数学方法论选讲

徐利治 著

华中工学院 出版社

数学方法论选讲

徐利治 著

朱梧槚、袁相碗 校

華中工学院出版社

内 容 简 介

本书用十来个典型的专题，对数学的发展规律和思想方法，进行了认真的研究和讨论．书中着重介绍了数学模型方法、公理化方法、映射反演原则、结构主义和伽罗瓦群的思想；分析了悖论与数学基础问题的关系以及对数学发展的影响；探讨了逻辑主义、直觉主义、形式主义等数学诸流派的观点、方法以及它们的成因；叙述了数学家在数学研究中的发现、发明与创新过程的心智状态．本书用辩证的观点，总结了历史上著名数学家希尔伯特等人的成长条件和成功的经验．

本书可作为理工科大学高年级学生和研究生的选修课教材，也可供数学工作者，哲学工作者以及教师们参考．

数学方法论选讲

徐利治　著

责任编辑　李立鹏

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　各地新华书店经售

咸宁县印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：5.875　字数：150,000

1983年 4 月第一版　1983年 4 月第一次印刷

印数：1—15,000　统一书号：13255—013　定价：0.90元

前　言

“数学方法论”是一门很重要的学问，在概念上它理应属于科学方法论的一个特殊范畴。但本书并不是关于数学方法论的系统论述，而只是选择了十来个公认为比较有趣的专题，对它们作了介绍、分析和讨论。这些介绍或讨论，相信对从事数学或数理哲学的科研工作者和教师们会有一定的参考价值。

“尽信书不如无书”。建议读者要尽可能采取科学的分析态度来阅读这本书。对书中提到的许多著名数学家的观点和主张，自然不宜盲目崇拜，通盘接受。这好比消化任何食物那样，必须吸收其养料，排泄其糟粕。书中部分内容还包含着我和合作者们的一些论点或心得，这就更希望读者给予分析评论并不吝指正。

本书主要题材是根据作者近两年来在大连、长春、武汉三地讲课用的提纲和讲义充实形成的。南京大学、辽宁师院等高校数学系均将采用本书开设选修课程。如所知，这样一门课程在国内外尚未正式形成讲授科目，所以并无现成教材可资借鉴。因此，这里无论是题材内容的选择或是讲授方法，都不能认为是充分定型的。然而，使作者感到欣慰的是：不少数学专业和自然辩证法专业的高年级学生和研究生听了这门课之后，认为无论在数学的或哲学的思考中都能受到启发和得到提高。

应该提到的是，本书第3讲、第8讲与第9讲是根据作者和朱梧槚、袁相碗、王兴华、郑毓信等同志合作的论文改写而成的。

我要对我的学术助手田铁虹、高俊斌二同志和组合数学方向的研究生们表示谢意，因为他们曾耐心地帮助誊清了原稿。还应提到孙革同志，她曾分担了整理和抄写原稿的大量工作。最后，我特别要对华中工学院出版社将拙著纳入出版计划以及编辑部李立鹏等同志所付出的细致劳动表示诚挚感谢。

徐利治

1982年12月于大连

目　　录

第1讲　数学方法论引论

§1　研究数学方法论的意义和目的

什么叫**方法论**？方法论(methodology)就是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问。英文methodology一词又译为方法学。如所知，各门科学都有方法论。数学当然也有它自己的方法论。

数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。

数学是一门工具性很强的科学，它和别的科学比较起来还具有较高的抽象性等特征，为了有效地发展它、改进它、应用它或者把它很好地传授给学生们，就需要对这门科学的发展规律、研究方法、发现与发明等法则有所掌握。因此，数学研究工作者、数学教师、科技工作者，以及高年级大学生、研究生等都需要知道一些数学方法论。

