高等学校教学用書

解析几何学

第二卷

Б. Н. 狄隆涅
Д. А. 拉伊可夫 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析几何学

第二卷

Б. Н. 狄隆涅
Д. А. 拉伊可夫 著
裘光明等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的狄隆涅(Б. Н. Делоне)和拉伊可夫(Д. А. Райков)合著“解析几何学”第二卷(Аналитическая Геометрия II) 1949年版譯出。在苏联高等教育部批准的綜合大学数学、力学和天文等專業解析几何学一課的大綱里。本書是主要参考書之一。

第二卷包括全書的第三和第四兩部分。第三部分內容計有：空間中的直綫和平面，橢圓面、双曲面和拋物面，二阶曲面的一般理論。第四部分講述的是射影平面上和射影空間中的解析几何。

本書(第二卷)由南开大学陈翹、周学光和北京大学裘光明、程庆民、章学誠等同志共同翻譯。

解 析 几 何 学

第 二 卷

Б. Н. 狄隆涅，Д. А. 拉伊可夫著

裘光明等譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

商務印書館上海廠印刷　新华書店总經售

統一書号 13010·342 开本 850×1168 1/32 印張 17 2/16 插頁 5 字數 419,000 印數 1—4,000

1957年11月第1版 1957年11月上海第1次印刷 定价(8)¥2.40

第二卷 序言

"解析几何学"第二卷(最后一卷)包括兩部分:講述空間中的度量的和仿射的解析几何的第三部分,和講述射影平面上和射影空間中的解析几何的第四部分。像在第一卷里一样,只要可能,与"解析的"叙述平行,还給出以正交映射和仿射映射(在第四部分里还有射影映射)的几何理論为基础的"綜合的"叙述。对应的各节虽然也用大字排印,但是加上了星号。当然,在进行"解析的"叙述时,形式上完全不依賴于"綜合的"叙述;但是,只有在同时熟悉了兩方面的知識时,才能对問題有全面的了解。

由于篇幅不够,不得不在叙述中抽去了二阶曲面在原来坐标系里的位置的理論以及二阶曲面的平面截綫的正交不变量理論。

关于二次多項式的不变量和半不变量的理論,我們所采用的叙述受到彼得·賽尔盖耶維契·莫勤諾夫在莫斯科大学物理系講授的二阶曲面理論課程的实地影响。П. С. 莫勤諾夫还仔細地閱讀了本卷的手稿,而且提出了一系列有价值的意見。为此我們特向他表示衷心的感謝。

狄 隆 涅 (Б. Н. Делоне)
拉伊可夫 (Д. А. Райков)
1949年2月25日于莫斯科

目　次[①]

① 加兩个星号的各节和各段都是用小号字排印的。至于加一个星号的各节，請看序言。

第四部分　射影平面上和射影空間中的解析几何

第三部分　空間解析几何

§ 124. 引論：曲面方程

1. 在笛卡兒坐标中由方程表示的曲面　例

定义　空間中坐标 x, y, z 滿足給定的方程

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

的所有点的集合，称为由这个方程所表示的曲面。

我們来研究几个例子；为簡便起見，我們采取直角坐标系統。

例 1. 方程

$$x^2+y^2+z^2-25=0,$$

显然表示以原点为中心，半徑为 5 的球面（球的表面）。

例 2. 方程

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

显然只被一个三数組 (x, y, z)，即 $(0, 0, 0)$ 所滿足，也就是說，这方程所表示的整个“曲面”变成一个点——坐标原点。

例 3. 方程

$$x^2+y^2+z^2+7=0$$

不被任何的三数組 (x, y, z) 所滿足，也就是說，它所表示的“曲面”不含任何点。这种“曲面”称为零曲面。

例 4. 方程

$$z-h=0 \quad \text{或} \quad z=h,$$

这里 $h>0$，表示平行于 xy 平面的一个平面，而且，如果把 xy 平面看成水平的，則这个平面在它之上，与它的距离是 h。

例 5. 方程

$$x^2+y^2=0$$

被所有 $x=y=0$（而 z 可以是任意数）的三数組 (x, y, z) 所滿足，而且仅被这样的三数組所滿足；也就是說，由这个方程所表示的“曲

面"变成了一条直綫—— z 軸。

例 6. 方程

$$(x^2+y^2+z^2-25)(x^2+y^2)=0$$

被那些至少使上式左端因子之一成为零的点所滿足，而且仅被它們所滿足，因为当而且只当兩个因子之一为零时，它們的乘积才为零。因此，这个方程表示由例 1 中所討論的球面和例 5 中所討論的穿过此球面的直綫(z 軸)所組成的一个"曲面"。

