
桥梁与结构理论研究

李国豪 著



上海科学技术文献出版社

U 44/
1

桥梁与结构理论研究

李国豪 著

上海科学技术文献出版社

请于下列日期前将书还回

成1105—1

李国豪 著

新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

1983年3月第1版 1983年3月第1次印刷

印数: 1—4, 100

书号: 15192·231 定价: 1.94 元

《科技新书目》 38-227

11441

237007

序 言

作者过去联系工程实际在桥梁及其它工程结构方面做了一些理论分析工作。由于工程技术和结构理论、尤其是电子计算技术的发展,以往所做的工作不少已经过时。但是有一部分,或在原理方面,或在方法方面,或在分析结果方面,对工程设计或教学、科学研究,似多少尚有参考价值。同志们希望把这些分散发表在国内外的论文汇编成册,以供查阅。以上便是出版这本论文选的原由。

着手编辑时发现,简单地挑选一些论文进行重印是不够的。为读者着想,需要把一些在国外发表的论文翻译或摘译成中文;即使在国内发表的,也有不少需要重写,使同类论文前后呼应,并避免彼此交叉重复,有的则需要修正和补充,工作量相当大。由于时间、精力的限制,本人尽管勉力从事,也难于短期完成此项工作,幸赖各方面的热心帮助,得以迅速顺利脱稿。

本书选编了二十篇论文。大部分是关于桥梁上部结构的分析,主要涉及各类桥梁结构的内力、稳定和振动问题。少数几篇属于其它结构。为了便于读者查阅参考,论文的编排次序主要按结构类型,兼顾发表时间的先后。对有些问题笔者当时作了一些研究之后未继续探讨,因此有关论文未补充新的参考文献。论文中难免有疏忽和错误之处,敬希读者批评指正。

同济大学俞载道教授和赵其昌副教授,在繁忙的工作中热心分担论文的德文中译任务;史家钧、冯奇、黄东洲等同志,在暑假中大力协助核稿、计算和缮稿,陈国强、姜海生和桥梁教研室的几位同志也积极帮忙誊清和整理图、稿;黄国新同志为本书的出版帮忙组织安排。对以上诸位,在此表示衷心感谢。上海科学技术文献出版社大力支持,使本书得以早日出版,在此一并致谢。

李国豪

一九八三年春

目 录

一、悬索桥按二阶理论的实用计算	(1)
二、悬索桥的竖向振动	(13)
三、拱桥振动分析(一)	(23)
四、拱桥振动分析(二)	(32)
五、拱桥荷载横向分布理论分析	(43)
六、关于梁桥荷载横向分布计算	(69)
七、弹性平衡分支的充足辨别准则	(79)
八、各向受力的四边简支板屈曲分析	(92)
九、斜交各向异性板弯曲理论及其对于斜桥的应用	(103)
十、直线箱梁挠曲扭转分析	(113)
十一、曲线箱梁挠曲扭转分析	(129)
十二、桁梁桥挠曲扭转理论	(139)
十三、桁梁桥侧倾稳定分析	(148)
十四、桁梁桥挠曲扭转振动分析	(157)
十五、拱-桁梁组合体系空间计算有限元法	(170)
十六、斜张桥动力分析有限元法	(190)
十七、承受冲击压力的压杆分析	(210)
十八、线性衰减冲击荷载作用下的压杆分析	(221)
十九、浅埋地下梁自振频率研究	(230)
二十、关于桩的水平位移、内力和承载力的分析	(236)

悬索桥按二阶理论的实用计算*

一、基本方程

悬索桥,特别是大跨度悬索桥,由于它的刚度比较小,荷载产生的竖向挠度比较大,同时由于缆索的拉力很大,所以在设计计算中需要应用考虑竖向挠度影响的二阶理论,又称变位理论。否则会得出远远大于实际的内力和挠度本身的计算值,如结构力学中的线性理论或一阶理论。

这里只考虑缆索和加劲梁的竖向挠度这个主要因素的影响,忽略塔的变形、缆索水平位移和悬吊加劲梁的吊索倾斜变位及伸长等次要因素^[14]。这样,缆索拉力的水平分量 $H = H_g + H_p$ 在全桥相等,其中 H_g 由恒载 g 所产生, H_p 是由活载 p 和温度变化产生的 H 的增值。恒载 g 一般完全由缆索承担,这时缆索的垂度 y 与一般在计算中取用的二次抛物线的差别很小,极少超过 0.5%。

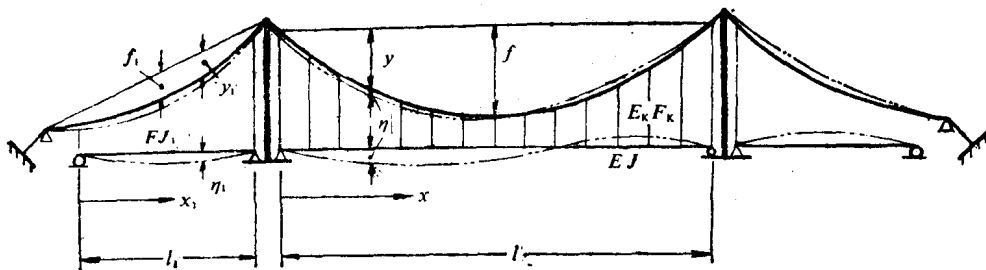


图 1

按图 1

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \quad y_1 = \frac{4f_1}{l_1^2} x_1(l_1-x_1) \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = -y'' = \frac{8f}{l^2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\rho_1} = -y_1'' = \frac{8f_1}{l_1^2}$$

$$H_g = \rho g = \rho_1 g_1 \quad (2)$$

在恒载 g 和活载 p 共同作用下,缆索的水平拉力增加 H_p ,同时它和加劲梁产生竖向挠度 η 。弹性平衡方程为

$$(EJ\eta'')'' - (H_g + H_p)(y + \eta)'' = g + p$$

从其中减去式(2),则得到第一个基本方程,例如对于中跨:

$$(EJ\eta'')'' - H\eta'' = p - \alpha H_p \quad (3)$$

其中

$$H = H_g + H_p \quad (4)$$

* 本文是作者 1940 年为分析、计算一座当时计划修建的公路铁路两用大跨度悬索桥而写成的博士论文,主要内容曾发表于 1941 年德国杂志 Der Stahlbau 14, S. 65。这里是译文的摘要。

