

天津科学技术出版社

卓崇培 主编 朱献松 肖兴国 王忠 孟宪慈 编著

FEIXIANXINGWULIXUE

非线性物理学

● 非线性物理学非线性物理学

非线性物理学非线性物理学非线性物理学非线性物理学

非线性物理学非线性物理学非线性物理学

非线性物理学非线性物理学



责任编辑:张炳祥

非线性物理学

卓崇培 主编

朱献松 肖兴国 编著

王 忠 孟宪慈

*

天津科学技术出版社出版

天津市张自忠路189号 邮编 300020

天津新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 13.25 字数 333 000

1996 年 9 月第 1 版

1996 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—2000

ISBN 7-5308-1984-4

0·84 定价:18.00 元

前 言

经多年探索,人们在认知物质世界物理运动规律的过程中,已建成经典物理学相当完美的理论体系。跨入 20 世纪以来,物理学又在高速运动问题及微观世界中取得辉煌成就,并对相邻学科产生了深远的影响。但是,囿于当时仪器精度之不高及观测条件之不善,上述诸理论多为线性理论,以致在相当长的时间内,多数人误以为一切物理运动都必遵循线性规律,即认为环绕我们周围的乃是一个由各种线性规律支配的物质世界。

最早的突破,始于对机械振动的非线性行为的研究,但那时并未动摇人们认为物理理论的主体仍应是线性理论的信念。直至本世纪 60 年代,由于激光科学及以耗散结构理论为代表的现代热力学的发展,非线性理论才在物理学某些领域内开始植根、生发。特别是本世纪以来对于所谓混沌现象的研究,使人们惊奇地看到,有些长期被认为按照决定论方式运动的客体(如单摆),有时也会呈现出某种随机性来。

由于力学、热学、光学领域中非线性理论的相继问世,人们对于周围世界及物质运动规律的认识,也在不断地更新与发展。影响所及,不仅在化学、生物学、医学、天文学领域,甚至在哲学、经济学、社会学等领域,科技工作者也常涉及非线性问题的处理。

本书旨在向关心非线性问题的广大科技工作者提供所需的基本理论知识,以利他们在各自的专业领域内,对非线性现象作更具体、更深入的研讨。

参加本书编写的有:卓崇培、朱献松、肖兴国、王忠、孟宪慈(卓崇

培任主编)。各篇、章执笔人分工如下:卓崇培:总论、第一篇的第一、二、四章;肖兴国:第二篇的第一、二、三、四、五章;朱献松:第三篇的第一、四、五章;王忠:第三篇的第二、三、六章;孟宪慈:第一篇的第三章。由于编著者水平所限,错讹疏漏之处难免,敬希广大读者不吝指正为盼。

编著者

1995年10月

目 录

总 论	(1)
-----------	-----

一、物理学从线性走向非线性	(1)
二、不弥散的波包——孤立子	(4)
三、自组织源于非线性	(9)
四、貌似随机的现象——混沌	(12)
五、非线性系统的基本概念和性质	(17)
参考文献	(22)

第一篇 非线性力学	(24)
-----------------	------

第一章 非线性振动	(26)
-----------------	------

§1 非线性振动的特点	(27)
§2 非线性系统的自由振动	(28)
§3 定常解及其稳定性	(34)
§4 等效线性化	(37)
§5 相平面法 奇点分类	(42)
§6 非线性系统的受迫振动	(49)
§7 非线性驱动共振和参量共振	(54)
参考文献	(61)

第二章 流体中的非线性波	(62)
--------------------	------

§1 流体力学基本方程的回顾	(62)
§2 理想流体中的有限振幅波	(71)

§ 3 冲击波的形成距离 间断面的位置	(77)
§ 4 频散流体中的有限振幅波	(85)
§ 5 孤立波方程的解法 拉克斯理论	(92)
§ 6 声散射声	(101)
参考文献	(105)

第三章 固体中的非线性波 (107)

§ 1 应变矩阵 运动方程	(107)
§ 2 各向同性弹性体的弹性势能	(111)
§ 3 各向同性弹性体中的非线性波	(114)
§ 4 各向异性弹性体中的非线性波	(118)
参考文献	(126)

