

高等学校教学用书

# 解析几何学

第二卷

В. Н. 狄隆涅 著  
Д. А. 拉伊可夫

高等教育出版社

电子学研究所图

51.5-1

309

2 (1)

高等学校教学用书



# 解析几何学

第二卷

Б. И. 狄隆涅  
А. А. 拉伊可夫 著  
裘光明等 译

高



版社

本書系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的狄隆涅(Б. Н. Делоне)和拉伊可夫(Д. А. Райков)合著“解析几何学”第二卷(Аналитическая Геометрия II) 1949年版譯出。在苏联高等教育部批准的綜合大学数学、力学和天文等專業解析几何学一課的大綱里。本書是主要参考書之一。

第二卷包括全書的第三和第四兩部分。第三部分內容計有：空間中的直綫和平面，橢圓面、双曲面和拋物面，二阶曲面的一般理論。第四部分講述的是射影平面上和射影空間中的解析几何。

本書(第二卷)由南开大学陈騭、周学光和北京大学裘光明、程庆民、章学誠等同志共同翻譯。

## 解 析 几 何 学

### 第 二 卷

Б. Н. 狄隆涅, Д. А. 拉伊可夫著

裘光明等譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

商務印書館上海廠印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·342 开本 850×1168 1/32 印張 17.2/16 插頁 5 字數 419,000 印数 1—4,000

1967年11月第1版 1967年11月上海第1次印刷 定价(8) 2.40

## 第二卷 序言

“解析几何学”第二卷(最后一卷)包括两部分:讲述空间中的度量的和仿射的解析几何的第三部分,和讲述射影平面上和射影空间中的解析几何的第四部分。像在第一卷里一样,只要可能,与“解析的”叙述平行,还给出以正交映射和仿射映射(在第四部分里还有射影映射)的几何理论为基础的“综合的”叙述。对应的各节虽然也用大字排印,但是加上了星号。当然,在进行“解析的”叙述时,形式上完全不依赖于“综合的”叙述;但是,只有在同时熟悉了兩方面的知識时,才能对問題有全面的了解。

由于篇幅不够,不得不在叙述中抽去了二阶曲面在原来坐标系里的位置的理論以及二阶曲面的平面截綫的正交不变量理論。

关于二次多項式的不变量和半不变量的理論,我們所采用的叙述受到彼得·賽尔盖耶維契·莫勤諾夫在莫斯科大学物理系講授的二阶曲面理論課程的实地影响。И. С. 莫勤諾夫还仔細地閱讀了本卷的手稿,而且提出了一系列有价值的意見。为此我們特向他表示衷心的感謝。

狄 隆 涅 (Б. Н. Делоне)

拉 伊 可 夫 (Д. А. Райков)

1949年2月25日于莫斯科

# 目次<sup>①</sup>

## 第二卷 序言

## 第三部分 空間解析几何

|                                                                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 124. 引論: 曲面方程.....                                                                                                                                          | 1  |
| 1. 在笛卡兒坐标中由方程表示的曲面, 例(1) 2. 柱面(2) 3. 錐面(3) 4. 旋轉曲面(3) 5. 在笛卡兒坐标变换下曲面方程的变换(4) 6. 曲面的分类(5) 7. 平面截曲面的截綫(5) 8. 曲面的水平綫圖(6)                                         |    |
| 第六章 空間中的平面和直綫.....                                                                                                                                            | 7  |
| 第一篇 空間中的平面.....                                                                                                                                               | 7  |
| § 125. 平面, 作为一阶曲面.....                                                                                                                                        | 7  |
| § 126. 表示同一个平面的一次方程.....                                                                                                                                      | 10 |
| § 127. 按方程作平面.....                                                                                                                                            | 11 |
| § 128. 按各种已知条件求平面的方程.....                                                                                                                                     | 14 |
| 1. 已知在一条坐标軸上的截距和在通过該軸的兩個坐标平面上的截痕的斜率(14) 2. 已知一个点和与平面共面的兩個不共綫的向量(14) 3. 已知三个点(15) 4. 已知在坐标軸上的三个截距(16)                                                          |    |
| § 129. 平面的参数方程.....                                                                                                                                           | 17 |
| § 130. 把点的坐标代入平面方程左端的结果.....                                                                                                                                  | 18 |
| 1. 綫性表达式 $Ax + By + Cz + D$ 的正負号的几何意义(18) 2. 綫性不等式的几何意义(19) 3. 綫性表达式 $Ax + By + Cz + D$ 的絕對值的几何意义(19) 4. 綫段被平面所分成的比值, 已知新坐标平面的方程求笛卡兒坐标变换(20) 5. 平面方程法化的問題(21) |    |
| § 131. 空間中平面的傾斜度.....                                                                                                                                         | 21 |
| § 132. 平面方程的法化. 从点到平面的距离.....                                                                                                                                 | 22 |
| 1. 法化因子(22) 2. 平面的法化方程. 从点到平面的距离(23) **3. 向量 $(A, B, C)$ 作为綫性函数 $Ax + By + Cz + D$ 的梯度(24) **4. 在一般笛卡兒坐标系統中平面方程的法化(24) 5. 平面方程的海色法式(24)                       |    |
| § 133. 空間中兩個平面的相互位置的三种可能情形. 兩個平面平行的条件.....                                                                                                                    | 25 |
| § 134. 兩個平面之間的角.....                                                                                                                                          | 27 |