由于数学领域里的许多概念与理论题材都是通过人脑的抽象思维形式表现出来的，这里不仅包含有思维对象（数学本体）的辩证法，而且还有着思维运动过程（认识与反映过程）的辩证法，所以数学方法论还给哲学家、自然辩证法研究工作者以及心理学家们提供了值得分析研究的素材。凡是看过恩格斯《自然辩证法》的读者都知道，即使在初等数学里也充满着辩证法。

我们又知道，数学方法论中的许多方法和原理是从数学发展史中总结归纳出来的，所以数学工作者还必须学习一点数学史。

从近代数学发展史中，我们看到有许多杰出的数学家曾围绕

着数学基础问题展开了一系列争论，以致形成了各个著名的流派，如逻辑主义派、直觉主义派、形式主义派与柏拉图主义派等．直到现今，这些流派的观点主张对数学体系的内在发展，还继续产生着不同程度的影响．

各个数学流派对待数学基础问题的研究，各有其方法论主张．事实上，他们各有所偏，各有所见．只有运用科学的反映论观点，才能从他们的观点主张中分析总结出较为正确的数学方法论观点．因此，对于今日的数学工作者说来，无论是为了掌握、运用或者去发展数学方法论，都必须自觉地采取科学的反映论观点（即辩证法的反映论观点）去考察问题和分析问题．

§2　宏观的方法论与微观的方法论

数学科学的发展规律可以从数学发展史的丰富材料中归纳分析出来．由于数学史是人类社会科学技术发展史的一个组成部分，数学发展的巨大动力源泉与社会生产实践及技术发展的客观要求紧密相连，因此，数学发展规律的研究，如果撇开数学内在因素不提，那是属于**宏观的数学方法论**范畴．

数学工作者研究数学课题时，也可以不考虑数学发展的外在推动力，专就数学内部体系结构中的特定问题来进行分析研究．这样，就需要考虑采取最有效的数学研究方法，需要懂得数学发现与数学创造等各种法则．这些属于研究工作者个人必须遵循的方法与法则的研究，可以称之为**微观的数学方法论**．

看来，历史上最卓越的数学家如牛顿、欧拉、高斯、傅立叶、拉普拉斯等人，既精通微观的数学方法论，也懂得宏观的数学方法论．否则，他们的成就与贡献不可能对社会生产技术的发展产生那样深远的影响．一般说来，凡是具有历史眼光的数学家，他们的贡献成果，往往起着承上启下的作用．因而总是带有经久不灭的光辉．怎样才能获得“历史眼光”呢？这就需要通过

数学史的研究去理解一些宏观数学方法论的基本知识。

这里值得介绍的是，美国数学教授M.Kline曾在1972年出版了一本厚达1200页的巨著——《古今数学思想》，系统地叙述和总结了古今数学思想发展史。该书包藏大量的题材，可作为我们研究数学方法论的一本宝贵的参考资料。还有E.T.Bell的一本名著《数学人物》（1937年出版，1965年重版），其中翔实地记录了古今30多位杰出数学家的生活经历与工作历史，也很有参考价值。

数学家成长规律的一般分析，显然也应属于宏观的方法论；但本书只着重讨论微观的数学方法论，所以仅借用希尔伯特成功的典型范例来描绘一下关于数学人才成长的社会因素的作用。

§3 略论希尔伯特成功的社会因素

分析一位杰出数学家成功的社会因素，对于正在成长着的青年数学工作者和从事数学教育的数学教师们说来，都会得到有益的启发。这种分析至少对消除"天才自成"的糊涂思想，会起到一定的作用。

我们选择希尔伯特（David Hilbert，1862-1943）这个例子，因为这位数学家的成长、发展和获得巨大成功的经历已经成为现代人才学上的一个典型例子。

按照历史唯物主义的观点来看，"天才人物"都是社会的产物。他们只有适应时代的要求，回答和解决历史进程中出现的重大问题，才能取得成功。分析任何一个天才人物成功的因素时，应当象恩格斯那样，不能离开当时社会历史条件和文化发展条件以及反映这些条件的时代要求。所以对希尔伯特的分析，也应遵循这样的原则。本节内容主要取材于《大连工学院自然辩证法通讯》上刘永振同志的一篇文章，该文显然是参考了希尔伯特传记写成的。