式(3)左边第2项的影响随着 H 和 η 的增大而增大, 因而一阶理论把它忽略造成的误差也增大。由于 H_p 和 η 都是 p 的函数, 所以考虑 $-H\eta''$ 这个影响的二阶理论是非线性的。

由荷载 p 和温度变化产生的缆索水平拉力增值 H_p , 用缆索两个锚固端之间的水平距离保持不变这个条件来确定:

$$\Delta = H_p \int \frac{dx}{E_k F_k \cos^3 \varphi} \pm \alpha_t t \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi} - \int \frac{dy}{dx} d\eta = 0 \quad (5)$$

式中第1、2、3项分别表示由缆索应力 $H_p/F_k \cos \varphi$ 、温度升降 $\pm t$ 和挠度 η 产生的 Δ 值。 E_k 和 F_k 为缆索的弹性模量和截面积, α_t 为它的温度线膨胀系数, φ 为它的倾角, 即 $\tan \varphi = dy/dx$ 。

第3项可通过分部积分改写成另一形式

$$\int_0^l y' d\eta = [y'\eta]_0^l - \int_0^l y'' \eta dx$$

式中右边方括弧表示的积分边界值等于零。采用下列符号

$$L = \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi}, \quad L_t = \int \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \quad (6)$$

$$F_\eta = \int_0^l \eta dx = \text{挠度面积}$$

则式(5)可写成如下的第二个基本方程

$$H_p \frac{L}{E_k F_k} \pm \alpha_t t L_t - \Sigma \kappa F_\eta = 0 \quad (7)$$

式(6)中 L 、 L_t 的积分包括缆索的全长, 式(7)中第3项的 Σ 表示桥的中跨和边跨的和。

式(3)和式(7)为用以求 η 和 H_p 的两个基本方程。

二、实用计算方法的基本思想

由于式(3)中含有非线性项 $H\eta''$, 并且在两个基本方程中 η 和 H_p 都相关联, 所以既不适用迭加原理, 也难于直接求解。许多作者演引的计算方法都试图减小这个困难。

加劲梁的弹性挠曲微分方程式(3), 可以设想为一根不悬吊于缆索的自由梁的挠曲, 它承受着竖荷载 p 和 $-\kappa H_p$, 并且有一个轴向拉力 H 。当梁发生挠度 η 时, H 产生弯矩 $-H\eta$ 。暂且设想这个轴向拉力 H 为一个与 H_p 无关的固定值, 则式(3)变为线性方程, 对荷载 p 和

$-\kappa H_p$ 又适用迭加原理, 从而可以把两个荷载分别处理, 如图2所示。

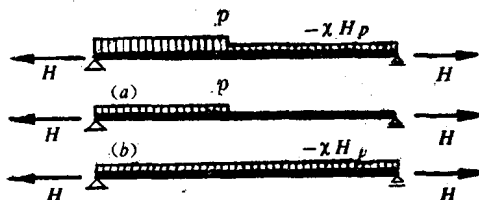


图 2

$$\eta = \eta(p) - \eta(\kappa H_p)$$

$$M = M(p) - M(\kappa H_p) \quad (8)$$

$$Q = Q(p) - Q(\kappa H_p)$$

这样, 加劲梁和缆索的挠度 η 和内力 M 、 Q 、 H_p 都可以仿照结构力学中一阶理论的过程来计算。一阶理论与二阶理论的差别仅仅在于, 设想的梁的轴向拉力 H 在前者等于零, 在后者不等于零。不言而喻, 在计算加劲梁的应力时不应计入这个设想的轴向拉力 H 。

对于多跨连续的加劲梁, 例如图 3, 增加由 p 和 $-\kappa H_p$ 产生的中间支承弯矩 M_1 和 M_2 , 它们可分别仿照一般连续梁的计算方法用三弯矩方程 (对图 3 自然只有二弯矩方程) 来求出。挠度和内力 (包括支承弯矩) 仍可按式 (8) 表示。其中式右边的各项分别由简支梁的有关值 η_0 、 M_0 、 Q_0 和支承弯矩产生的 η_b 、 M_b 、 Q_b 所组成, 例如

$$\begin{aligned}\eta(p) &= \eta_0(p) + \eta_b(p) \\ \eta(\kappa H_p) &= \eta_0(\kappa H_p) + \eta_b(\kappa H_p)\end{aligned}\quad (9)$$

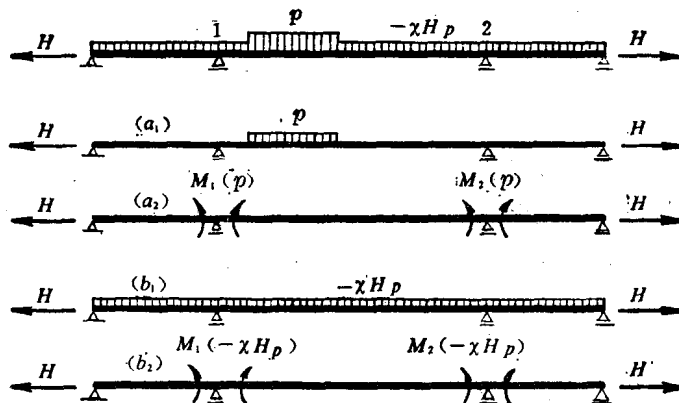


图 3

式 (8)、(9) 既适用于一定荷载情况 p , 如图 2 和 3 所示, 自然也适用于求 η 、 M 、 Q 的影响线。例如加劲梁截面 m 的弯矩 M_m , 它的影响线 δ_{M_m} 如同按一阶理论的做法由两部分组成:

$$\delta_{M_m} = \delta_{M_m}(P) - M_m(\kappa) \delta(H_p) \quad (10)$$

其中 $\delta_{M_m}(P)$ 表示具有轴向拉力 H 的自由梁 (简支或连续) 的 M_m 影响线, $M_m(\kappa)$ 为均布荷载 κ 产生的 M_m 值, δ_{H_p} 为 H_p 的影响线。关于 H_p 和 δ_{H_p} 的求法见后。