第四章 非线性系统中的混沌运动 (127)

§ 1 两类确定论方程 两种随机性	(127)
§ 2 保守系统中的随机性	(131)
§ 3 耗散系统中的随机性	(134)
§ 4 奇怪吸引子的刻划	(140)
§ 5 通向混沌之路	(146)
参考文献	(148)

第二篇 非线性热力学 (149)

第一章 线性非平衡态热力学要义 (152)

§ 1 熵和热力学第二定律	(152)
§ 2 局域平衡假设	(155)
§ 3 熵平衡方程	(157)
§ 4 昂色格倒易关系	(162)
§ 5 最小熵产生原理	(166)
参考文献	(170)

第二章 非线性非平衡态的稳定性 (171)

§ 1 热力学的非线性问题	(171)
---------------	-------

§ 2 普遍发展判据	(173)
§ 3 热力学系统的稳定性判据	(177)
§ 4 平衡结构和耗散结构	(183)
§ 5 自组织现象	(187)
§ 6 耗散结构形成的条件	(191)
参考文献	(194)
第三章 非线性热力学的动力学稳定性分析	(195)
§ 1 反应扩散方程	(195)
§ 2 线型稳定性原理	(197)
§ 3 相空间和奇点分类	(200)
§ 4 极限环	(207)
§ 5 分支理论初步	(210)
参考文献	(216)
第四章 布鲁塞尔器	(217)
§ 1 洛特卡—沃泰拉模型	(217)
§ 2 布鲁塞尔器	(220)
§ 3 定态耗散结构分支	(225)
§ 4 周期耗散结构分支	(236)
参考文献	(240)
第五章 网络热力学	(241)
§ 1 电网络与热力学系统	(241)
§ 2 键图	(245)
§ 3 拓扑热力学	(252)
§ 4 网络分析方法及其应用	(257)
参考文献	(263)
第三篇 非线性光学	(264)
第一章 光学介质的非线性极化	(265)
§ 1 线性光学与非线性光学	(265)

§ 2	非线性极化率张量	(267)
§ 3	非简谐振子模型	(271)
§ 4	密度矩阵方程	(275)
§ 5	非线性极化率的微观表达式	(281)
§ 6	对 $\chi^{(n)}$ 的局域场修正	(284)
§ 7	非线性极化率的对称性	(286)
参考文献		(289)
第二章	非线性介质中的耦合波	(290)
§ 1	麦克斯韦方程和波动方程	(290)
§ 2	耦合波方程	(292)
§ 3	非线性介质中的电磁场能	(305)
参考文献		(308)
第三章	二级非线性光学效应	(309)
§ 1	三波相互作用方程的解析解	(309)
§ 2	光学整流与二次谐波	(315)
§ 3	光混频效应	(324)
§ 4	光学参量振荡	(328)
参考文献		(334)
第四章	四波相互作用过程	(335)
§ 1	三次谐波的产生	(335)
§ 2	用高斯光束产生三次谐波	(338)
§ 3	共振四波混频	(347)
§ 4	相干喇曼混频	(350)
§ 5	自聚焦	(354)
参考文献		(361)
第五章	受激散射	(363)
§ 1	受激喇曼散射	(363)
§ 2	受激喇曼散射的增益	(368)
§ 3	斯托克斯—反斯托克斯耦合	(370)

§ 4	相干反斯托克斯喇曼散射	(375)
§ 5	受激极化声子散射	(379)
§ 6	受激自旋反转喇曼散射	(382)
§ 7	受激布里渊散射	(385)
	参考文献	(390)
第六章	位相复共轭光学	(393)
§ 1	位相共轭波	(393)
§ 2	四波混频产生位相共轭波	(396)
§ 3	受激散射的位相共轭波	(403)
§ 4	光学位相共轭的应用	(406)
	参考文献	(410)

总论

一、物理学从线性走向非线性

几个世纪以来,物理学研究的主要是线性问题,即运动方程为线性方程,物质方程(物质对运动的响应的表式)为线性方程的情形.无论在力、热、声、光、电现象或在微观世界中,研究工作的状况均是如此.究其原因,一则因为当时的实验手段不甚先进,所用仪器不够精密,在那些仪器的精度下归纳出来的线性理论,已能解释人们在相当广阔范围内观察到的物理现象;二则因为数学上的困难较大,迫使人们不得不把一些复杂的实际问题简化为线性问题,以便求解.

