广义系统经济控制论

张金水

学出版社

广义系统经济控制论

张金水 著

清华大学出版社

广义系统经济控制论

张金水 著

清华大学出版社

内 容 簡 介

广义系统经济控制论可用于研究解决国家、部门、省市、县和企业在经济活动中的经济系统应具有的合理结构，各产品应有的合理定价，经济可能达到的最快增长速度，不合理的经济结构的调整，以及使经济系统自动维持在最优结构上的策略等等重要问题。本书第一章至第五章讲述广义系统运动分析、稳定性分析、稳态预测、能控性和鲁棒调节等基本知识。第六章、第七章介绍广义系统理论在国民经济与管理中的应用。

广义系统经济控制论
张 金 水 著
☆
清华大学出版社出版
北京 清华园
中国科学院印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
☆
开本：787×1092 1/16 印张：21 字数：495 千字
1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷
印数：0001—5000
ISBN 7-302-00608-3/F·37
定价：4.55 元

序　　言

什么叫广义动态系统?

广义动态系统可用如下差分方程或微分方程描述:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

或:

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

式中的 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 为向量，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为常阵。$\boldsymbol{E}$ 可以是奇异阵。当 $\boldsymbol{E}$ 为满秩阵或单位阵时，式(1)和(2)可化为如下的通常系统:

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{3}$$

或:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{4}$$

60 年代之前，控制理论界主要讨论式(3)或式(4)所示的通常系统。70 年代末，人们开始研究式(1)和(2)所示的广义动态系统。在十年左右的时间内，已将通常系统的运动分析、稳定性分析、能控、能观、鲁棒调节等相应结果推广到广义系统中去。并且已开始将广义系统理论应用于工程实践。然而，广义系统理论在经济管理领域有极为重要的应用。

在国家、各部门、省、市、县以及各企业从事经济与管理的工作人员必然要遇到如下一些基本问题：经济系统应当具有什么样的合理结构，即各种产品产出比例应多大？各产品应怎样合理定价？经济系统可能达到的最快增长速度为多少？如果经济结构不合理应怎样调整？在国内外经济交往中，如何发挥本地区优势？如何将本地区落后技术过渡到先进技术上来？应当采用什么样策略使经济系统自动维待在最优结构上？等等。要解决上述基本问题总是要采用既方便又可靠的经济数学模型。目前常用的主要是投入产出模型和冯·纽曼模型等线性多部门模型。

动态投入产出模型为:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}[\boldsymbol{x}(t+1)-\boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{d}(t) \tag{5}$$

式中的 $\boldsymbol{x}(t)$ 为产出向量，$\boldsymbol{d}(t)$ 为消费向量，$\boldsymbol{A}$ 为消耗系数阵，$\boldsymbol{B}$ 为投资系数阵。将式(5)化为:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t+1)=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{d}(t) \tag{6}$$

式中的 $\boldsymbol{B}$ 一般为奇异阵。将式 (1) 与式(6)比较可知动态投入产出系统为典型的广义动态系统。

具有快变与慢变生产过程的冯·纽曼模型由下式描述:

$$\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t+1)+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{d}(t) \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$ 为产出向量，$\boldsymbol{d}(t)$ 为消费向量。$\boldsymbol{A}_1$ 为慢变生产过程投入系数阵，$\boldsymbol{A}_2$ 为快变生产过程的投入系数阵，$\boldsymbol{B}$ 为投入的折旧剩余系数阵。可将式(7)化为:

$$A_1x(t+1)=(I+B-A_2)x(t)-d(t) \tag{8}$$

式中，A_1 一般为奇异阵。将式(1)与式(8)比较可知冯·纽曼模型也是典型的广义动态系统。

其它的诸如具有多种技术的线性多部门模型、人口模型、生态平衡模型等都属于广义动态系统。

由此看来，当我们要解决经济与管理中的许多基本问题时，必然要用到广义系统模型。因此,《广义系统经济控制论》在经济与管理中的重要应用也就确信无疑了。

本书第1章至第5章用经济与管理的例子阐述广义系统运动分析、稳定性分析、稳态预测、能控性与鲁棒调节等基本知识。第6章与第7章介绍广义系统理论在国民经济与管理中的重要应用。