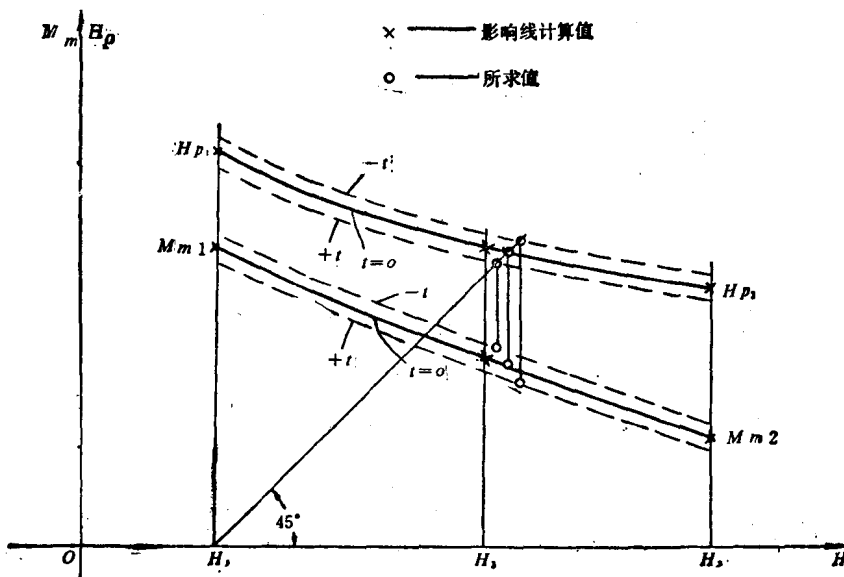


图 4

这里求得的影响线是基于梁的轴向拉力等于一定 H 值的假定, 因此它也只适用于这个 H 值, 而不是任何 H 值的情况。所以它可以称为“奇异”影响线。按一阶理论求出的影响线是 $H=0$ 的奇异影响线。

在实际计算中不可能事先选取一个 H 值, 它正好等于 $(H_g + H_p)$, 因为 H_p 尚待按式 (7) 来确定, 而求式中的 F_p 时就得先选定 H 。对于一个给定的荷载情况 p , 可以用试算的方法反复几次来达到最后选取的 H 等于 $(H_g + H_p)$ 。但是, 如果用奇异影响线来求挠度和内力则不适于应用这个反复试算的办法, 因为这样做太费时。一个解决的办法是, 选取两个 H 值 $H_1 = H_g$ 和 $H_2 = H_g + \max H_p$ ($\max H_p \approx \rho p$), 或者必要时加用一个中值 $H_3 = H_g + \frac{1}{2} \max H_p$, 分别用以求出有关的 η 、 M 、 Q 和 H_p 的影响线各两根或者各三根。对于一个确定出的最不利荷载的情况, 用这些影响线分别求出 H_p 和例如 M_m 的值各两个或者三个。温度的影响 $H_p(\pm t)$ 和 $M_m(\pm t) = -M_m(x) \cdot H_p(\pm t)$ 也分别按 H_1 、 H_2 或者和 H_3 计算出来。然后用内插法求出正确的 H_p 和 M_m , 如图 4 所示。若只取用 H_1 和 H_2 , 则可直线内插。

三、具体计算公式

这里给出加劲梁抗弯刚度在各桥孔分别为常值的情形为计算梁的变形和内力及缆索的水平拉力需用的计算公式。对于加劲梁抗弯刚度在桥孔内也变化的情况, 论文中演引了一个用 $H=0$ 的梁的挠度和内力的级数表达法。今天用电子计算机已容易按有限元法对 $H \neq 0$ 的变截面梁求解, 这里就不再介绍它。

1. 梁的弯矩、剪力、挠度、挠度面积和梁端挠曲角

符号

$$\beta = \sqrt{\frac{H}{EJ}}, \quad \alpha = \frac{l}{2}\beta, \quad k = 1 - \frac{\tanh \alpha}{\alpha} \quad (11)$$

A^0 、 B^0 、 M^0 、 F_M^0 = 无拉力 H 的简支梁左、右端支承反力, 弯矩和弯矩面积;

$\check{A}$ 、 $\check{B}$ = H 倍的梁左端和右端的挠曲角。 $x' = l - x$, l = 梁跨。

(I) 集中荷载 P 位于 $x = a$, $x' = b$

$$P \text{ 左边} \quad M_s = P \frac{\text{sh } b\beta}{\beta \text{sh } 2\alpha} \text{sh } \beta x; \quad (1a)$$

$$P \text{ 右边} \quad M_s = P \frac{\text{sh } a\beta}{\beta \text{sh } 2\alpha} \text{sh } \beta x'; \quad (b)$$

$$P \text{ 左边} \quad Q_s = P \frac{\text{sh } b\beta}{\text{sh } 2\alpha} \text{ch } \beta x; \quad (c)$$

$$P \text{ 右边} \quad Q_s = -P \frac{\text{sh } a\beta}{\text{sh } 2\alpha} \text{ch } \beta x'; \quad (d)$$

$$\eta_s = \frac{M_s^0 - M_s}{H}; \quad F_M^0 = P \frac{ab}{2}; \quad (e)$$

$$HF_{\eta} = F_M^* - P \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(l/2 - a)\beta}{\operatorname{ch} \alpha} \right); \quad (f)$$

$$\check{A} = A^0 - P \frac{\operatorname{sh} b\beta}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (g)$$

$$\check{B} = B^0 - P \frac{\operatorname{sh} a\beta}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (h)$$

$P=1$ 以上各式表示影响线, 即式(10)右边第一项。

(II) 均布荷载 p 位于 $x=0 \rightarrow a$, $l-a=b$ 。

$$\text{荷载区} \quad M_x = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \beta x' + \operatorname{ch} b\beta \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{sh} 2\alpha} \right); \quad (\text{IIa})$$