近年来通过大量的实验研究发现,在自然科学许多领域都存在一些用线性理论无法解释的现象.对这些非线性现象的研究,已成为人们关注的热点.在这方面,物理学首当其冲,已经取得相当的成功.

声—声散射是一类重要的非线性物理现象.根据线性声学理论,如有两束不同频率的波沿不同的方向传播,则当它们在空间相遇时,彼此之间并不产生相互作用;也就是说,在它们重又分开之后,就像什么也没发生一样.但从非线性声学观点来看,情况则有不同.因为当空间内有某列波传播时,介质的原有性质将因受到该列波的扰动而有所改变.如果介质原来是空间均匀的,扰动的结果极有可能使这种均匀性遭到破坏^①;这时,如果被扰动的介质中还存在另外一列波,它就要遭到该非均匀介质的散射,或者说,将会发生声波与

① 平面波在其中传播的情形除外.

声波之间的散射。

非线性光学 (一度称为强光光学)，是随着激光的问世而发展起来的一个新的光学分支。它主要研究强相干光与物质相互作用所产生的各种非线性光学现象，即物质对入射电磁场的非线性响应；其中，人们最关心的一点就是物质的极化如何随外加光场而变。

声学中所能达到的非线性程度，远大于非线性光学介质中所能达到的程度。一般来说，当声强达到 10^{-3} 瓦/厘米² 时，我们就能清楚地观察到很强的非线性效应。但在光现象中，即使强度高达 3×10^8 瓦/厘米²，我们所能观察到的非线性效应也不到声学中的 0.01%^①。因此，通过对声现象的研究，我们就能非常容易地进入在光学中不易实现的非线性物理这一新的领域。

宏观量子效应是在宏观尺度上观察到的量子效应。超导环内磁通量的量子化即其一例。将一金属环置于外磁场中，降温使其进入超导态，可观察到磁力线均被排斥到超导体之外，即只在环内及环外的空间存在；这是迈斯纳(Meissner)效应。再将外磁场撤除，又发现超导环内的磁通量 Φ 的取值是量子化的：

$$\Phi = n\Phi_0. \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

式中 $\Phi_0 = hc/2e = 2.07 \times 10^{-15}$ 韦伯，称为磁通量子。伦敦(F. London)于 1950 年预言了这一现象^①，到 1961 年才在实验上被观测到^②；这是超导态显示出宏观量子效应的第一个实验例证。其后，陆续发现的宏观量子效应还有：量子隧道效应，又称约瑟夫森(Josephson)效应^③；量子霍尔(Hall)效应^④；液氦超流相⁴He I 和³He A，³He B 中的某些宏观量子效应^{③⑤}。

一般来说，当系统处于某种特定条件(如极低温、高压或高密度等等)之下时，由于系统内部非线性的自相互作用，组成系统的粒子之间有可能相互结合，形成彼此束缚的粒子对；这些粒子对都处于相

① 出现这种差别的根本原因可能在于洛伦兹协变理论的线性特性，而任何封闭的伽利略协变理论都是非线性的。

同的状态,致使整个系统形成高度有序和长程相干的状态. 因为在这种高度有序、长程相干的状态中,所有粒子、粒子对的行为几乎完全相同,这时大量粒子、粒子对的整体运动,将和其中任何一个粒子、粒子对的运动规律一样. 由于单个粒子的运动是量子化的,因而大量这类粒子的运动就有可能显现出宏观量子效应来. 研究表明:宏观量子效应实质乃是具有波动—粒子二象性的微观多粒子系统在非线性的自相互作用下,作孤立子运动时显示出来的一种可观测的集体效应;在非线性的作用下,微观粒子遵从的已不是薛定谔方程、狄拉克方程和克莱因—戈登方程等线性偏微分方程,而遵从着一些非线性的偏微分方程(如非线性薛定谔方程、非线性克莱因—戈登方程等)即它们不再遵从线性量子力学规律,而遵从非线性量子力学的规律.