① 加两个星号的各节和各段都是用小号字排印的。至于加一个星号的各节, 請看序言。

3301438

|                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 135. 平面束 .....                                                                                                                                  | 28 |
| **§ 136. 三个平面的相互位置的八种可能情形 .....                                                                                                                   | 29 |
| § 137. 平面把 .....                                                                                                                                  | 31 |
| <b>第二篇 空間中的直綫</b> .....                                                                                                                           | 33 |
| § 138. 空間中直綫的方程 .....                                                                                                                             | 33 |
| 1. 經过已知点朝着已知方向的直綫的参数方程(33)    2. 直綫的标准方程(34)    3. 直綫的法化方程(36)    4. 直綫的归范方程(37)    5. 直綫的普遍方程(38)                                                |    |
| § 139. 空間中兩条直綫的相互位置 .....                                                                                                                         | 41 |
| § 140. 点到直綫的距离 .....                                                                                                                              | 42 |
| § 141. 兩条直綫之間的角和距离 .....                                                                                                                          | 43 |
| 1. 兩条直綫之間的角. 兩条直綫的垂直条件(43)    2. 兩条直綫之間的距离(44)                                                                                                    |    |
| <b>第三篇 空間中的平面和直綫</b> .....                                                                                                                        | 46 |
| § 142. 空間中平面和直綫的相互位置 .....                                                                                                                        | 46 |
| § 143. 平面和直綫之間的角, 平面和直綫的垂直条件 .....                                                                                                                | 47 |
| 1. 平面和直綫之間的角(48)    2. 在直角坐标中平面和直綫的垂直条件(49)                                                                                                       |    |
| § 144. 关于寻求平面方程和直綫方程的几个問題 .....                                                                                                                   | 50 |
| <b>第七章 橢圓面, 双曲面, 拋物面</b> .....                                                                                                                    | 56 |
| <b>第一篇 在标准坐标系統中的橢圓面, 双曲面和拋物面</b> .....                                                                                                            | 58 |
| § 145. 橢圓面的标准方程和普遍形狀 .....                                                                                                                        | 58 |
| 1. 橢圓面的标准方程(58)    2. 橢圓面的对称平面, 对称軸和对称中心(58)    3. 橢圓面的普遍形狀(58)    4. 扁的和長的旋轉橢圓面, 球面(60)                                                          |    |
| § 146. 双曲面和二阶錐面的标准方程和普遍形狀 .....                                                                                                                   | 60 |
| 1. 双曲面的标准方程(60)    2. 双曲面的对称平面, 对称軸和对称中心(61)    3. 單叶双曲面的普遍形狀(61)    4. 双叶双曲面的普遍形狀(62)    5. 單叶和双叶旋轉双曲面(63)    6. 二阶錐面(64)    **7. 共漸近錐面的双曲面族(65) |    |
| § 147. 拋物面的标准方程和普遍形狀 .....                                                                                                                        | 66 |
| 1. 拋物面的标准方程(66)    2. 拋物面的对称平面和对称軸(66)    3. 橢圓拋物面的普遍形狀(66)    4. 双曲拋物面的普遍形狀(68)。                                                                 |    |
| § 148. 二阶曲面的直母綫 .....                                                                                                                             | 70 |
| 1. 單叶双曲面的直母綫(72)    2. 双曲拋物面的直母綫(78)    3. 二阶錐面的直母綫(82)    4. 二阶柱面的直母綫(82)    **5. 經过任意三条兩兩相錯的直綫的二阶曲面的作圖法(83)                                     |    |
| § 149. 二阶曲面的圓形截綫 .....                                                                                                                            | 88 |

1. 預各知識(84) 2. 橢圓面, 雙曲面, 二階錐面, 橢圓拋物面和橢圓柱面的圓形截綫(84) 3. 臍点(89) 4. 其他二階曲面的圓形截綫(90)

\*第二篇 橢圓面(几何理論).....90

\*§ 150. 橢圓面的仿射性質 .....91

1. 橢圓面作为任意球面的仿射像(91) 2. 橢圓面的中心(91) 3. 橢圓面的徑平面(91) 4. 平面截橢圓面的截綫(92) 5. 橢圓面的直徑(92) 6. 橢圓面的共軛的直徑和徑平面(93) 7. 橢圓面的共軛的三條直徑和共軛的三個徑平面(93) 8. 把橢圓面变成自己的仿射变换(94)

