FEIXIANXINGFANHANFENXIYINLUN

非线性泛函分析引论

钟承奎 范先令 陈文嫄

兰州大学出版社

得到国家自然科学基金、国家教委博士点基金
兰州大学研究生处、兰州大学教务处 资助

非线性泛函分析引论

钟承奎　范先令　陈文嫄

兰州大学出版社

内容提要

本书以线性泛函分析的基本理论为基础，以微分方程、积分方程为背景，介绍非线性泛函分析的基本理论和基本方法. 内容包括非线性泛函分析的基础知识，拓扑度理论，半序 Banach 空间与算子方程的正解，分歧理论，变分原理等. 本书所介绍的内容简明扼要，深入浅出，并尽量反映该内容的思想实质.

本书可作为高等院校数学系各专业的研究生教材、基础数学专业的本科生选修课教材，亦可供基础数学、计算数学、应用数学以及力学等方面的科研人员参考.

非线性泛函分析引论

钟承奎　范先令　陈文嫄　著

兰州大学出版社出版发行

（兰州大学校内）

兰州大学印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　　印张：8

1998 年 3 月第 1 版　　1998 年 3 月第 1 次印刷

字数：196 千字　　印数：1—3000 册

ISBN7－311－01332－1/O・132　定价：15.00 元

目　录

第一章　预备知识

本章的目的是扼要地陈述一些与以后各章内容紧密相关的基本概念和结果. 这些内容涉及到线性泛函分析与二阶椭圆型偏微分方程. 请读者参见[1]、[15]、[17]、[18]、[52].

§1　度量空间

1.1　度量空间的基本概念

定义 1.1　设 X 是非空集合，d 是 $X\times X$ 上的实函数，如果它满足下列条件：

(1) 对任意 $x,y\in X$，$d(x,y)\geqslant 0$，并且 $d(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；

(2)　$d(x,y)=d(y,x),\forall\ x,y\in X$；

(3)　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\forall\ x,y,z\in X$.

则称 d 是 X 上的距离函数，而称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离. 又称 (X,d) 为距离空间或度量空间. 通常，我们略去 d，而简称 X 为度量空间.

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的点列，我们称 $x_0\in X$ 为 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，如果

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0.$$

设 X 是度量空间，$x_0\in X$，$A\subset X$，我们称子集 $B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\}$ 为 x_0 的 $r-$ 邻域；如果 x_0 的某个 $r-$ 邻域包

含 A，则称 A 是有界集；如果 A 包含 x_0 的某个 $r-$ 邻域，则称 x_0 是 A 的内点；A 的内点的全体称为 A 的内部，记为 $\dot{A}$；如果 A 中的每个点都是 A 的内点，则称 A 是开集. 另外，我们说 x_0 是 A 的极限点是指 x_0 的每个 $r-$ 邻域都含有 A 中不同于 x_0 的点；而说 x_0 是 A 的边界点是指 x_0 是 A 的极限点但不是 A 的内点；A 的边界点的全体称为 A 的边界，记为 ∂A 或者 $\mathrm{Bd}A$. 我们还称子集 $\bar{A}=A\cup\partial A$ 为 A 的闭包，而称 A 是闭集是指 $\bar{A}=A$.

1.2 连通分支

定义 1.2 如果度量空间 X 不能分解成两个非空而又互不相交的闭集的并，则称 X 是连通的；如果 X 的子集 A 按 X 的度量所确定的度量空间是连通的，则称 A 是 X 的连通子集；如果 A 是 X 的极大连通子集（即 A 是连通的，若 B 是 X 的连通子集，且 $A\subset B$，则 $A=B$）那末，我们称 A 是 X 的一个连通分支.

定理 1.1 设 x 是度量空间 X 中的点，则存在包含 x 的唯一的连通分支.

1.3 完备性

定义 1.3 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的点列，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在正数 N，使得当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列.

如果度量空间 X 中每个 Cauchy 列都有极限则称 X 是完备的.

定理 1.2(Banach 压缩映象原理) 设 X 是完备的度量空间，$F:X\to X$ 是压缩映射，即存在 $\alpha\in[0,1)$ 使得对任何 $x,y\in X$，有

$$d(F(x),F(y))\leqslant\alpha d(x,y),$$

则 F 有唯一的不动点 x^*. 进一步，任取 $x_0\in X$，令

$$x_n = F(x_{n-1}), \qquad n = 1,2,\cdots\cdots,$$

则

$$d(x_n,x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1,x_0), \qquad n = 1,2,\cdots,$$

其中 x^* 称为 F 的不动点是指 $F(x^*) = x^*$.

1.4 紧性

定义 1.4 设 A 是度量空间 X 的子集，如果对于 A 的任何一族开覆盖，都有有限的子覆盖，则称 A 是紧的；如果 A 的闭包 $\bar{A}$ 是紧的，则称 A 是相对紧的或者致密的.