无荷载区

$$M_x = \frac{p}{\beta^2} \frac{\operatorname{ch} a\beta - 1}{\operatorname{sh} 2\alpha} \operatorname{sh} \beta x'; \quad (b)$$

$$Q_a = -\frac{p}{\beta} \frac{\operatorname{ch} a\beta - 1}{\operatorname{sh} 2\alpha} \operatorname{ch} b\beta; \quad (c)$$

$$\eta_x = \frac{M_x^0 - M_x}{H}; \quad F_M^* = \frac{pa^2}{12} (3l - 2a); \quad (d)$$

$$HF_{\eta} = F_M^* - \frac{2p}{\beta^2} \left(\frac{a}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2}\beta \operatorname{ch} \frac{b}{2}\beta}{\beta \operatorname{ch} \alpha} \right); \quad (e)$$

$$\check{A} = A^0 - \frac{p}{\beta} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch} b\beta}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad \check{B} = B^0 - \frac{p}{\beta} \frac{\operatorname{ch} a\beta - 1}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (f)$$

(III) 均布荷载 p 位于 $x=a \rightarrow (a+c)$

$$\text{荷载区} \quad M_x = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} a\beta \operatorname{sh} \beta x' + \operatorname{ch} b\beta \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{sh} 2\alpha} \right); \quad (\text{IIIa})$$

$$Q_a = \frac{2p}{\beta} \frac{\operatorname{sh} m\beta \operatorname{sh} \frac{c}{2}\beta}{\operatorname{sh} 2\alpha} \operatorname{ch} \beta a; \quad \begin{matrix} m = a + c/2 \\ n = b + c/2 \end{matrix} \quad (b)$$

$$\eta_x = \frac{M_x^0 - M_x}{H}; \quad F_M^* = \frac{1}{24} pc(12mn - c^2); \quad (c)$$

$$HF_{\eta} = F_M^* - \frac{2p}{\beta^2} \left(\frac{c}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{c}{2}\beta \operatorname{ch} \frac{m-n}{2}\beta}{\beta \operatorname{ch} \alpha} \right); \quad (d)$$

$$\check{A} = A^0 - \frac{2p}{\beta^2} \frac{\operatorname{sh} n\beta \operatorname{sh} \frac{c}{2}\beta}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (e)$$

$$\check{B} = B^0 - \frac{2p}{\beta} \frac{\operatorname{sh} m\beta \operatorname{sh} \frac{c}{2}\beta}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (f)$$

(IV) 均布荷载 p 位于 $x=0 \rightarrow a$ 和 $x'=0 \rightarrow a'$

$$\text{无荷载区} \quad M_x = \frac{p}{\beta^2} \frac{(\operatorname{ch} a\beta - 1) \operatorname{sh} \beta x' + (\operatorname{ch} a'\beta - 1) \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (\text{IVa})$$

$$Q_a = \frac{p}{\beta} \frac{(\operatorname{ch} a'\beta - 1) \operatorname{ch} a\beta - (\operatorname{ch} a\beta - 1) \operatorname{ch} b\beta}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (b)$$

$$\eta_x = \frac{M_x^0 - M_x}{H}; \quad F_M = \frac{p}{12} [a^2(3l-2a) + a''(3l-2a')]; \quad (c)$$

$$HF_\eta = F_M - \frac{2p}{\beta^2} \left(\frac{a+a'}{2} - \frac{\text{sh } \frac{a}{2}\beta \text{ch } \frac{b}{2}\beta + \text{sh } \frac{a'}{2}\beta \text{ch } \frac{b'}{2}\beta}{\beta \text{ch } \alpha} \right); \quad (d)$$

$$\check{A} = A^0 - \frac{p}{\beta} \left(\tanh \alpha - \frac{\text{ch } b\beta - \text{ch } a'\beta}{\text{sh } 2\alpha} \right); \quad \begin{matrix} b=l-a \\ b'=l-a' \end{matrix} \quad (e)$$

$$\check{B} = B^0 - \frac{p}{\beta} \left(\tanh \alpha - \frac{\text{ch } b'\beta - \text{ch } a\beta}{\text{sh } 2\alpha} \right); \quad (f)$$

(V) 全跨均布荷载 p

$$M_x = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\text{sh } \beta x + \text{sh } \beta x'}{\text{sh } 2\alpha} \right) \quad \text{或} \quad = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\text{ch } (l/2-x)\beta}{\text{ch } \alpha} \right); \quad (Va)$$

$$Q_x = \frac{p}{\beta} \frac{\text{ch } \beta x' - \text{ch } \beta x}{\text{sh } 2\alpha} = \frac{p}{\beta} \frac{\text{sh } (l/2-x)\beta}{\text{ch } \alpha}; \quad (b)$$

$$\eta_x = \frac{M_x^0 - M_x}{H} \quad (c)$$

$$HF_\eta = \frac{pl^3}{12} - \frac{plk}{\beta^2}; \quad (d)$$

$$\check{A} = \check{B} = \frac{pl}{2} \cdot k \quad (f)$$

以 $-xH_p$ 代入 p 则得 $y''H_p$ 荷载的相关公式。

(VI) 支承弯矩 $M=1$ 。左端 A , 右端 B (参阅图 3)

$$M_B=1 \quad \check{B}_0 = \frac{\beta_1}{\tanh 2\alpha_1} - 1/l_1; \quad (VIa)$$

$$M_A=M_B=1 \quad \check{A}_0 = \check{B}_0 = \beta \tanh \alpha; \quad (b)$$

$$M_A=-M_B=1 \quad \check{A}_0 = -\check{B}_0 = \frac{\beta}{\tanh \alpha} - \frac{2}{l}; \quad (c)$$

(VII) 支承弯矩 $M_B=M_s$

$$M_x = M_s \frac{\text{sh } \beta_1 x}{\text{sh } 2\alpha_1}; \quad (VIIa)$$

$$Q_x = M_s \frac{\text{ch } \beta_1 x}{\text{sh } 2\alpha_1}; \quad (b)$$

$$\eta_x = \frac{M_s}{H} \left(\frac{x}{l_1} - \frac{\text{sh } \beta_1 x}{\text{sh } 2\alpha_1} \right); \quad (c)$$