\*§ 151. 橢圓面的一些度量性質 .....96

1. 橢圓面作为單位球面經過三个互相垂直的“压缩”的結果(96) 2. 球面, 扁的和長的旋轉橢圓面, 一般橢圓面(97) 3. 把單位半徑的球面变成已知橢圓面的“压缩”系数的几何意义(99) 4. 橢圓面的三條主直徑的組(100) \*\*5. 空間仿射变换的主方向(101) 6. 橢圓面的三條主直徑作为互相垂直的三條对称軸(102) 7. 橢圓面的旋轉軸(103) 8. 橢圓面的对称平面(104) 9. 橢圓面的圓形截綫(104) 10. 橢圓面的标准方程(106)

\*第三篇 雙曲面(几何理論)..... 107

\*§ 152. 共漸近錐面的雙曲面族 ..... 107

1. 等边的單叶和双叶的旋轉雙曲面以及正圓錐面(107) 2. 雙曲面的中心(110) 3. 漸近錐面(110)

\*§ 153. 空間的雙曲旋轉 ..... 111

1. 正雙曲旋轉(111) 2. 关于在正雙曲旋轉下直綫和平面的变换的引理(112)

\*§ 154. 雙曲面的仿射性質 ..... 114

1. 雙曲面和二階錐面的平面截綫, 雙曲面的直徑(114) 2. 雙曲面的徑平面(117) 3. 雙曲面的共軛的直徑和徑平面(119) 4. 雙曲面的共軛的三條直徑和共軛的三個徑平面(119) 5. 單叶雙曲面的直母綫(120) \*\*6. 雙曲面的几何定义(124) \*\*7. 把雙曲面变成自己的任意仿射变换(125) \*\*8. 把雙曲面变成自己的仿射变换的分解成初等的旋轉(126)

\*§ 155. 雙曲面的一些度量性質 ..... 127

1. 二階錐面作为正橢圓錐面(127) 2. 錐面和漸近于它的雙曲面的貫軸(128) 3. 双叶雙曲面的頂点, 單叶雙曲面的腰橢圓和頂点(129) 4. 雙曲面的三條主直徑的組(130) 5. 雙曲面的三條主直徑作为互相垂直的三條对称軸(130) 6. 雙曲面的对称平面(131) 7. 雙曲面和二階錐面的圓形截綫(131) 8. 雙曲面的标准方程(132)。

\*第四篇 拋物面(几何理論)..... 133

|                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| *§ 156. 把拋物面變成自己的仿射變換 .....                                                                                                  | 134 |
| 1. 拋物旋轉(134) 2. 把旋轉拋物面變成自己的橢圓旋轉(136) 3. 把等邊雙曲拋物面變成自己的雙曲旋轉(137) 4. 在把拋物面變成自己的仿射變換下,關於直綫和平面的變換的引理(138)                         |     |
| *§ 157. 拋物面的仿射性質 .....                                                                                                       | 140 |
| 1. 橢圓拋物面的平面截綫和直徑(140) 2. 雙曲拋物面的平面截綫和直徑(141) 3. 橢圓拋物面的徑平面(143) 4. 雙曲拋物面的徑平面(144) 5. 雙曲拋物面的直母綫(145) **6. 把拋物面變成自己的任意的仿射變換(147) |     |
| *§ 158. 拋物面的一些度量性質 .....                                                                                                     | 149 |
| 1. 拋物面的主直徑(軸)和主徑平面(149) 2. 拋物面的對稱平面(150) 3. 拋物面的對稱軸(151) 4. 橢圓拋物面的圓形截綫(154) 5. 拋物面的標準方程(156)                                 |     |

## 第八章 二階曲面的一般理論 .....

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| *第一篇 二階曲面利用配平方方法的仿射分類 ..... | 158 |
|-----------------------------|-----|

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| *§ 159. 用配平方的方法把帶三個變數的二次多項式化成最簡單的形狀 ..... | 158 |
|-------------------------------------------|-----|

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| *§ 160. 二階曲面的仿射分類 ..... | 163 |
|-------------------------|-----|

1. 二階曲面的十五個仿射類(163) \*\*2. 歸范多項式的仿射不等價性(167)。

## 第二篇 二階曲面的歸范方程,標準方程和仿射分類 .....

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| § 161. 利用變數的正交變換把三元二次形式變成平方和 ..... | 169 |
|------------------------------------|-----|

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| § 162. 利用變數的正交變換把帶三個變數的二次多項式變成歸范多項式和標準多項式 ..... | 172 |
|-------------------------------------------------|-----|

1. 變成歸范多項式(172) 2. 整理成標準形狀(175)

|                        |     |
|------------------------|-----|
| § 163. 二階曲面的仿射分類 ..... | 178 |
|------------------------|-----|

1. 在直角坐標里由標準方程表達的二階曲面(178) 2. 由同樣形狀的標準方程表達的二階曲面的仿射等價性(180) 3. 由不同形狀的標準方程表達的二階非零曲面的仿射不等價性(181) 4. 二階曲面的仿射類(182)

## 第三篇 二階曲面標準方程的參數利用不變量的計算法 .....

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| § 164. 帶三個變數的二次多項式的前三個不變量 ..... | 183 |
|---------------------------------|-----|