定理 1.3 A 是度量空间 X 中紧集的充分必要条件是对 A 中的每个点列 $\{x_n\}$，存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\{x_{n_k}\}$ 在 A 中有极限.

定义 1.5 设 A 是度量空间 X 的子集，如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $x_1,\cdots,x_n \in X$，使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon),$$

则称 A 是完全有界集，或者说 A 具有有限的 $\varepsilon-$ 网.

定理 1.4 设 A 是完备度量空间 X 的子集，则 A 是完全有界集的充分必要条件是 A 是相对紧的.

1.5 仿紧性与单位分解

定义 1.6 度量空间 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 称为局部有限的，如果对每一个 $x \in X$，存在 x 的 $r-$ 邻域 $B(x,r)$ 仅与 $\{U_i\}$ 中有限多个 U_i 相交. 设 $\{V_j\}$ 是 X 的另一个开覆盖，我们说 $\{V_j\}$ 是 $\{U_i\}$ 的加细覆盖是指对每一个 V_j 都有某个 U_i，使得 $V_j \subset U_i$.

定理 1.5 度量空间 X 是仿紧的，即对 X 的任何开覆盖 $\{U_i\}$，都存在局部有限的加细覆盖 $\{V_j\}$.

这个定理是 A. H. Stone 在 1948 年获得的，请见[88]. 它的另外证明还可在 S. Lang[63] 中找到.

定理 1.6 设 X 是度量空间，则对 X 的任何一族开覆盖 $\{U_i\}$ 都存在从属于 $\{U_i\}$ 的连续单位分解，即存在连续函数族 $\varphi_j : X \to [0,1]$ 满足

(1) $V_j = \{x \in X \mid \varphi_j(x) \neq 0\}$ 是 X 的局部有限覆盖；

(2) 对每个 V_j，存在 U_i 使得 $V_j \subset U_i$；

(3) 对任何 $x \in X$，$\sum_j \varphi_j(x) = 1$.

定理 1.6 称为单位分解定理，在非线性分析中经常用到，其主要作用是实现从局部向整体的过渡.

1.6 Banach 空间

定义 1.7 设 X 是实数域或复数域 F 上的线性空间，如果 X 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 满足下列条件：

(1) 对任何 $x \in X$，$\|x\| \geqslant 0$，并且 $\|x\| = 0$ 的充要条件是 $x = 0$；

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$，$\forall \alpha \in F$，$\forall x \in X$；

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，$\forall x, y \in X$.

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数，而称 $(X, \|\cdot\|)$ 为线性赋范空间. 通常，我们略去 $\|\cdot\|$，而把 X 简称为线性赋范空间.

设 X 是线性赋范空间，对任何 $x, y \in X$，令

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

则 d 是 X 上的距离函数. 因此，我们自然地把 X 看成是度量空间.

定义 1.8 完备的线性赋范空间称为 Banach 空间.

定理 1.7(F. Riesz) 设 Y 是线性赋范空间 X 的闭子空间(即 Y 是线性子空间，并且是闭的)，如果 $Y \neq X$，则对任何 ε，$0 < \varepsilon < 1$，必存在 X 中的向量 x_0，$\|x_0\| = 1$，使得

$$\operatorname{dist}(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| > \varepsilon.$$

由于任何有限维线性赋范空间都是闭子空间，因此，Riesz 定

理表明，如果 X 是无限维线性赋范空间，则 X 的闭单位球 $\overline{B(0,1)} = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ 不是相对紧的. 这一点可以说是无穷维空间上的分析学所特有的困难.

1.7 Dugundji 延拓定理

定理 1.8(J. Dugundji[46]) 设 A 是度量空间 X 中的闭集，Y 是线性赋范空间；设 $f: A \to Y$ 连续，则存在 f 的连续延拓 $f^*: X \to \overline{\mathrm{conv}} f(A)$，其中 $\overline{\mathrm{conv}} f(A)$ 表示 $f(A)$ 的闭凸包，即所有包含 $f(A)$ 的闭凸子集的交.

§2 有界线性算子的基本理论

2.1 有界线性算子，有界线性泛函及共轭空间

定义 2.1 设 X, Y 为实数域或复数域 F 上的线性赋范空间，$T: X \to Y$ 是线性映射，即

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall\ \alpha, \beta \in F,\ x, y \in X.$$

如果 T 映 X 中的有界集成 Y 中的有界集，则称 T 是有界线性算子. 特别，当 $Y = F$ 时，称 T 是 X 上的有界线性泛函.

容易看出，T 是有界线性算子的充要条件是存在常数 $M > 0$ 使得对任何 $x \in X$，有

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|.$$

因此，利用 T 的线性性，可以推得 T 是有界线性算子的充要条件是 T 在零点连续，而后者又等价于在每一点连续.