本书内容曾作为清华大学研究生教材讲授多遍。学习本书只须高等数学与线性代数的预备知识。因此本书也可作为高年级本科生或进修人员的教材。本书内容是各级经济计划人员所迫切需要掌握的。全书内容可作为60至70学时的课程讲授。

作者特别感谢经管学院副院长赵纯均教授、校教材委员会潘家轺教授,以及经济管理学院助理院长李子奈副教授的热情支待与推荐。高云鹏副教授审校了本书稿，提出了许多宝贵意见,特表示诚挚的谢意。

尽管本书经过多遍教学,但错误之处仍不可避免,敬请读者不吝赐教。

张金水 1988 年10月

目　　录

导论：广义系统经济控制论的内容、方法与应用

广义系统控制理论的研究至今仅有十年左右的历史。H.H.Rosenbrock 在讨论复杂的电网络系统中，首先提出研究广义动态系统的问题。接着，D. G. Luenberger 发现动态投入产出系统是典型的广义系统。十年来，国内外控制理论家们发表了不少论文，主要将已有的控制系统中的能控性、能观性、调节与优化等问题相应地推广到广义系统中来。在已发表的相当数量的文章中，主要讨论的是控制理论的问题，较少涉及经济问题。实际上，广义系统理论对经济与管理问题具有十分重要的应用。动态投入产出模型以及冯·纽曼（von-Neumann）模型等都是典型的义广动态系统。这些模型在我国计划经济工作中起到十分重要的作用。下面简要介绍广义系统理论的基本内容及其实际应用。

一、经济变量间因果关系的描述和经济模型的建立

在实际工作中，经常需要预测某些经济变量的运动规律。为此，首先要分析各变量间的因果关系，然后用相应的差分方程或微分方程等去描述它们。这种建模方法称之为“描述变量法”。当然，经济变量间因果关系的定量描述要依经济理论和实践来进行。

下面举一个例子来说明这种建模过程。

例 0.1 假设我们要预测某地区总产出 Y 的变化规律。首先要分析总产出 Y 与哪些变量有关。当采用总量模型时，可利用柯布-道格拉斯生产函数：

$$Y = AK^{a}L^{1-a}$$

式中，$A > 0$，$0 < a < 1$ 为常数。上式表明，总产出 Y 与投入的固定资产存量 K 和劳务工时 L 的多少有关。如果要素 K 与 L 的投入必须成一固定比例，即：$K/L = \beta$，β 为常数。那么将它代入上式，得：

$$Y = AK^{a}(K/\beta)^{1-a} = A(1/\beta)^{1-a}K = \theta K$$

式中，$\theta = A(1/\beta)^{1-a}$ 称为资本产出比。因此，可用如下生产函数：

$$Y(t) = \theta K(t) \tag{0.1}$$

$Y(t)$ 表示第 t 年总产出。

式(0.1)表明，总产出 $Y(t)$ 的大小依当年固定资产存量 $K(t)$ 的多少而定。而 $K(t)$ 的大小又由哪些变量值来决定呢？我们有如下的资本形成方程：

$$K(t+1) = K(t) - \delta K(t) + \rho I(t+1) + (1-\rho)I(t) \tag{0.2}$$

式中，δ 为折旧率，ρ 为资本形成系数。即，当年的投资 $I(t+1)$ 有 $100\rho\%$ 在当年形成固定资产，而余下的 $100(1-\rho)\%$ 在第二年形成固定资产。也就是说，从投资到资本形成需加工时间。式(0.2)的含义是直观的，它表明当年的固定资产存量 $K(t+1)$ 等于原有固定资产 $K(t)$ 减去它的折旧额 $\delta K(t)$ 再加上当年投资形成的固定资产 $\rho I(t+1)$ 和上年投资形成的固定资产 $(1-\rho)I(t)$。

