{20}x^2+\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\frac{h^2}{4}x^2\right]$$
$$+\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}\left[1+\frac{12}{5}\ \frac{h^2}{l^2}\left(\frac{4}{5}+\frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{1-5}$$

式中 u——x方向位移；

v——y方向位移；

I——惯性矩；

E——弹性模量；

μ——波桑比；

其余符号见图1-1。

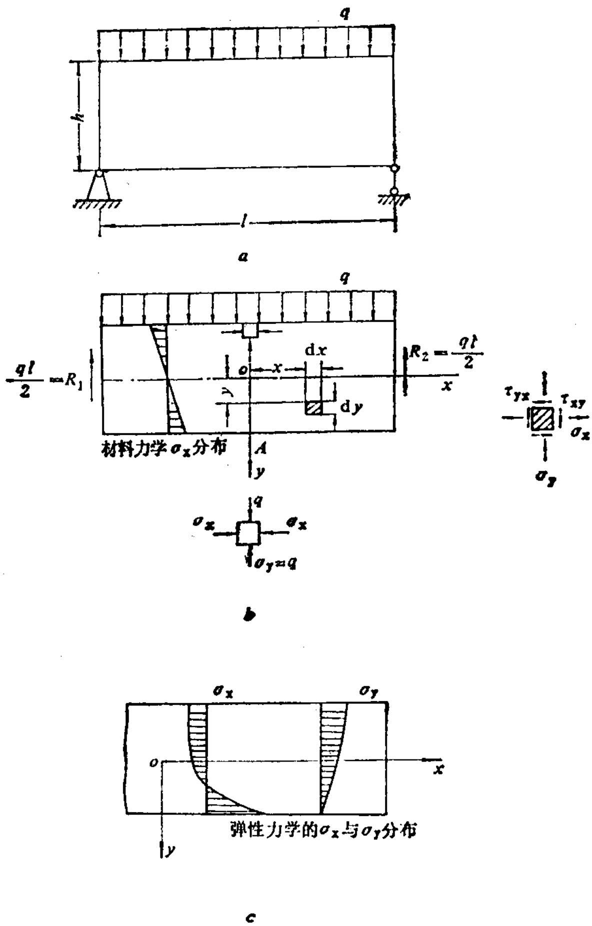

图 1-1 受均布力简支梁

a—受均布力的简支梁；*b*—应力计算图；*c*—弹性力学法的应力分布图