2. 柱面 在方程(1)中，可能有某一个坐标实际上不出現。例如設 z 不出現，于是方程具有下面的形狀：

$$f(x, y)=0。\tag{2}$$

方程(2)看作是 xy 平面上笛卡兒坐标中的方程，它表示某一条曲綫；我們用 L 来表示它。我們現在要研究，如果把方程(2)看作空間笛卡兒坐标的方程，則它代表一个怎样的曲面。

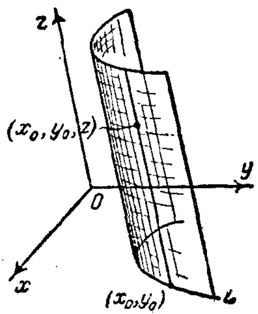

圖 1

設 (x_0, y_0) 是曲綫 L (圖 1)的任意点。如果我們在空間中取这样一个点，它的横坐标仍是 x_0，縱坐标仍是 y_0，而立坐标是任意的 z，則該点的坐标 (x_0, y_0, z) 显然滿足方程(2)，因为 x_0, y_0 兩个値滿足方程，而这方程并不对 z 加任何限制。因此，方程(2)所表示的曲面包含曲綫 L 上的每个点，同时又包含經过这点所作平行于 z 軸的整条直綫。显然，所討論的曲面不包含任何其他的点。事实上，如果 (x_0, y_0, z_0) 是坐标滿足方程(2)的任意点，則 xy 平面上的点 (x_0, y_0) 就处在曲綫 L 上，这説明点 (x_0, y_0, z_0) 是在过曲綫 L 上的这个点所作平行于 z 軸的直綫上。

通过某一条曲綫上的每一点作互相平行的直綫，它們所構成的曲面，称为柱面或柱狀曲面。这些直綫称为柱面的母綫而曲綫

称为它的导綫。

我們看到，空間中只包含兩个笛卡兒坐标的方程表示一个柱面，它的母綫平行于未出現的坐标的軸，它的导綫处在已出現的坐标的軸所構成的平面上，而且在这个平面內由同一个方程来表示。反之，显然每一个这样的柱面都可用上述形狀的方程来表示。

3. 錐面 如果某曲面上有一个点 M_0，它具有这样的性質：对于曲面上每一个异于 M_0 的点 M，曲面必包含整条直綫 M_0M，则該曲面称为錐面或錐狀曲面。直綫 M_0M 称为母綫，这些直綫的公共点 M_0 称为錐面的頂点。

如果以同一个任意的数 t 去乘函数 $F(x, y, z)$ 的所有的元，得到的是原来的函数乘上某一个只依賴于 t 的系数，

$$F(tx, ty, tz)=\varphi(t)F(x, y, z), \tag{3}$$

則这个函数称为齐次的。若 $F(x, y, z)$ 是齐次函数，則对于任意的笛卡兒坐标，方程（1）都表示一个以坐标原点为頂点的錐面。事实上，若点 (x_0, y_0, z_0) 满足这方程，則根据公式（3），点 (tx_0, ty_0, tz_0) 也满足它，这里 t 可以取任意的实数值，就是說，若点 (x_0, y_0, z_0) 在曲面上，則經过这点和坐标原点的整条直綫都在这曲面上（圖 2）。

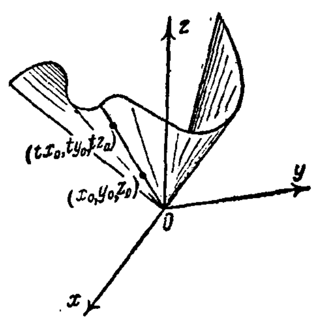

圖 2

例如，方程

$$x^2+y^2-z^2=0 \tag{4}$$

代表錐面，这是因为方程的左端是齐次函数：

$$(tx)^2+(ty)^2-(tz)^2=t^2(x^2+y^2-z^2)。$$

在下段中我們將会看到，在直角坐标的情形，这是由一条与 z 軸相交成 45° 角的直綫繞 z 軸旋轉而得到的正圓錐面。

4. 旋轉曲面 一个曲面，如果包含某一个点就包含由这个点繞某条固定直綫旋轉成的整个圓周，則这种曲面称为旋轉曲面