式(0.2)表明固定资产存量 $K(t)$ 与投资 $I(t)$ 有关。那么，$I(t)$ 的大小又由哪些变

量来决定呢？我们有如下的积累与外生投资方程：

$$I(t+1)=\sigma Y(t)+U(t) \tag{0.3}$$

式中，σ 为积累率，$U(t)$ 为外生投资变量。对一个地区来讲，$U(t)$ 可以是中央投资拨款，它的大小由决策人员掌握。$U(t)$ 为决策变量。式(0.3)表明，地区投资总额 $I(t+1)$ 一部分来自上一年度总产出的积累额 $\sigma Y(t)$，另一部分来自中央投资拨款 $U(t)$。

式(0.1)至式(0.3)构成如下数学模型：

$$\begin{cases} Y(t)=\theta K(t) \\ K(t+1)=K(t)-\delta K(t)+\rho I(t+1)+(1-\rho)I(t) \\ I(t+1)=\sigma Y(t)+U(t) \end{cases}$$

把它写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(t+1) \\ K(t+1) \\ I(t+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & \theta & 0 \\ 0 & 1-\delta & 1-\rho \\ \sigma & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(t) \\ K(t) \\ I(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}U(t) \tag{0.4}$$

即：

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u(t) \tag{0.5}$$

其中，

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} Y(t) \\ K(t) \\ I(t) \end{bmatrix},\quad u(t)=U(t),\quad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & \theta & 0 \\ 0 & 1-\delta & 1-\rho \\ \sigma & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

一般地说，当我们用一些代数方程或差分方程去描述实际经济系统时，便会得到如式(0.5)所示的差分方程组。式(0.5)称为线性离散时间广义动态系统。当式(0.5)中的 $\boldsymbol{E}$ 阵为单位阵时，那么它变为通常系统：

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u(t) \tag{0.6}$$

但是，往往 $\boldsymbol{E}$ 阵不是单位阵。如本例中的 $\boldsymbol{E}$ 是奇异阵。当 $\boldsymbol{E}$ 为奇异时，有时它能化为通常系统的形式，但一般情况下不能化为通常系统的形式，从而给分析带来困难。

无论 $\boldsymbol{E}$ 是奇异还是非奇异，式(0.5)所示的系统都称为广义动态系统。广义动态系统包含了通常系统。

就例 0.1 来讲，虽然 $\boldsymbol{E}$ 是奇异阵，但它可化为通常系统。将式(0.1)代入式(0.3)，得：

$$I(t+1)=\sigma\theta K(t)+u(t) \tag{0.7}$$

式中，$u(t)=U(t)$。再将式(0.7)代入式(0.2)，得：

$$K(t+1)=(1-\delta)K(t)+\rho\sigma\theta K(t)+\rho u(t)+(1-\rho)I(t) \tag{0.8}$$

将式(0.7)和式(0.8)表成矩阵形式：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I(t+1) \\ K(t+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \sigma\theta \\ 1-\rho & 1-\delta+\rho\sigma\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I(t) \\ K(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\theta K(t)=[0,\theta]\begin{bmatrix} I(t) \\ K(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{0.9}$$

上式为通常系统，$y(t)$ 是输出，$y(t)=Y(t)$。

式(0.4)或式(0.9)可等价地用图 0.1 来表示。在数学模型的图解表示中，我们用圆圈表示变量，用箭头表示变量间的因果关系。此外，用相应符号表示延迟环节、比例环节和加法环节。