希尔伯特出身于东普鲁士的古都哥尼斯堡（现名加里宁格勒）。中、青年时代，他曾对代数不变式论、代数数论、几何基础等科目作出了重要贡献。中年以后，他发展了变分法、积分方程、函数空间理论、数学物理方法、数理逻辑及证明论等数学分支。1899年出版的一本名著《几何学基础》，成为近代公理化方法的代表作，且由此推动形成了“数学公理化学派”。所以，希尔伯特是近代形式公理学派的创始人。1900年，年届38岁，他在国际数学会议上以卓越的远见和洞察力提出了数学上未解决的23个难题，即有名的“希尔伯特问题”，推动了半个多世纪以来各个数学分支的发展。

我们知道，十九世纪七十年代初，德国实现了统一，经济空前高涨，成为世界科学活动的主要中心，这是产生一大批德国数学家的主要社会原因。高水平的一群人才中，必有出类拔萃者。希尔伯特生逢盛世，成为出类拔萃者，这是历史的必然。下面再略作具体分析：

（一）文化传统的影响 希尔伯特故乡的哥尼斯城堡建基于十三世纪，后来成为东普鲁士首都，那是一个著名的大学城。它位于布勒尔河两条支流之间，那里有桥联着一个岛和一个半岛，而数学史上那个著名的为欧拉解决的所谓“七桥问题”几乎是该城居民家喻户晓的一桩美谈。岛上有所古老的大学，还有大哲学家康德的墓地。显然，哥尼斯堡的自然环境和文化传统对于希尔伯特的成长来说是得天独厚的。

（二）家庭环境的影响 希尔伯特的父亲是一位普通的法官，母亲出生于普通商人家庭，但她爱好哲学、天文学和数学，特别对素数怀有浓厚的兴趣。这就影响了希尔伯特从小爱好数学。母亲每年在4月22日康德诞辰这一天，她总是带着小希尔伯特到康德墓地瞻仰康德的半身象，并且一字一句地拼读墙上刻着的康德的格言。这些对于希尔伯特从小爱科学，长大攀高峰，无疑会带来潜移默化的精神影响。

（三）社会舆论的影响　希尔伯特上小学二年级的时候，明可夫斯基一家从俄罗斯搬到了哥尼斯堡。明可夫斯基一家三兄弟当时称为三个“奇才”，以才能出众、性格迷人轰动了哥尼斯堡。特别是小神童明可夫斯基（Herman Minkowski 1864-1909）比希尔伯特小两岁，他的数学才能显著超过希尔伯特。他后来也成为大数学家，是数的几何（Geometry of Numbers）这一数论分支的创始人。

当时两家只有一河之隔。小明可夫斯基的数学才能出众对小希尔伯特不能不产生一种心理上的压力。确实，据希尔伯特后来写的回忆录来看，他承认自己小时候并非天才，而是一个较愚钝的孩子，当然数学才能远远在明可夫斯基之下。在希尔伯特的亲友中，也没有人提到过希尔伯特的能力曾受到过人们的注意。但是人们对明可夫斯基一家三兄弟的赞赏却激励了小希尔伯特。特别是小神童Hermann的数学天才象魔力一样征服了希尔伯特的心灵。

明可夫斯基刚满17岁时解决了“将正整数表成五个平方数和”的难题，同英国老数学家Henry Smith合得了法国巴黎科学院数学大奖，因而更加出名。当时希尔伯特的父亲还告诫希尔伯特，说不要同那样出名的人交朋友（以免被别人瞧不起）。可是希尔伯特不顾父亲的反对，毅然同明可夫斯基结成了终生最要好的朋友。