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| § 165. 帶三個變數的二次多項式的第四個不變量 ..... | 187 |
|---------------------------------|-----|

|                   |     |
|-------------------|-----|
| § 166. 半不變量 ..... | 189 |
|-------------------|-----|

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| § 167. 帶三個變數的二次多項式的歸范類型通過不變量和半不變量的檢驗法 ..... | 193 |
|---------------------------------------------|-----|

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| § 168. 歸范多項式的系數通過不變量和半不變量的計算法 ..... | 193 |
|-------------------------------------|-----|

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| § 169. 二階曲面的類和它的標準方程利用不變量的決定法,總表 ..... | 201 |
|----------------------------------------|-----|

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| § 170. 球面方程的檢驗法 ..... | 204 |
|-----------------------|-----|

#### 第四篇 在复三維空間里的二阶曲面.....206

- § 171. 关于复三維空間 ..... 206
1. 定义(206)
  2. 用两个点規定直綫。直綫的方向向量(208)
  3. 向量和平面的平行性。三个向量共面的檢驗法(209)
  4. 通过一个已知点平行于两个不共綫的已知向量的平面的方程(210)
  5. 两个平面的相互位置(212)
  6. 平面和直綫的相互位置(213)
  7. 兩条直綫的相互位置(214)
  8. 在空間中用方向向量坐标的比值来給定方向(217)
  9. 变换成新的笛卡兒坐标(218)
  10. 仿射变换(219)
- § 172. 二阶曲面与直綫的交点 ..... 220
1. 二阶曲面和直綫的公共点的决定(220)
  2. 漸近方向和非漸近方向(223)
  3. 漸近方向的錐面(225)
- § 173. 二阶曲面的中心 ..... 227
1. 决定中心的方程(227)
  2. 中心二阶曲面和非中心二阶曲面(229)
  3. 把坐标原点移到中心(231)
- § 174. 二阶錐面 ..... 232
1. 漸近錐面(232)
  2. 以坐标原点作为顶点的二阶錐面的普遍方程(232)
  3. 包含着自己的中心的二阶曲面(232)
  4. 二阶錐面分解成一对平面的条件(233)
  5. 二阶曲面的秩(235)
  - \*\*6. 二次形式的秩(236)
  - \*\*7. 二阶錐面与通过顶点的平面的相交(236)
- § 175. 二阶曲面的徑平面 ..... 237
1. 与已知的非漸近方向共軛的徑平面(237)
  2. 奇异方向(238)
  3. 与非奇异的漸近方向共軛的徑平面(241)
  - \*\*4. 两个徑平面平行的檢驗法(241)
  - \*\*5. 徑平面束(242)
  - \*\*6. 中心二阶曲面的徑平面(242)
  - \*\*7. 有中心直綫的曲面的徑平面(243)
  - \*\*8. 拋物面的徑平面(244)
  - \*\*9. 秩1的曲面的徑平面(245)
  10. 共軛方向(246)
- § 176. 实二阶曲面的主方向和主徑平面 ..... 247
1. 主方向(247)
  2. 特征方程(248)
  3. 特征方程的根和主方向(248)
  - \*\*4. 特征方程根的重数的檢驗法(252)
  5. 主徑平面(252)
  - \*\*6. 秩1的曲面的主徑平面(254)
- \*\*§ 177. 二阶曲面的直径 ..... 255
1. 二阶曲面的平面截綫(255)
  2. 二阶曲面的中心平面截綫(255)
  3. 直径(256)
  4. 中心二阶曲面的直径(257)
  5. 秩2的曲面的直径(258)
  6. 实二阶曲面的主直径(259)
- § 178. 二阶曲面的切平面和直母綫 ..... 259
1. 切平面(259)
  2. 曲面与切平面的交綫(261)
  3. 不可分解的二阶曲面的直母綫(262)
  - \*\*4. 通过曲面上給定的非奇异点的母綫的求法(266)
  - \*\*5. 不可分解的二阶錐面的切平面(266)
  - \*\*6. 非錐狀的中心二阶曲面的切平面和直母綫(266)
  - \*\*7. 拋物面的切平面和直母綫(268)
  - \*\*8. 有中心直綫的曲面的切平面和直母綫(269)

- \*\*9. 秩 1 的曲面的切平面和直母綫(270) 10. 实二阶曲面的橢圓点,双曲点和抛物点(270)
- § 179. 二阶曲面的归范方程和仿射分类 ..... 273
1. 二阶曲面的归范方程(273) 2. 复三維空間中复二阶曲面的仿射分类(276) 3. 复三維空間中实二阶曲面的仿射分类(277)

## 第四部分 射影平面上和射影空間中的解析几何

### 第九章 射影平面上的解析几何 ..... 281

#### \*第一篇 射影平面、射影映射(几何理論) ..... 282

##### \*§ 180. 射影平面 ..... 282

1. 透視射影和过渡到射影平面的必要性(282) 2. 用假元素补充欧几里得平面(283) 3. 射影平面(286) 4. 射影平面上点和直綫的关联性(287)