线性与非线性,是事物客观属性及运动规律中对立、统一的两个方面. 从原则上讲,线性是特殊的、相对的,而非线性才是普遍的、绝对的. 线性系统的主要特点是:系统的整体性质可由组成它的各个子系的叠加而得出. 这就是熟知的线性叠加原理. 许多实际系统在一定条件下可以看作线性系统. 由于在一定条件下线性是一个很好的近似,以及对线性系统的处理比较简单,因而长期以来,人们对线性问题研究得比较充分,而对非线性问题的重要性与普遍性则认识不足,并很少研究.

物理学中对于非线性问题的研究,始于机械振动,而后扩及至流体力学和声学领域. 60年代以来,随着激光的问世,一门新兴的学科——非线性光学应运而生;同一时期,热力学研究也从线性步入非线性阶段. 量子非线性问题的研究,早在20年代即由德布罗意和爱因斯坦从理论角度提出,其后陆续有所发展. 随着认识的深化,非线性物理学必将逐步得到发展和完善^①.

^① 出现这种差别的根本原因可能在于洛伦兹协变理论的线性特性,而任何封闭的伽利略协变理论都是非线性的.

二、不弥散的波包——孤立子

早在 1834 年 8 月,爱丁堡皇家学会的拉塞尔(J. S. Russel)就曾发现一个奇特的现象:有两匹马拉一条船沿运河迅速前进,当船突然停止时,河道中为船所推动的一大堆水并不停止,而是积聚在船头前面激烈翻滚,然后水浪突然呈现出一个很大的、孤立的凸起,那是一个滚圆而且光滑、周界分明的水堆. 它以巨大的速度向前推进,并且没有明显地改变其形状或降低其速度. 后来,在行经很长一段路程后,该水堆的高度渐渐下降,终于在运河的拐弯处归于消失.

对于上述现象,线性理论无法作出合理的解释. 因为按照传统的观点,上述周界分明而又光滑的水堆只能是一个波包,而按照传统的观点来看,波包又是由一系列不同频率的平面波叠加而成的,由于介质中的波速与频率有关,所以在某一时刻形成波包的那些平面波也将因其传播速度之不同,而使其合成图像随之发生变化;经历的时间愈长,变化愈大,最终则导致波包的完全消失. 也就是说,即使是在无阻尼的介质中,仅仅由于波速与频率有关(色散现象)这一因素,波包也是很快就会弥散的.

为了弄清上述不弥散水堆的出现是否带有偶然性,拉塞尔本人及许多学者曾在浅水槽中作过许多实验,并用多种方式激励水波,结果都观察到了类似的现象,可见该现象的出现并非偶然. 这就给人们提出一个崭新的研究课题.

对上述不弥散的波包所作的理论分析,最早是由两位德国科学家科特韦格(D. J. Korteweg)和德夫里斯(G. de Vries)在 1895 年提出来的^[6]. 他们认为,这种不弥散的波包是由非线性效应与色散现象相互抵消所致,并称之为孤立波. 满足粒子条件的孤立波称为孤立子(Soliton),它不仅以水波的形式出现,也出现于固体和其它凝聚态物质中.

关于孤立波的形成,可作如下理解.

对于一个单纯的色散过程,设波动方程的形式为

$$\varphi + \varphi_{xxx} = 0 \quad (1)$$

式中, $\varphi \equiv \partial \varphi / \partial t$, $\varphi_{xxx} \equiv \partial^3 \varphi / \partial x^3$. 此方程的解为

$$\varphi(x, t) = \sum_k a_k e^{i(kx - \omega t)} \quad (2)$$

将此代入式(1), 得到

$$\omega = -k^3$$

不难看出, 式(2)所描述的波动系由一系列沿负 x 轴传播的单色平面波叠合而形成的波包. 由于各个分波的波矢量 k 值的不同, 其传播速度也各不相同. 因此, 即使初始时刻各个分波的合成结果呈波包状, 以后也会因各自波速的不等而最终导致波包的变形和迅速地弥散.