尽管希尔伯特和明可夫斯基在早年智力上有明显的差距，然而通过不断努力，希尔伯特后来不仅成为与明可夫斯基相提并论的大数学家，而且对整个数学的贡献还远远超过了明可夫斯基。这说明一个人的先天素质（所谓“天资”或“秉赋”）并不是决定成就大小的主要因素。先天素质的不足，可以在后天的实践中加以补偿。

（四）学校教育的影响　希尔伯特童年时代上的德国小学校，特别注意基础教育，非常强调语文、语法、算术等科目的基本

训练（尤其是语法一科，注重训练学生有条不紊地思维以及正确地表述思想的方式和方法）。希尔伯特进的中学和大学都充满自由学习的空气，这使他如鱼得水。

希尔伯特的青年时代是在哥尼斯堡大学度过的，那里有着浓厚的学术研究空气。著名的数学家Jacobi，Weierstrass，Weber，Lindemann等都在那里任教过，使该大学曾形成一个数学的研究中心。Lindemann曾以首先证明π为超越数而享有盛誉，他就是当年希尔伯特的学术导师。希尔伯特的学术论文原想研究“连分数的一种推广”。但经Lindemann指出，方知“那早已由Jacobi作出了”。在Lindemann的引导下，希尔伯特改搞“代数不变式理论”，结果大为成功。Lindemann对他的毕业论文极感满意。明可夫斯基在写给希尔伯特的信中也赞赏说：“这样精彩的数学定理会出现在哥尼斯堡真是值得庆贺……”。可见，获得第一流的教师指导引路，也是希尔伯特成功的因素之一。

哥尼斯堡大学曾讲授一些最新颖的数学科目，这样就往往能把年轻人很快带到数学研究领域的前沿，从事创造性的工作。此外，启发式教学法对希尔伯特的教益也很大。例如，他曾选学线性微分方程课程，当时Fuchs教授的讲课方法与众不同。Fuchs习惯于在讲课时把自己置于危险困难境地(可能是缺乏备课习惯)，对要讲的内容总是现想现推。这样一来，就使得希尔伯特和他的同学们有机会瞧一瞧高明的数学思维过程是怎样进行的。

还有良师益友的互相切磋讨论，对希尔伯特的成长发展也起了十分重要的作用。当时希尔伯特和明可夫斯基的老师Hurwitz（他是一位只比希尔伯特大三岁的杰出数学家），非常器重两个学生。据说，每天下午准五点，三人必定相会，一起去苹果园散步，共同讨论问题，交流思想，交流研究心得。据希尔伯特后来回忆说，当年三个年轻人几乎考察了数学领域的每一个王国。可以想见，这应该是希尔伯特的才、学、识获得迅速成长的重要过程。假如没有这段经历，那末希尔伯特在1900年竟能在许多重要

领域中一次提出那样多的著名难题，倒是不易想象的了。

以上我们概述了希尔伯特成功的社会因素。当然，他本人的勤奋努力和艰苦奋斗等内在因素也是保证他获得成就的重要条件。例如，在研究工作中希尔伯特曾耐心地计算过四十多重的重积分。即使面对非常繁重的计算任务，他也是具有计算到底的坚强毅力的。事实上，很难设想缺乏坚强毅力的人能取得科学上的巨大成就（关于希尔伯特的详尽记载请参考C.Reid“Hilbert”一书）！

从方法论观点看，关于如何为青年人创造一个既有良师又有益友的环境，如何采用启发式方法讲授一系列新颖课程，并诱导青年人很快走上科研前沿等问题，显然能从希尔伯特成长的历史规律中，获得应有的解答。