(VIII) 支承弯矩 $M_A=M_1$, $M_B=M_2$ (参阅图 3)

$$M_x = \frac{M_1 \text{sh } \beta x' + M_2 \text{sh } \beta x}{\text{sh } 2\alpha}; \quad (VIIIa)$$

$$Q_x = \frac{M_2 \text{ch } \beta x - M_1 \text{ch } \beta x'}{\text{sh } 2\alpha}; \quad (b)$$

$$\eta_x = \frac{1}{H} \left(\frac{M_1 x' - M_2 x}{l} - M_x \right); \quad (c)$$

(IX) 连续梁 l_1+l+l_1 受满布荷载: 中孔 p , 边孔 p_1

$$M_1=M_2 = -\frac{pl}{2} \frac{K'}{\varphi} \quad K' \text{ 见式(16)}; \quad (IXa)$$

中 孔

$$M_x = \frac{p}{\beta} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{l}{2} - x \right) \beta}{\operatorname{ch} \alpha} \right) + M_1 \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{l}{2} - x \right) \beta}{\operatorname{ch} \alpha} \quad \text{或}$$

$$= \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \beta x + \operatorname{sh} \beta x'}{\operatorname{sh} 2\alpha} \right) + M_1 \frac{\operatorname{sh} \beta x + \operatorname{sh} \beta x'}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (\text{b})$$

$$Q_x = \left(\frac{p}{\beta^2} - M_1 \right) \frac{\beta (\operatorname{ch} \beta x - \operatorname{ch} \beta x')}{\operatorname{sh} 2\alpha}; \quad (\text{c})$$

$$\eta_x = \frac{M_x^0 + M_1 - M_x}{H}; \quad M_x^0 = \frac{p x x'}{2}; \quad (\text{d})$$

左 边 孔

$$M_{x1} = \frac{p_1}{\beta_1^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} (l/2 - x) \beta_1}{\operatorname{ch} \alpha_1} \right) + M_1 \frac{\operatorname{sh} \beta_1 x}{\operatorname{sh} 2\alpha_1} \quad \text{或}$$

$$= \frac{p_1}{\beta_1^2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \beta_1 x + \operatorname{sh} \beta_1 x'}{\operatorname{sh} 2\alpha_1} \right) + M_1 \frac{\operatorname{sh} \beta_1 x}{\operatorname{sh} 2\alpha_1} \quad (\text{e})$$

$$Q_{x1} = \frac{p_1}{\beta_1} \frac{\operatorname{ch} \beta_1 x' - \operatorname{ch} \beta_1 x}{\operatorname{sh} 2\alpha_1} + M_1 \frac{\beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 x}{\operatorname{sh} 2\alpha_1} \quad (\text{f})$$

$$\eta_{x1} = \frac{M_{x1}^0 + M_1 \frac{x}{l_1} - M_{x1}}{H}; \quad M_{x1}^0 = \frac{p_1 x x'}{2}; \quad (\text{g})$$

令 $p = -\kappa H_p$, $p_1 = -\kappa_1 H_p$, 则得 $y'' H_p$ 荷载的有关公式。

2. 缆索水平拉力 H_p

H_p 按式 (7), 其中 $F_n = F_n(p) - F_n(\kappa H_p)$ 。由此得出下列计算公式。

(I) 单孔悬索桥

$$H_p = \frac{H F_n(p) \mp \beta^2 \alpha_i t E J \rho L_i}{\frac{2}{3} f l - 8 \frac{f}{l} \frac{k}{\beta^2} + \beta^2 \frac{E J}{E_k F_k} \rho L} \quad (\text{12})$$

其中 $\left(\rho = -\frac{1}{y''} \right)$

(II) 三孔对称悬索桥, 三孔简支加劲梁

$$H_p = \frac{\sum \lambda H F_n(p) \mp \beta^2 \alpha_i t E J \rho L_i}{\frac{2}{3} f l + \frac{4}{3} f l_1 \lambda_1 - 8 \frac{f}{l} \frac{K'_0}{\beta^2} + \beta^2 \frac{E J}{E_k F_k} \rho L}; \quad (\text{13})$$

$$K'_0 = k + \lambda_1^2 \frac{2 l_1 J_1}{l J} k_1; \quad (\text{14})$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad k, k_1 \text{ 按式 (11);}$$

(III) 三孔对称悬索, 三孔连续加劲梁

$$H_p = \frac{\sum \lambda H F_n(p) - \frac{l}{2} \frac{K}{\varphi} (\check{G}_1 + \check{G}_2) \mp \beta^2 \alpha_i t E J \rho L_i}{\frac{2}{3} f l + \frac{4}{3} \lambda_1 f l_1 - 8 \frac{f}{l} \frac{K'_0}{\beta^2} - 4 f \frac{K K'}{\varphi} + \beta^2 \frac{E J}{E_k F_k} \rho L} \quad (\text{15})$$

$$K = k + \frac{l_1}{l} k_1; \quad K' = k + \lambda_1 \frac{l_1}{l} k_1 \quad (\text{16})$$

式中分子中的第一项 $F_\eta(p)$ 按简支梁取值, 第二项为 p 荷载的支承弯矩产生的挠度面积 H 倍值 $HF_\eta(M_p)$, 其中[参阅式(VIa)和(b)]

$$\varphi = A_b + B_c = \beta \tanh \alpha + \frac{\beta_1}{\tanh 2\alpha_1} - \frac{1}{l_1} \quad (17)$$

$$\check{\mathcal{O}}_1 + \check{\mathcal{O}}_2 = (\check{B}_{1l} + \check{A}) + (\check{B} + \check{A}_{1r}) \quad (18)$$

$\check{B}_{1l}$ 为左边孔右端挠曲角, $\check{A}_{1r}$ 为右边孔的左端挠曲角, $\check{A}$ 、 $\check{B}$ 为中孔左右端挠曲角, 都是 p 荷载在简支梁上产生的值, 见前节(I)至(V)荷载情况。

(IV) H_p 的影响线

在以上 H_p 公式中令 $t=0$, 并令

$$\begin{aligned} \sum \lambda H F_\eta(p) &= \lambda F_\eta(p_x=1) = \lambda \eta_x(p=1) - \frac{l}{2} \frac{K}{\varphi} (\check{\mathcal{O}}_1 + \check{\mathcal{O}}_2) \\ &= H F_\eta[M_p(p_x=1)] = H \eta_x[M_p(p=1)] \end{aligned} \quad (19)$$