另一方面, 对于一个无色散的过程来说, 如果它可用下面的非线性方程

$$\varphi - 6\varphi\varphi_x = 0 \quad (3)$$

来描写, 其解应取如下形式:

$$\varphi = \varphi(x + 6\varphi t)$$

它表示沿负 x 轴传播的一系列非线性波, 其传播速度 $v = 6\varphi$ 与波幅的大小成正比, 从而也依赖于振动的振幅. 这一性质是非线性振动和非线性波所特有的, 正是它导致了波包在传播时发生的形变: 由于波幅较大处波的传播速度大于其前方波幅较小处的传播速度, 因而在传播过程中, 前者将逐渐赶上后者, 而使波包前半部的形状变陡, 即使它的前半部凝聚变窄.

科特韦格和德夫里斯将上述两过程结合起来, 提出如下方程:

$$\varphi - 6\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0 \quad (4)$$

用以描述浅水中的非线性波. 此式即是非线性色散流体力学中著名的 KdV 方程, 其中第二项为非线性项, 第三项为色散项^①. 方程(4)的解有如下形式:

$$\varphi(x, t) = -2a^2 \operatorname{sech}^2[a(x - 4a^2t - x_0)] \quad (5)$$

① 忽略了介质对波动的吸收.

式中 x_0 及 a 为常数。式(5)所描述的波动具有非常奇特的性质,它是幅度为 $2a^2$, 宽度为 a^{-1} , 波速为 $4a^2$ 的沿正 x 轴传播的一种孤立波(图1)。

KdV 方程是1895年提出来的,但是由于求解方面的困难而搁置了多年。直到1965年,才由扎布斯基(N. J. Zabusky)和克鲁斯科尔(M. D. Kruskal)用电子计算机求

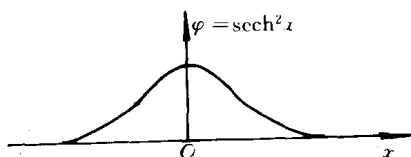


图1

出它的解,即通常所称的孤立子解。后来发现在一些不同领域内KdV方程也都成立,因此它可看作数学物理中的基本方程之一。

KdV方程中的色散项使波包有变得平坦的趋势,其非线性项则使波包有所谓自凝聚的趋势。这两种趋势相互抗衡,当它们达成平衡时,波包即可保持固定的形状而不致弥散。

在不同领域中,由于参与波动过程的物理量不同,孤立子的物理含义也不同。如在等离子体物理中,由于参与波动过程的物理量是电场强度,这时,孤立子代表的就是局域性的电场,它具有准粒子的性质:有确定的质量、能量和动量,是一类非线性的实体。

两个孤立子相遇发生相互作用时,是不遵从线性叠加原理的,它们彼此分开后,又能保持各自原来的形状和速度继续向前传播;孤立子的粒子性质,在此得到充分的显示。

通常把描述波动在空间内作定域分布,而且在有限时间内表现相对稳定的那些非线性方程,都称作孤立子方程。除上述KdV方程(4)外,常见的孤立子方程还有^[7]:

非线性薛定谔(Schrödinger)方程(简称NLS方程) 这类方程的最简单形式为

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi = 0 \quad (6)$$

其解呈钟形,即

$$\varphi(x, t) = 2a \operatorname{sech}[2x(x - vt - x_0)] \quad (7)$$

式中 a 与 x_0 各为常数; 形状大体如图 2 所示.

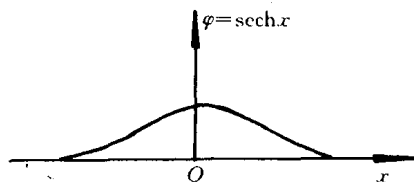


图 2

正弦 (sine) 克莱因 (Klein) — 戈登 (Gorden) 方程 (简称 sKG 方程或 sG 方程) 这类方程的最简单形式为

$$\varphi_{xx} - \varphi_u = \sin \varphi \quad (8)$$

其解有两种类型. 一种类型是扭折解 (扭折与反扭折)

$$\varphi_1(x, t) = 4 \operatorname{tg}^{-1} [\exp \{ \pm (x - vt - x_0) / \sqrt{1 - v^2} \}] \quad (9)$$