##### \*§ 181. 射影映射 ..... 288

1. 射影映射的定义和最簡單的性質(288) 2. 透視射影作为射影映射(289) 3. 把的射影映射和欧几里得平面的仿射映射之间的联系(292) 4. 关于射影映射的第一基本定理(293) 5. 关于射影映射的第二基本定理(295) 6. 在把的射影映射和空間的仿射变换之间的联系(297) 7. 射影变换群(300) 8. 射影的概念和性質(300) 9. 欧几里得平面的仿射变换群,作为射影平面的射影变换群的子群(301)

##### \*§ 182. 共直綫的四个点和共束的四条直綫的射影不变量. 射影的順序关系 ..... 302

1. 欧几里得平面上共直綫的三个点的仿射不变量(302) 2. 射影平面上不共直綫的四个点(303) 3. 把里四条共面直綫的射影不变量(304) 4. 把里属于同一个平面束的四个平面的射影不变量(306) 5. 射影平面上共直綫的四个点和属于同一个束的四条直綫的射影不变量(307) 6. 直綫上四个真点的二重比值(310) 7. 真束的四条直綫的二重比值(312) 8. 直綫上和束中的射影的順序关系(314) 9. 調和分离(317)

##### \*§ 183. 射影平面上的对偶原則 ..... 318

1. 对射变换(318) 2. 对偶原則(321) \*\*3. 帕普定理(322)

#### \*第二篇 射影坐标、一阶和二阶曲綫 ..... 324

##### \*§ 184. 射影平面上的射影坐标 ..... 324

1. 直綫把中的射影坐标(324) 2. 补充了假元素的欧几里得平面上的射影坐标(326) \*\*3. 三綫坐标(327) 4. 三个点共直綫的条件(328) 5. 射影坐标系統的基点(329) 6. 齐次坐标(330) 7. 非齐次射影坐标(333)

|                                                                                                                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| *§ 185. 射影坐标的变换公式和射影变换的公式 .....                                                                                                                                                                          | 336 |
| 1. 齐次射影坐标的变换公式 (336)   **2. 非齐次射影坐标的变换公式 (337)   3. 射影变换的公式 (337)                                                                                                                                        |     |
| *§ 186. 射影平面上的曲线 .....                                                                                                                                                                                   | 338 |
| 1. 由射影坐标中的方程表示的曲线 (338)   2. 射影平面上的曲线和欧几里得空间里的锥面之间的联系 (339)   3. 在射影坐标的变换下, 射影平面上曲线方程的变换 (339)   4. 代数曲线 (339)                                                                                           |     |
| *§ 187. 射影坐标里的直线 .....                                                                                                                                                                                   | 340 |
| 1. 射影坐标里直线的方程 (340)   2. 射影平面上通过两个已知点的直线的方程 (341)   3. 射影平面上直线的参数方程 (341)   **4. 直线上的齐次和非齐次射影坐标 (342)   **5. 直线上的射影坐标的变换公式 (344)                                                                         |     |
| *§ 188. 射影平面上二阶曲线的射影分类 .....                                                                                                                                                                             | 345 |
| 1. 射影平面上曲线的射影分类和空间里锥面的仿射分类之间的联系 (345)   2. 三元二次形式的仿射分类 (345)   3. 射影平面上二阶曲线的五个射影类 (347)                                                                                                                  |     |
| *§ 189. 二阶曲线的仿射射影分类 .....                                                                                                                                                                                | 349 |
| 1. 补充了假元素的欧几里得平面上的卵状二阶曲线 (349)   2. 补充了假元素的欧几里得平面上的二阶曲线的十一个仿射射影类 (351)                                                                                                                                   |     |
| *§ 190. 卵状二阶曲线的切线; 内点和外点 .....                                                                                                                                                                           | 353 |
| 1. 卵状二阶曲线与直线的相交 (353)   2. 卵状二阶曲线的内点和外点 (355)                                                                                                                                                            |     |
| *§ 191. 射影平面对于卵状二阶曲线的配极变换 .....                                                                                                                                                                          | 357 |
| 1. 二阶锥面的直径和径平面 (357)   2. 把对于二阶锥面的配极变换 (358)   3. 卵状二阶曲线的极点和极线 (360)   4. 射影平面的配极变换 (362)   5. 利用切线作极线 (363)   6. 极线的主要几何性质 (364)   **7. 利用第四调和点的作图来作极线 (366)   8. 直径作为假点的极线 (367)   9. 中心作为假直线的极点 (368) |     |
| *§ 192. 卵状二阶曲线利用处在射影对应中的两个束来形成, 巴斯加定理和白良松定理 .....                                                                                                                                                        | 368 |
| **1. 射影直线和射影直线束的射影映射 (368)   **2. 直线和束的透视对应 (369)   **3. 利用两个直线束的不是透视的射影对应, 来作卵状二阶曲线 (371)   **4. 利用两个直线束的不是透视的射影对应, 来作卵状二阶曲线的切线族 (375)   **5. 巴斯加定理 (376)   **6. 白良松定理 (378)                            |     |
| 第三篇 射影平面, 射影坐标, 射影变换 (解析理论) .....                                                                                                                                                                        | 378 |
| § 193. 射影平面 .....                                                                                                                                                                                        | 378 |
| 1. 成比例的三数组和数偶的类 (378)   2. 射影平面 (381)   3. 两条直线的相互位置 (382)   4. 直线的坐标 (383)   5. 通过两个给定的点                                                                                                                |     |