记 $L(X,Y)$ 为从 X 到 Y 中的所有有界线性算子构成的集合. 自然地，$L(X,Y)$ 是 F 上的线性空间，对每个 $T \in L(X,Y)$，令

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $L(X,Y)$ 上的范数. 因此,$L(X,Y)$ 是线性赋范空间. 进一步,还可以证明,$L(X,Y)$ 是 Banach 空间的充要条件是 Y 为 Banach 空间. 特别,当 $Y=F$ 时,我们记 $L(X,F)=X^*$,它称为 X 的共轭空间或对偶空间,由于 F 是完备的,故共轭空间 X^* 总是 Banach 空间.

定理 2.1(有界线性泛函延拓定理) 设 X 是线性赋范空间,X_1 是 X 的线性子空间. 对于给定在 X_1 上的任一有界线性泛函 f_1,必存在 X 上的有界线性泛函 f 使得

(1) $f(x)=f_1(x), \quad \forall\, x\in X_1$;

(2) $\|f\|_X=\|f_1\|_{X_1}$.

2.2 弱收敛与弱* 收敛

定义 2.2 设 X 是线性赋范空间,X^* 是它的共轭空间,$\{x_n\}\subset X$,$x_0\in X$,如果对每个 $f\in X^*$,有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0),$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0,记为(弱) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,或 $x_n\rightharpoonup x_0$.

设 $\{f_n\}\subset X^*$,$f_0\in X^*$,如果对每个 $x\in X$,有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x),$$

则称 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 f_0,记为(弱*) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f_0$,或 $f_n\overset{*}{\rightharpoonup} f_0$.

定理 2.2(S. Mazur) 设 X 是 Banach 空间,如果 $\{x_n\}\subset X$ 弱收敛于 x_0,则 $x_0\in\overline{\mathrm{conv}}\{x_n\}$.

这个定理的证明只需用凸集的隔离性定理即可. 请见第四章定理 1.5.

设 X 是线性赋范空间,X^* 是它的共轭空间,对每个 $x\in X$,以及任何 $f\in X^*$,令

$$x(f)=f(x),$$

则容易推得 x 是 X^* 上的有界线性泛函,并且 x 的范数与其作为泛

函的范数相等. 因此，我们自然地把 x 看成是 $(X^*)^* = X^{**}$ 中的元素.

定义 2.3　设 X 是线性赋范空间，如果 $X = X^{**}$，则称 X 是自反的.

当 X 是自反时，X 中弱收敛的概念与 $(X^*)^*$ 中弱* 收敛的概念是等价的.

定理 2.3　设 X 是自反的Banach 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的有界点列，则 $\{x_n\}$ 有弱收敛的子列.

如果再加上 X 是可分的条件，即存在 X 的可列子集 A 使得 $\overline{A} = X$. 那末，定理 2.3 比较容易证明，见[15]. 对于一般的情形，定理 2.3 的证明需要用到 Eberlein — Smulian 定理以及 Alaoglu 定理，Eberlein — Smulian 定理是说 Banach 空间中的子集是相对弱紧的充分必要条件是该子集是相对序列弱紧的. 而 Alaoglu 定理是说对任何线性赋范空间，它的共轭空间的单位球是弱* 紧集. 再注意到，当 X 自反时，弱* 紧集与弱紧集等价，从而可实现定理 2.3 的证明，请读者参见[45]. 另外，在这里，提醒读者注意的是弱* 紧集与弱* 序列紧集是不等价的.

2.3　Banach 逆算子定理

定义 2.4　设 X、Y 是两个线性赋范空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，如果 T 的值域 $R(T) = Y$，T 的逆算子 T^{-1} 存在并且有界，则称 T 是正则算子.

定理 2.4(H. Banach)　设 X、Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 是一一到上的有界线性算子，则 T^{-1} 有界. 因此，T 是正则算子.

2.4　有界线性算子的正则集与谱

本小节总假定 X 是复的 Banach 空间.

定义 2.5　设 T 是从 X 的线性子空间 $D(T)$ 到 X 中的线性算

子，λ 是复数，如果$(\lambda I - T)$ 是正则算子，则称 λ 是 T 的正则点，并称$(\lambda I - T)^{-1}$ 为 T 的豫解算子；不是正则点的复数 λ 称为 T 的谱点. 复平面上正则点的全体称为 T 的正则集，记为 $\rho(T)$；谱点的全体称为 T 的谱，记为 $\sigma(T)$.

定义 2.6　设 $T:X \to X$ 是有界线性算子，则称

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

为 T 的谱半径.