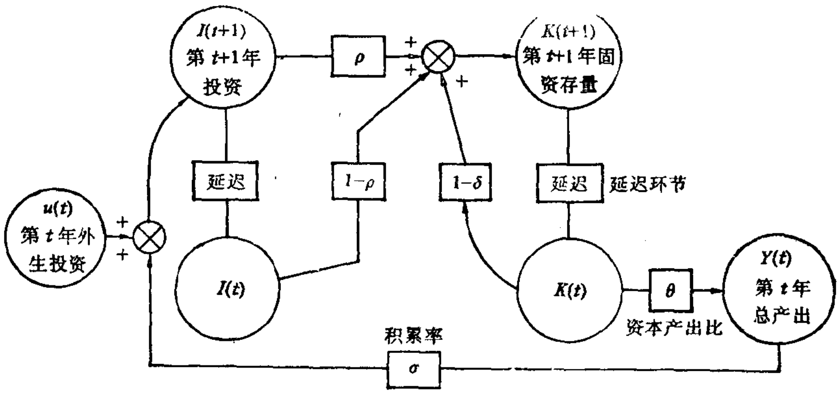

图 0.1 地区宏观经济简易模型

用图来表示数学模型的主要优点是可以清楚地显示变量间的因果关系链。

从图 0.1 可知，本模型共有四个变量：$u(t)$，$I(t)$，$K(t)$，$Y(t)$。其中的变量 $I(t)$，$K(t)$，$Y(t)$ 都可由其它变量或自身变量值来描述。这些变量称为内生变量或状态变量。而变量 $u(t)$ 不能用其它变量来描述，它称为外生变量或系统的输入。

如果我们将图 0.1 中的圆圈收缩为一个点，那么它等价地化为图 0.2。

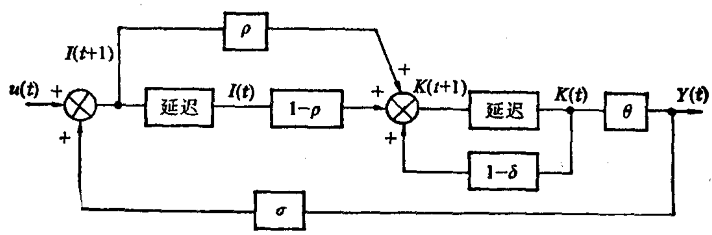

图 0.2 地区宏观经济简易模型另一种表示

通常系统往往表示成图 0.2 所示的形式。

二、两种不同思维方式的数学表达

现在我们将广义系统分为前向时间系统和后向时间系统以及含有前向和后向关系的描述时间系统，并指出各种系统所对应的不同思维方式。

首先考虑前向思维方式与前向时间系统。在实际生活中，我们往往这样考虑问题："如果事物(系统)当前处在这种状态(初始条件)，那么该事物以后将会变到什么样的新的状态?"这种思维方式称为前向思维方式，因为在思考问题时，是从现在去推知未来。这种事物的未来的状态由现在的状态来求解的系统称为前向时间系统。

例 0.2 假设有两个内生变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 以及一个外生变量 $u(t)$。内生变量未来值 $x_1(t+1)$ 和 $x_2(t+1)$ 依它们的当前值 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 以及当前策略 $u(t)$ 来描述。

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t) \\ x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t) \end{cases} \tag{0.10}$$

或:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

或简记为:

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{0.11}$$

由上式可知,前向时间系统便是通常系统。

其次,考虑后向思维方式与后向时间系统。在实际生活中,我们往往这样考虑问题:"为了要在将来使得事物到达某个给定的状态,那么它要求当前事物的状态应取何值?"这种思维方式称为后向思维方式。我们将这种事物的当前状态由未来的状态来描述的系统称为后向时间系统。