则得到 H_p 影响线 $\delta_x(H_p)$ 的公式。上式中 $p=1$ 表示各孔均布满载 $p=1$ 。其次, 根据变形互等定理 $\eta_{ik} = \eta_{ki}$:

$$\begin{aligned} F_\eta(p_x) &= \int_0^l p_x \eta_{xz} d\xi \\ \eta_x(p) &= \int_0^l \eta_{xz} (p d\xi) \end{aligned} \quad (20)$$

故

$$F_\eta(p_x=1) = \eta_x(p=1)$$

所有公式中的 L 和 L_t 按式(6), 可参照图 5 计算如下:

$$\begin{aligned} L &= l \left(1 + 8 \frac{f^2}{l^2} + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \gamma_0 \right) + s_1 \sec^2 \gamma_1 + s_2 \sec^2 \gamma_2 \\ L_t &= l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} + \operatorname{tg}^2 \gamma_0 \right) + s_1 \sec \gamma_1 + s_2 \sec \gamma_2 \end{aligned} \quad (21)$$

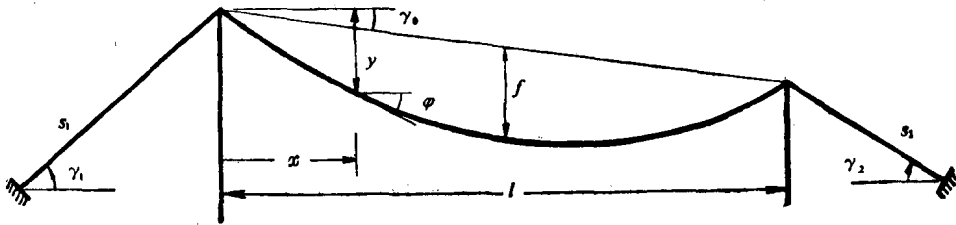


图 5

四、数 例

一座曾经计划修建的公路、铁路两用的悬索桥, 它的体系尺寸如图 6 所示。一边悬索和加劲梁承受的荷载和截面刚度数据如下

$$\begin{aligned} g_1 &= g = 26.0 \text{ t/m}, \quad p = 15.0 \text{ t/m} \\ F_k &= 0.67 \text{ m}^2, \quad E_k = 1550 \text{ t/cm}^2 \\ (a) \quad J_1 &= J = 11.0 \text{ m}^4, \quad E = 2100 \text{ t/cm}^2 \\ (b) \quad J_m &= \frac{1}{l + 2l_1} \int_0^l J(x) dx = 11.0 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

加劲梁或为三跨简支或为三跨连续,它的截面惯矩或(a)沿全桥为常数值 J ,或(b)参考从情况(a)得出的弯矩包络图作变化[简支梁和连续梁的 $J(x)$ 不同],但它沿全桥长的平均值 J_m 同前面的 J 值。

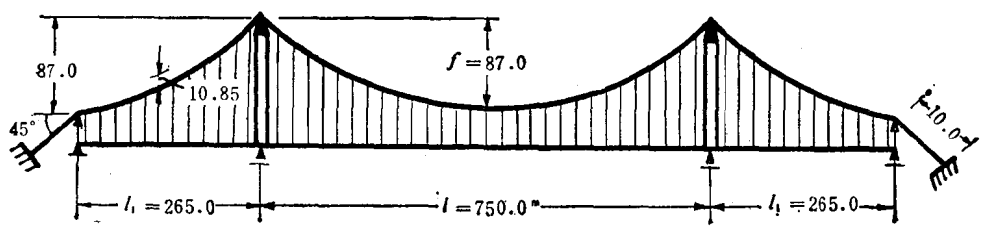


图 6

(1-a)三跨简支常截面(J)加劲梁

图 7 给出缆索水平拉力 H_p 和在主孔四分点的加劲梁弯矩 M_v 的影响线。可以看出,按 I 阶理论与按 II 阶理论计算结果的差别很大,尤其是在弯矩。但是按 II 阶理论取 H 值上下限的计算结果甚为接近。

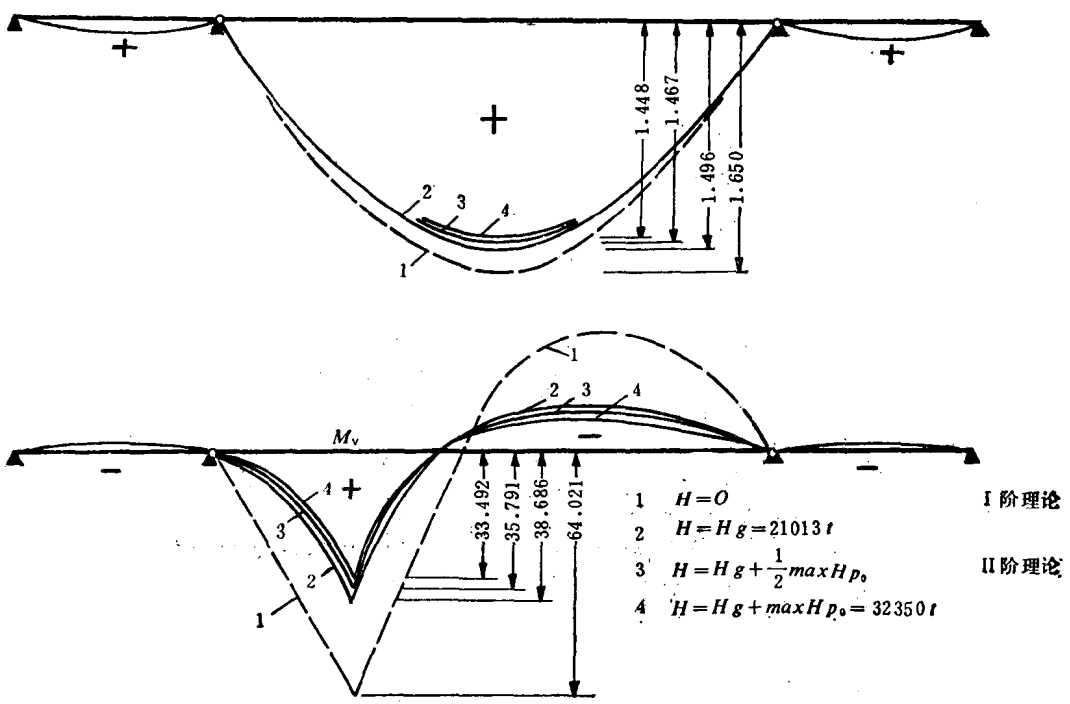


图 7

图 8 给出按 I 阶理论和按 II 阶理论求得的加劲梁弯矩包络图。前者远远大于后者,误差很大,所以必须用 II 阶理论进行计算。

(2-a)三跨连续常截面(J)加劲梁

图 9 表示缆索拉力 H_p 、加劲梁支承弯矩 M_1 及主孔四分点弯矩 M_v 的影响线。图 10 则给出加劲梁的弯矩包络图。这里同样可以看出 I 阶理论的误差很大。