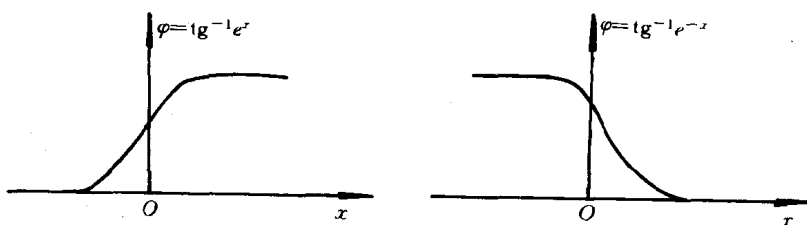


图 3

式中 x_0 为常数; 形状大体如图 3 所示. 另一种类型是呼吸解

$$\varphi_2(x, t) = 4 \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{q \sin \omega t}{\omega q (x - x_0) \cosh} \right] \quad (10)$$

式中 $q^2 + \omega^2 = 1$, q 与 h 各为常数; 形状大体如图 4 所示. 这种解描述一种脉动式的过程, 可以看作是一种受约束的孤立子—反孤立子对. 呼吸解也称作呼吸子.

φ 场方程 这类方程的最简单形式为

$$\varphi_{xx} - \varphi_u = -\varphi + \varphi^3 \quad (11)$$

它也可以看作是描述处在势场

$$V = \frac{1}{4} \varphi^4 - \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{4} (\varphi^2 - 1) + \frac{1}{4}$$

中的波动过程的方程, 其解呈扭折—反扭折形, 即

$$\varphi(x, t) = \pm \operatorname{tgh}[r(x - vt) + \delta] \quad (12)$$

式中 r 与 δ 各为常数;形状大体如图 5 所示.

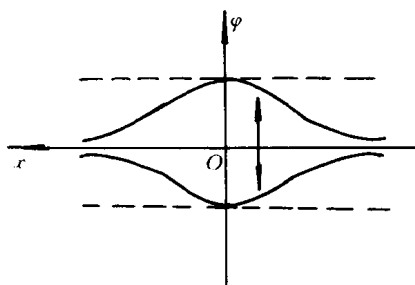


图 4

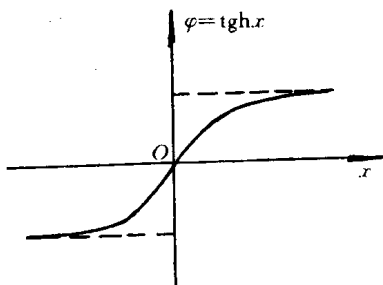


图 5

上述诸方程的解,可以划分成三种类型:KdV 方程与 NLS 方程的钟形解,它们表示波动定域于较小的空间范围中,一旦波动传过后,介质即恢复原有状态;sKG 方程的呼吸解,它表示一种强度作周期性变化的波包;sKG 方程和 φ 场方程的扭折解,它们表示在两种具有相同能量和不同构形的状态之间的转变过程,当扭折在空间某处传过后,该处介质的构形将发生转变.

各种类型的孤立子方程,在物理学的不同领域中都有着广泛的应用.如:KdV 方程对于浅水中的表面波、等离子体中的电磁波与声波、非简谐的晶格振动等;NLS 方程对于深水中的非线性波,电介质中强激光的自聚焦、超导孤立子等;sKG 方程对于晶格位错的传播、铁磁体中畴壁的运动、超导约瑟夫森(Josephson)结、基本粒子模型等; φ 场方程对于场论模型、相变模型、铁电体的相变等.

目前,可以求得上述定域孤立子解的,只限于极有限的几个一维非线性方程.对于二维及三维的非线性方程,迄今仍然难于求得解析形式的解,而只能通过计算机去求数值解或进行模拟.

微观粒子具有明显的波动-粒子二象性,这是众所周知的事实.现在我们又看到,对于宏观的波动——一种连续分布的波场,也可以分裂、凝聚为许多孤立子,因此有理由认为,无论在微观世界或在宏