的直綫方程. 三个点共綫的条件(383) 6. 射影平面, 作为欧几里得空間的直綫和平面把(384) 7. 欧几里得平面上的齐次笛卡兒坐标. 射影平面作为补充了假点的欧几里得平面(385) 8. 射影平面的一般概念(389)

\*\*§ 194. 射影平面上的对偶原則 ..... 390

1. 射影变换(390) 2. 对偶原則(390) 3. 代沙葛定理(391) 4. 直綫束作为共綫点列的对偶像(393)

§ 195. 射影平面上的射影坐标 ..... 393

1. 射影坐标(393) 2. 射影坐标系統的基点(396) 3. 射影坐标的变换公式(397) \*\*4. 三綫坐标(400) 5. 在任意射影坐标中直綫的方程(402) 6. 非齐次射影坐标(403)

§ 196. 射影平面的射影变换 ..... 404

1. 射影变换的定义和基本性質(404) \*\*2. 射影的概念和性質(406) 3. 射影变换的公式(406) 4. 射影平面的射影变换的群(407) 5. 欧几里得平面的仿射射影变换群, 作为射影平面的射影变换群的子群(409)

§ 197. 直綫上和直綫束中的射影坐标 ..... 410

1. 直綫的参数方程(410) 2. 直綫上的射影坐标(411) 3. 直綫上的非齐次射影坐标(414) 4. 眞直綫上的齐次笛卡兒坐标(414) 5. 直綫上射影坐标的变换公式(416) \*\*6. 直綫束中的射影坐标(417)

§ 198. 直綫和直綫束的射影映射 ..... 417

1. 直綫的射影映射(417) 2. 直綫的射影变换的公式(420) \*\*3. 第一种和第二种射影变换(421) \*\*4. 直綫束的射影映射(422)

§ 199. 二重比值 ..... 422

1. 共直綫的四个有順序的点的二重比值(422) 2. 在直綫上的射影坐标里四个点的二重比值(423) 3. 共直綫的四个眞点的二重比值(424) \*\*4. 束中四条有順序的直綫的二重比值(425) \*\*5. 眞束的四条直綫的二重比值(425) \*\*6. 对偶原則的推广(427) \*\*7. 在共綫点列和直綫束的透視对应下二重比值的保留(427) 8. 調和点組(428)

§ 200. 复射影平面 ..... 429

第四篇 射影平面上的二阶曲綫 ..... 431

§ 201. 复欧几里得平面上和复射影平面上的二阶曲綫的联系 ..... 432

§ 202. 二阶曲綫与直綫的交点 ..... 434

1. 二阶曲綫和直綫的公共点(434) 2. 可分解的二阶曲綫(437)

§ 203. 二重点. 二阶曲綫的秩 ..... 438

1. 二阶曲綫的二重点(438) 2. 二阶曲綫的秩(440)