定理 2.5　设 $T:X \to X$ 是有界线性算子，则下面的结论成立：

(1) 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| T^n \|}$ 存在并且等于 $r(T)$；

(2) 当 $|\lambda| > r(T)$ 时，λ 是 T 的正则点，并且

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}};$$

(3) $\rho(T)$ 是开集，对每个 $\lambda_0 \in \rho(T)$，记

$$r_{\lambda_0} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| (\lambda I - T)^{-n} \|},$$

则当 $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{r_0}$ 时，λ 是 T 的正则点，并且

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda_0 I - T)^{-(n+1)} (\lambda - \lambda_0)^n.$$

2.5　全连续线性算子的 Riesz — Schauder 理论

定义 2.7　设 X、Y 是线性赋范空间，$T:X \to Y$ 是线性算子，如果 T 将 X 中的有界集映成 Y 中的相对紧集，则称 T 是全连续线性算子.

定理 2.6　设 X 是复的 Banach 空间，T 是 X 上的全连续线性算子，则

(1)　T 的非零谱点 λ 必是 T 的特征值，即存在非零向量 $x \in X$，使得 $Tx = \lambda x$；

(2) $\sigma(T)$ 没有非零的极限点；

(3) 当 $\lambda \in \sigma(T)$ 且 $\lambda \neq 0$ 时，必存在自然数 $n_0 \geqslant 1$ 使得

$$X = N((\lambda I - T)^{n_0}) \oplus R((\lambda I - T)^{n_0}),$$

其中 $\oplus$ 表示直和，$N((\lambda I - T)^{n_0}) = \{x \in X \mid (\lambda I - T)^{n_0} x = 0\}$ 是有限维的，$R((\lambda I - T)^{n_0}) = \{(\lambda I - T)^{n_0} x \mid x \in X\}$ 为闭线性子空间.

§ 3 Sobolev 空间

本节总假定 Ω 为 R^n 中的有界区域，并使用如下记号：

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 称为重指数，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

3.1 Hölder 连续函数空间

设 k 是非负整数，记

$C^k(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to R^1 \mid \partial^\alpha u$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，$|\alpha| \leqslant k\}$，并规定其范数为

$$\| u \|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|.$$

称 $C^k(\overline{\Omega})$ 为 k 次连续可微的函数空间.

又设 $0 < \beta \leqslant 1$，记

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) \mid \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \overline{\Omega}}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x - y|^\beta} < +\infty, \quad |\alpha| = k\},$$

并让其范数定义为

$$\| u \|_{C^{k,\beta}(\overline{\Omega})} = \| u \|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sup_{\substack{x, y \in \overline{\Omega} \\ |\alpha| = k}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x - y|^\beta},$$

则称 $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ 为 $k + \beta$ 次 Hölder 连续函数空间. 另外，我们还让

$C_0^k(\Omega)$，$C_0^{k,\beta}(\Omega)$ 分别表示 $C^k(\overline{\Omega})$，$C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ 中所有支集包含在 Ω 内的 u 的全体，其中 u 的支集定义为 $\overline{\{x \in \overline{\Omega} | u(x) \neq 0\}}$.

容易验证，$C^k(\overline{\Omega})$，$C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ 都是 Banach 空间，并且 $C_0^k(\Omega)$，$C_0^{k,\beta}(\Omega)$ 分别是 $C^k(\overline{\Omega})$，$C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ 的子空间.

定理 3.1 当 $j+\gamma<k+\beta$ 时，嵌入映射 $i: C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{j,\gamma}(\overline{\Omega})$ 是全连续线性算子.

3.2 $W^{k,p}$ 空间

设 $p \geqslant 1$，我们用 $L^p(\Omega)$ 表示经典的 Banach 空间，它是由 Ω 上所有 p 次幂可积函数的全体所组成，其范数定义为

$$\| u \|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=\infty$ 时，用 $L^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上本性有界可测函数的全体. 这里，本性有界函数是指和一个有界函数几乎处处相等. $L^\infty(\Omega)$ 是 Banach 空间，其范数定义为

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{\substack{\mu(E_0)=0 \\ E_0 \subset \Omega}} \sup_{x \in \Omega \setminus E_0} |u(x)|.$$

定义 3.1 设 u, v 是 Ω 上的 Lebesgue 可积函数，$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是重指数. 如果对任何 $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$，有

$$\int_\Omega v\varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \mathrm{d}x.$$

则称 v 是 u 的第 α 次弱导数，记 $v = \partial^\alpha u$. 如果对所有的重指数 α，$|\alpha| \leqslant k$，$\partial^\alpha u$ 存在，则称 u 在 Ω 中是 k 次弱可微的. Ω 中所有 k 次弱可微函数的全体记为 $W^k(\Omega)$.

让

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega) | \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant k\},$$

并规定其范数为

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\partial^\alpha u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$