§4　浅谈微观的数学方法论

每一个数学研究工作者都必须精通某些微观的数学方法论，才能有效地开展科研工作，获得丰硕成果。教师们也必须熟知这些方法论才能实行启发式教学法。

我们知道，美籍匈牙利数学家Pólya曾花数十年时间致力于“数学发现”与“解题思想方法”的研究。他的一些著作已被译成中文。特别值得重视的是他所著的《数学中的归纳与类比》（1954年出版）一书。在此书中作者曾选用不少富于启发性的例子说明归纳与类比方法如何成为发现数学真理的重要手段。

十八、十九世纪有突出贡献的数学家欧拉（Euler，1707-1783）和高斯（Gauss，1777-1855）都曾发表过一些经验之谈。欧拉说过：“数学这门科学，需要观察，还需要实验”。高斯也提到过，他的许多定理都是靠归纳法发现的，证明只是补行的手续。

举例来说，欧拉关于多面体的面、顶、棱公式（$F+V-E=2$）

显然就是从一批特殊的凸多面体的观察分析中归纳出来的。高斯青年时代曾著有《算术研究》（1801年出版的数论名著）一书，书中许多结果，包括著名的二次互反律等等，也都是首先从观察、实验、归纳过程中发现的。为什么数学真理如同物理科学领域中的定律和原理那样，有时可以通过实验与归纳方法去发现呢？原因很简单，因为数学对象本身(如数量关系与空间形式等)也具有客观实在性。

历史上许多有贡献的数学家，可以说无例外地都是善于应用“归纳法”与“类比法”去发现真理的能手。尤其是欧拉的许多发现与贡献早已经进入中学数学教材和大学低年级的课程之中，所以讲讲欧拉的一些光辉例子，对青年学生似乎更有教育意义。

为了说明类比法的作用，这里我们来介绍一下数学家伯努利(Bernoulli，1654-1705)的一个级数求和难题，是怎样被欧拉攻破的。伯努利是十七世纪杰出的数学家，他是古典概率论的创始人，对古典微积分学以及级数求和等问题都有贡献。但他没有办法算出自然数倒数平方的级数和$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$。于是，他公开征求这一求和问题的解答，可惜直到他逝世时还未能见到有人解决此难题。这个难题过了数十年后才由欧拉解答出来。欧拉采用的方法就是一种巧妙的类比推理法。

首先，对于只含偶次项的$2n$次代数方程

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}=0\quad(b_0\neq 0),$$

假设有$2n$个互不相同的根

$$\beta_1,\ -\beta_1,\ \beta_2,\ -\beta_2,\ \cdots,\ \beta_n,\ -\beta_n,$$

则得

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}$$

$$=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right).$$

把乘积展开出来，易见x^2项的系数为

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right),$$

以上所述都是代数方程式论中的初等知识。

欧拉考虑了三角方程

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0,$$

他把它看成是只含偶次项的无穷次代数方程。由于此方程含相异根$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，$\pm 3\pi$，…，于是欧拉采用类比法，即仿照上述$2n$次多项式分解成乘积的形式，把这里出现的所谓无限次多项式也照样分解成因式乘积形式

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

这便是著名的“欧拉乘积公式”。这样一来，再把右边的乘积展开出来便发现x^2项的系数是

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots,$$

也就是

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

这样，欧拉便完成了一项非常有趣的发现，给出了伯努利所未能找到的级数和。

据说欧拉发现上述结果后，当时并未能给出严格证明，不免有点又惊又疑。于是他做了数值计算验证，对等式两边分别进行计算，得出的数值都等于1.644934…。算到第七位数字都一致，这才使得欧拉确信他的发现正确无疑。（这和实验物理学家发现物理定律时的态度多么相似！）当然，现今的数学分析教程中已有各种方法可以证明上述结果。

顺便提几句，在现代初、高等数学教育中，特别反映在教材与教学方法中，似乎过于偏重演绎论证的训练，把学生的注意力都吸引到形式论证(逻辑推理)的“严密性”上去，这对于培养学