§ 204. 二阶曲綫的切綫 ..... 441

§ 205 二阶曲綫的極点和極綫 ..... 442

|                                |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    |                                             |
|--------------------------------|--------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------|----------------------------------|-----------------------------|--------------------------|--------------------|---------------------------------------------|
| 1. 点对于二阶曲线的調和共轭性(442)          | 2. 極点和極綫(444)            | 3. 直徑作为假点的極綫(445)              | 4. 中心作为假直綫的極点(446)                  | 5. 極綫的基本性質(447)              | 6. 不可分解的二阶曲线的極点和極綫(448) | 7. 从不在不可分解的二阶曲线上的点引向这条曲线的切綫(448) | **8. 不可分解的实二阶曲线的外点和内点(449)  | **9. 可分解的二阶曲线的極点和極綫(450) | 10. 自配極三角形(451)    |                                             |
| § 206. 二阶曲线的射影分类               |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 452                                         |
| 1. 二阶曲线对于自配極的基本坐标三角形的方程(452)   | 2. 复二阶曲线的射影分类(453)       | 3. 实二阶曲线的射影分类(454)             | **4. 在固定的坐标系統中表示同一条二阶曲线的方程(456)     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    |                                             |
| § 207. 二阶曲线的仿射射影分类             |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 458                                         |
| 1. 实二阶曲线的仿射射影分类(459)           | 2. 欧几里得平面上二阶曲线的仿射分类(464) | **3. 复二阶曲线的仿射射影分类(465)         |                                     | **4. 复欧几里得平面上复二阶曲线的仿射分类(466) |                         |                                  |                             |                          |                    |                                             |
| <b>第十章 射影空間中的解析几何</b>          |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 467                                         |
| <b>第一篇 射影空間,射影坐标,射影变换</b>      |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 467                                         |
| § 208. 射影空間                    |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 467                                         |
| 1. 成比例的四数组的类(467)              | 2. 射影空間(468)             | 3. 矩陣的秩和齐次綫性方程組中綫性無关的解的个数(469) | 4. 三个点共綫的条件(470)                    | 5. 平面和直綫的相互位置(471)           | 6. 两个平面的相互位置(472)       | 7. 四个点共面的条件(472)                 | 8. 通过不在一条直綫上的三个点的平面的方程(473) | 9. 平面的参数方程(474)          | 10. 兩条直綫的相互位置(476) | 11. 欧几里得空間里的齐次笛卡兒坐标,射影空間作为补充了假点的欧几里得空間(477) |
| § 209. 射影坐标                    |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 481                                         |
| 1. 射影空間中的射影坐标(481)             | 2. 射影坐标系統个基点(482)        | 3. 射影坐标的变换公式(483)              | 4. 在空間的任意射影坐标系統里的平面和直綫(484)         | 5. 平面上和直綫上的射影坐标(484)         |                         |                                  |                             |                          |                    |                                             |
| § 210. 射影变换                    |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 487                                         |
| 1. 射影空間的射影变换的定义和基本性質(487)      | 2. 射影变换的公式(487)          | 3. 射影空間的射影变换群(488)             | 4. 欧几里得空間的仿射变换群作为射影空間的射影变换群的子群(488) | **5. 射影空間中直綫的透視对应(488)       |                         |                                  |                             |                          |                    |                                             |
| § 211. 复射影空間                   |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 490                                         |
| <b>第二篇 射影空間中的二阶曲面</b>          |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 491                                         |
| § 212. 复欧几里得空間和复射影空間的二阶曲面之間的联系 |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 492                                         |
| § 213. 二阶曲面与平面和直綫的交点           |                          |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    | 493                                         |
| 1. 二阶曲面和平面的公共点,可分解的二阶曲面(493)   | 2. 二阶曲面                  |                                |                                     |                              |                         |                                  |                             |                          |                    |                                             |

和直綫的公共点(495)

- § 214. 二重点, 二阶曲面的秩 ..... 497
1. 二阶曲面的二重点(497) 2. 二阶曲面的秩(497) 3. 二阶錐面(498)
- § 215. 二阶曲面的切平面和直母綫 ..... 499
1. 切平面(499) 2. 二阶曲面与切平面的交綫(500) 3. 不可分解的实二阶曲面的橢圓点, 双曲点和拋物点(502) 4. 二阶曲面的直母綫(503)
- § 216. 二阶曲面的極点和極平面 ..... 505
1. 点对于二阶曲面的調和共轭性(505) 2. 極点和極平面(506) 3. 徑平面作为假点的極平面, 中心作为假平面的極点(506) 4. 極平面的基本性質(507) 5. 非錐狀二阶曲面的極点和極平面(507) 6. 切錐面(508) 7. 自配極四面体(509)
- § 217. 二阶曲面的射影分类 ..... 511
1. 二阶曲面对于自配極的基本坐标四面体的方程(511) 2. 复二阶曲面的射影分类(512) 3. 实二阶曲面的射影分类(512) \*\*4. 在固定的坐标系統中表示同一个二阶曲面的方程(514)
- § 218. 二阶曲面的仿射射影分类 ..... 515
1. 实二阶曲面的仿射射影分类(516) 2. 欧几里得空間中二阶曲面的仿射分类(522) \*\*3. 复二阶曲面的仿射射影分类(523) \*\*4. 复欧几里得空間中复二阶曲面的仿射分类(524)

索引 ..... 525

## 第三部分 空間解析几何

### § 124. 引論: 曲面方程

#### 1. 在笛卡兒坐标中由方程表示的曲面 例

定义 空間中坐标  $x, y, z$  滿足給定的方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

的所有点的集合, 称为由这个方程所表示的曲面。

我們来研究几个例子; 为簡便起見, 我們采取直角坐标系統。

#### 例 1. 方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0,$$

显然表示以原点为中心, 半径为 5 的球面(球的表面)。

#### 例 2. 方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

显然只被一个三数组  $(x, y, z)$ , 即  $(0, 0, 0)$  所满足, 也就是說, 这方程所表示的整个“曲面”变成一个点——坐标原点。

#### 例 3. 方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7 = 0$$

不被任何的三数组  $(x, y, z)$  所满足, 也就是說, 它所表示的“曲面”不含任何点。这种“曲面”称为零曲面。

#### 例 4. 方程

$$z - h = 0 \quad \text{或} \quad z = h,$$

这里  $h > 0$ , 表示平行于  $xy$  平面的一个平面, 而且, 如果把  $xy$  平面看成水平的, 則这个平面在它之上, 与它的距离是  $h$ 。