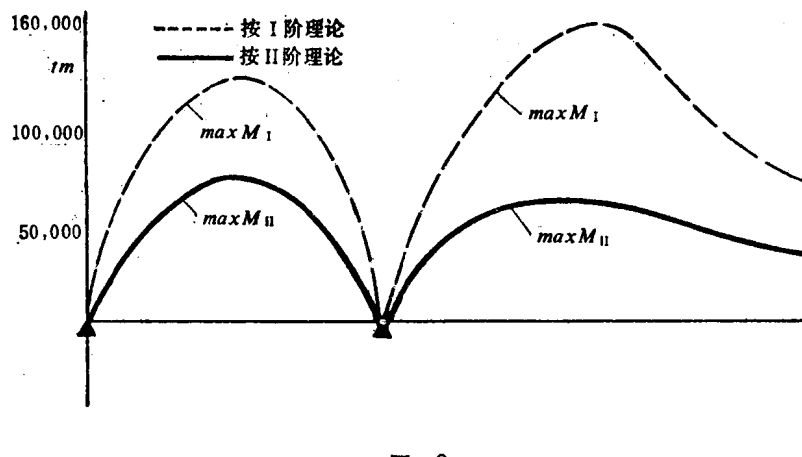


图 8

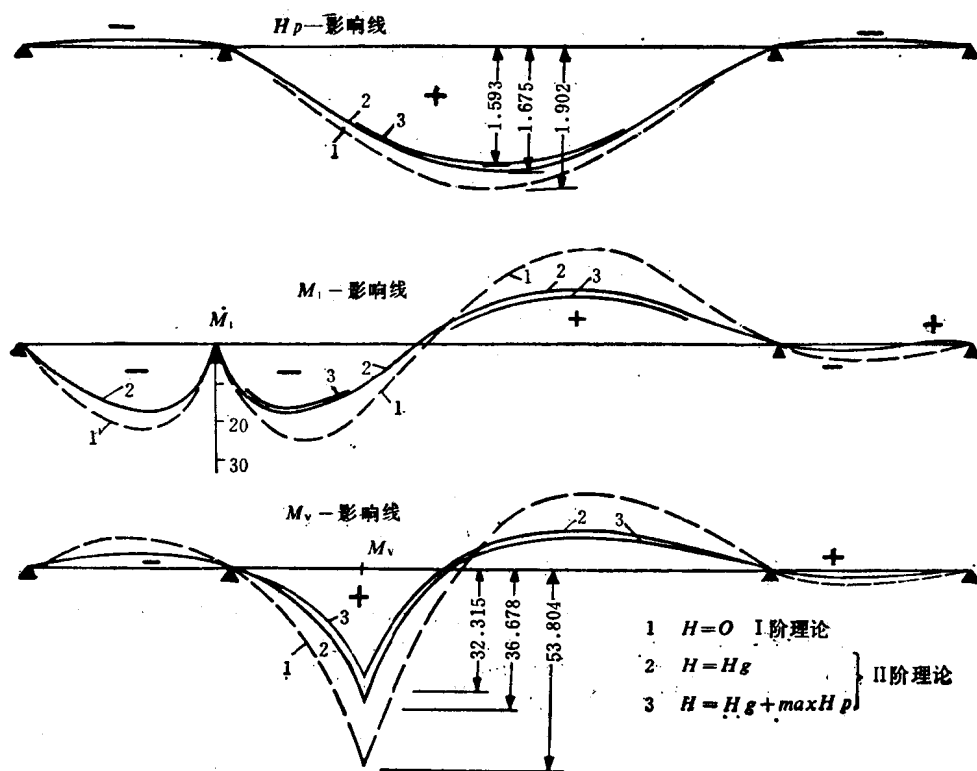


图 9

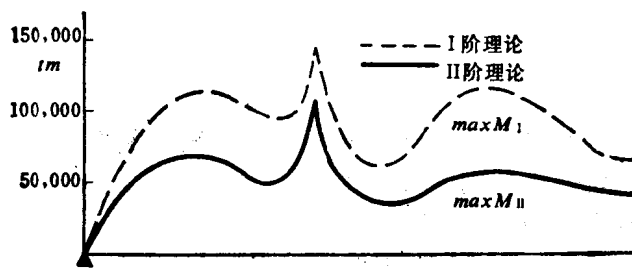


图 10

图 11 为常截面的三跨简支加劲梁(1-a)与三跨连续加劲梁(2-a)的按 II 阶理论弯矩包络图的对比。可以看出连续的加劲梁比简支的,在材料用量方面优越性不很大,但可以稍微增加梁的挠曲刚度。

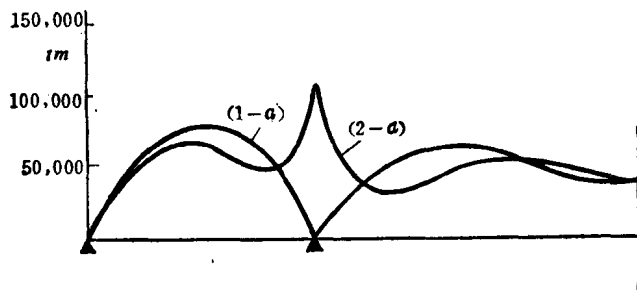


图 11

图 12 表示截面惯矩参考弯矩包络图 11 变化 $J(x)$ 的简支加劲梁(1-b)在主孔四分点的弯矩 M_0 和连续加劲梁(2-b)的支承弯矩 M_1 按 II 阶理论取 $H=H_g$ 求得的影响线与截面惯矩为常值 J 时(情况 1-a 和 2-a)的对比。可以看出,截面惯矩的变化对 M_1 产生的影响比对 M_0 的影响大。