生的创造力来说实际是不利的。当然，必要的逻辑推理训练不可少；但对于有作为的数学工作者来说，发现和创新比命题论证更重要。因为一旦抓到真理之后，补行证明往往只是时间问题。大数学家高斯早就谈过这种经验。当然也有例外，例如数学上有许多诱惑人心的“猜想”，看来似乎是“真”的，但却证明不了。其实很多猜想未必真正抓到真理，所以事后被证明是错的也不少。

归纳法与类比法是数学方法论中最基本的方法之一，用好了能获得新的成果，乃至完成重要发现。但要真正用好也不容易。首先，要有敏锐的观察力，才能从众多的特例中归纳总结出一般性命题来。“特例”有时是现成的，有时却需要故意构造出来。要用好类比法需要有较丰富的数学知识，知识面越广，在数学思维中可用作类比推理的题材就越多，因而能形成普遍命题的机会（或发现数学一般真理的机会）也就越多。很难设想，知识面很窄的人能完成重大的发现。事实上，利用类比法形成普遍命题的过程是通过“联想—预见”来完成的。联想就要靠已有的知识为基础。

一般说来，归纳与类比在从事数学创造性科学研究活动过程中的作用如下图所示。

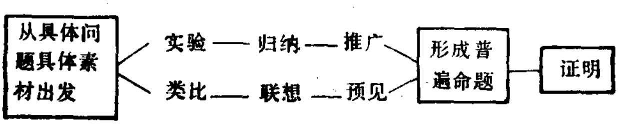

图1-1

形成的“普遍命题”在完成证明之前往往是一种猜想，因此，只有经过严格证明之后才能成为确定的定理或论断。但在许多情况下，“推广”和“预见”的过程中已经蕴含有普遍命题的直观论证或不甚严格的证明。这样，形成普遍命题的这一重要步骤实际已经完成了数学真理的发现工作。当然，从发现到证明有时也往往需要走一段艰苦的路程。

数学史上许多杰出的数学家往往既是发现与发明的能手，又是精于证明技巧的硬手。但是也能遇见这样两种数学家：一种是专长于数学发现的专家，另一种是专长于论证的专家。从创造性数学思维来说，前者擅长于“发散思维”，后者较精于“收敛思维”。

在数学的创造性工作中，“抽象分析法”也是一种常用的重要方法。例如，欧拉解决哥尼斯堡七桥问题时，就是采用了这种方法。欧拉的解法在许多书上都有介绍。解决的基本步骤无非是：把人们步行过桥的问题经过分析，抽象成为一个“一笔画”问题，即一笔能否画出如下图形的问题。

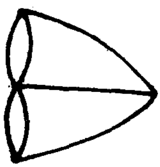

图1-2

欧拉原来是这样想的：既然岛与半岛无非是桥梁的连接地点，两岸陆地也是桥梁通往的地点，那末就不妨把四处地点缩小（抽象）成四个点，并把七条桥表示（抽象）成七条线，这样当然并不改变问题的实质。于是，人们企图一次无重复地走过七条桥的问题即等价于一笔画出上述图形的问题。这样的分析思考方法，就叫做“抽象分析法”或“数学模型法”。这里，一笔画问题中的几何图形就是七桥问题的数学模型。

接着，欧拉又考察了一笔画的结构特征，一笔画有个起点和终点（特别，起点与终点重合时便成为自封图形）。除起点与终点外，一笔画中出现的交点处曲线总是一进一出，故通过交点的曲线总是偶数条。如此说来，一笔画中至多只有两个点（即起点与终点）有可能通过奇数条曲线。我们看图1-2，立即发现四个点都通过奇数条曲线。因此，可以断言它不是一笔能够画出的图形。

抽象分析法还能用来确立新的基本概念，导致数学新学科或新分支的产生。大家知道，随着现代计算机的发展已经产生了一门新的数学分科，叫作“计算理论”。英国数学家图灵（A.M. Turing，1912-1954）的工作在这整个历史发展过程中起着关