#### 例 5. 方程

$$x^2 + y^2 = 0$$

被所有  $x = y = 0$  (而  $z$  可以是任意数) 的三数组  $(x, y, z)$  所满足, 而且仅被这样的三数组所满足; 也就是說, 由这个方程所表示的“曲

面”变成了一条直线—— $z$  軸。

例 6. 方程

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 25)(x^2 + y^2) = 0$$

被那些至少使上式左端因子之一成为零的点所满足,而且仅被它们所满足,因为当而且只当两个因子之一为零时,它们的乘积才为零。因此,这个方程表示由例 1 中所讨论的球面和例 5 中所讨论的穿过此球面的直线( $z$  軸)所组成的一个“曲面”。

2. 柱面 在方程(1)中,可能有某一个坐标实际上不出现。例如设  $z$  不出现,于是方程具有下面的形状:

$$f(x, y) = 0. \quad (2)$$

方程(2)看作是  $xy$  平面上笛卡儿坐标中的方程,它表示某一条曲线;我们用  $L$  来表示它。我们现在要研究,如果把方程(2)看作空间笛卡儿坐标的方程,则它代表一个怎样的曲面。

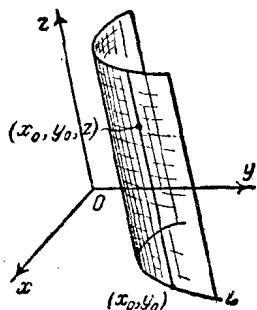


圖 1

設  $(x_0, y_0)$  是曲线  $L$  (圖 1) 的任意点。如果我們在空間中取这样一个点,它的横坐标仍是  $x_0$ ,纵坐标仍是  $y_0$ ,而立坐标是任意的  $z$ ,則該点的坐标  $(x_0, y_0, z)$  显然满足方程(2),因为  $x_0, y_0$  两个值满足方程,而这方程并不对  $z$  加任何限制。因此,方程(2)所表示的曲面包含曲线  $L$  上的每个点,

同时又包含经过这点所作平行于  $z$  軸的整条直线。显然,所讨论的曲面不包含任何其他点。事实上,如果  $(x_0, y_0, z_0)$  是坐标满足方程(2)的任意点,則  $xy$  平面上的点  $(x_0, y_0)$  就处在曲线  $L$  上,这说明点  $(x_0, y_0, z_0)$  是在过曲线  $L$  上的这个点所作平行于  $z$  軸的直线上。

通过某一条曲线上的每一点作互相平行的直线,它们所构成的曲面,称为柱面或柱状曲面。这些直线称为柱面的母线而曲线

称为它的导綫。

我們看到，空間中只包含兩個笛卡兒坐标的方程表示一个柱面，它的母綫平行于未出現的坐标的軸，它的导綫处在已出現的坐标的軸所構成的平面上，而且在这个平面内由同一个方程来表示。反之，显然每一个这样的柱面都可用上述形狀的方程来表示。

**3. 錐面** 如果某曲面上有一个点  $M_0$ ，它具有这样的性質：对于曲面上每一个异于  $M_0$  的点  $M$ ，曲面必包含整条直綫  $M_0M$ ，則該曲面称为錐面或錐狀曲面。直綫  $M_0M$  称为母綫，这些直綫的公共点  $M_0$  称为錐面的頂点。

如果以同一个任意的数  $t$  去乘函数  $F(x, y, z)$  的所有的元，得到的是原来的函数乘上某一个只依赖于  $t$  的系数，

$$F(tx, ty, tz) = \varphi(t)F(x, y, z), \quad (3)$$

則这个函数称为齐次的。若  $F(x, y, z)$  是齐次函数，則对于任意的笛卡兒坐标，方程 (1) 都表示一个以坐标原点为頂点的錐面。事实上，若点  $(x_0, y_0, z_0)$  满足这方程，則根据公式 (3)，点  $(tx_0, ty_0, tz_0)$  也滿足它，这里  $t$  可以取任意的实数值，就是說，若点  $(x_0, y_0, z_0)$  在曲面上，則經過这点和坐标原点的整条直綫都在这曲面上(圖 2)。

例如，方程

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (4)$$

代表錐面，这是因为方程的左端是齐次函数：

$$(tx)^2 + (ty)^2 - (tz)^2 = t^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

在下段中我們将会看到，在直角坐标的情形，这是由一条与  $z$  軸相交成  $45^\circ$  角的直綫繞  $z$  軸旋轉而得到的正圓錐面。

**4. 旋轉曲面** 一个曲面，如果包含某一个点就包含由这个点繞某条固定直綫旋轉成的整个圓周，則这种曲面称为旋轉曲面

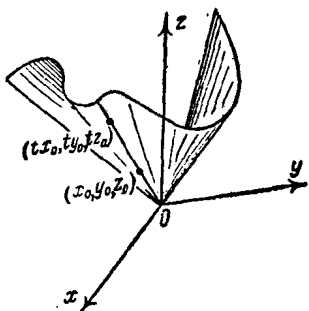


圖 2