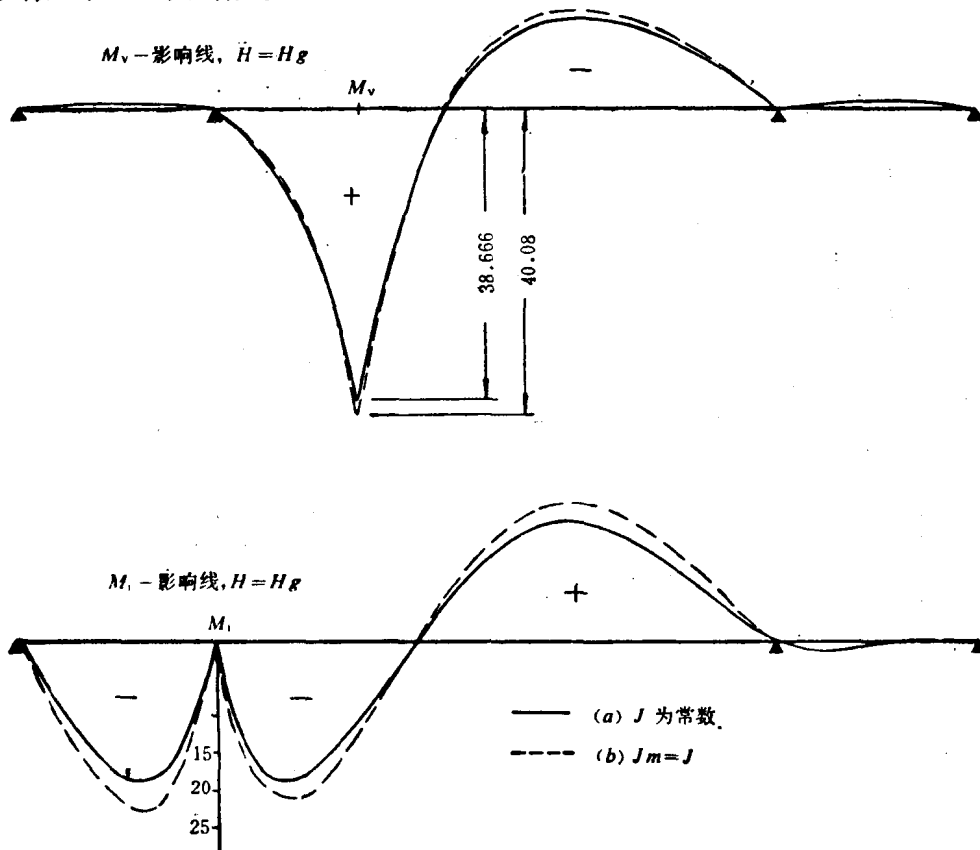


图 12

下表列出加劲梁为三跨简支、三跨连续具有常截面 J 或变截面 $J_m=J$ 四种情况按 II 阶理论的最大缆索拉力 $\max H=H_g+\max H_p$ 、中孔跨中挠度 $\max \eta_m$ 、中孔四分点弯矩

附 表

加 劲 梁	max H		max η_m		max M_v		min M_1	
	t	%	mm	%	tm	%	tm	%
1-a	32350	100	4518	100	63572	100		
2-a	32159	99.4	4386	97.1	58900	92.7	-106300	100
1-b	32365	100	4564	101.0	64485	102.1		
2-b	32242	99.7	4356	96.4			-122758	155.5

max M_v 和最小支承弯矩 min M_1 的对比。

从表中可以看出加劲梁连续与否和它的截面变化与否的影响。以各自的百分比表达, 影响最小在 max H , <1%, 其次在 max η , max M_v , 最大在 min M_1 , 达 15.5%。

参 考 文 献

- [1] Melan, J.; Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 4. Aufl., 2. Teil, VI. Bd. 1925.
- [2] Timoshenko, S.; Steifigkeit von Hängebrücken. Zeitschrift f. angew. Math. u. Mechanik 1923, S. 1-10.
- [3] Priester, G. C.; Application of trigonometric series to cable stress analysis in suspension bridge. Engineering Research Bulletin, No. 12, Univ. of Michigan, March 1929.
- [4] Bleich, Hans H.; Die Berechnung verankerter Hängebrücken. Berlin 1935.
- [5] Neukirch, H.; Angenäherte Berechnung der Hängebrücken unter Berücksichtigung ihrer Verformung. Stahlbau 1936, H. 9, S. 130.
- [6] Bleich-Melan; Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik.
- [7] Neukirch, H. Berechnung der Hängebrücke bei Berücksichtigung der Verformung des Kabels. Ing. Archiv 1936, H. 7, S. 140-155.
- [8] Stüssi, F.; Zur Berechnung der verankerten Hängebrücken. Abh. IVBH(Int. Ver. f. Brückenbau u. Hohlbau.) Bd. 4. 1936.
- [9] Steinman, D. B.; Deflection theory for continuous suspension bridges. Publ. IABSE Vol. 2. 1934.
- [10] Timoshenko, S.; Suspension bridges with a continuous stiffening truss. Publ. IABSE Vol. 2. 1934.
- [11] Jakkula, A. A.; The theory of the suspension bridge. Publ. IABSE Vol. 4. 1936.
- [12] Stüssi, F.; Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis. Schweizerische Bauzeitung 1935, Bd. 106, S. 136.
- [13] 李国豪: Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers. Der Stahlbau 1940, H. 21/22; 1941, H. 6/7.
- [14] 李国豪: I. Nebeninflüsse bei der Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. II. Modellversuche. Allgemeine Grundlagen und Anwendung. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues. Heft 5, 1942, Springer-Verlag.
- [15] 李国豪: Genauere Theorie der Hängebrücken. Science Record Sinica Vol. 2, No. 1 (1947) pp. 129/136.
- [16] 钱令希: A simplified Method of Analysing Suspension Bridge Proc. ASCE IX, 1943, and Transaction ASCE Vol. 114, 1949.
- [17] 刘恢先: On The Theory and Design of Suspension Bridges 1945.