例 0.3 设第 t 年工业品产出量为 $x_1(t)$,工业品消费量为 $c_1(t)$;农业品产出量为 $x_2(t)$,农业品消费量为 $c_2(t)$。

在生产工业品的活动中,为在第 $t+1$ 年产出 1 单位工业品,需在第 t 年消耗 a_{11} 单位工业品和 a_{21} 单位农业品。那么为在第 $t+1$ 年产出 $x_1(t+1)$ 单位的工业品,需在第 t 年消耗工业品 $a_{11}x_1(t+1)$ 单位和农业品 $a_{21}x_1(t+1)$ 单位。

类似,在生产农业品的活动中,为在第 $t+1$ 年产出 1 单位农业品,需在第 t 年消耗工业品 a_{12} 单位和消耗农业品 a_{22} 单位。那么,为在第 $t+1$ 年产出 $x_2(t+1)$ 单位的农业品,需在第 t 年消耗工业品 $a_{12}x_2(t+1)$ 和农业品 $a_{22}x_2(t+1)$单位。

综上所述,为在第 $t+1$ 年产出达到 $x_1(t+1)$ 和 $x_2(t+1)$,需在第 t 年消耗工业品: $a_{11}x_1(t+1) + a_{12}x_2(t+1)$,需在第 t 年消耗农业品: $a_{21}x_1(t+1) + a_{22}x_2(t+1)$。因此,要求第 t 年工农业产出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的值满足下式:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_{11}x_1(t+1) + a_{12}x_2(t+1) + c_1(t) \\ x_2(t) = a_{21}x_1(t+1) + a_{22}x_2(t+1) + c_2(t) \end{cases} \tag{0.12}$$

或:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t+1) + \mathbf{c}(t) \tag{0.13}$$

式中:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}$$

式(0.13)表明,为在未来使系统到达给定状态 $\boldsymbol{x}(t+1)$,要求当前状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 所取的值为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t+1) + \mathbf{c}(t)$。

顺便指出,式(0.13)所示的系统称为冯·纽曼-列昂惕夫模型。它是静态投入产出模型的推广。当我们不考虑加工时间时,式(0.13)化为:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{c} \tag{0.14}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为消耗系统阵，$\boldsymbol{c}$ 为消费向量。当给定消费向量 $\boldsymbol{c}$ 之后，要求的产出结构 $\boldsymbol{x}$ 为：

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c}$$

式中的 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 便是所谓的列昂惕夫逆阵。

由本例可知，经济系统往往是后向时间系统。

如果我们把前向思维方式和后向思维方式综合在一个系统内，那么这种系统通常称为描述时间系统。所谓描述时间系统就是根据实际情况用一个又一个的方程去描述各变量运动规律，这些方程可能是动态的，也可能是静态的，可能是前向的，也可能是后向的，这样得到的系统模型往往可表达为式(0.5)所示的广义系统的形式。

例 0.4 设有两个变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，变量 $x_1(t)$ 的未来状态依当前的状态 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 及当前策略 $u(t)$ 来描述：

$$x_1(t+1)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+b_1u(t)$$

而变量 $x_2(t)$ 的当前值却依系统未来状态 $x_1(t+1)$、$x_2(t+1)$ 来决定：

$$x_2(t)=a_{21}x_1(t+1)+a_{22}x_2(t+1)$$

那么，可将以上两个式子表示矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t+1)\\ x_2(t+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

从以上分析可知，广义系统模型来自我们描述实际系统时的两种不同的逻辑推理方式。除此之外，慢变生产过程和快变生产过程也是产生广义系统数学模型的实际背景。因为慢变生产过程往往用前向或后向差分方程描述，而快变生产过程往往用代数方程加以描述。由差分方程和代数方程所组成的数学模型在表达成式(0.5)的形式时，$\boldsymbol{E}$ 阵往往是奇异的。关于快变、慢变生产过程在以后遇到时再加以叙述。

三、从古典控制论、现代控制论到广义系统控制论

众所周知，在四十至五十年代由维纳等人所创立的控制论称为古典控制论。古典控制理论奠定了本学科的基本思想与基本概念。如：系统、系统的输入输出与反馈、而系统的输入又可分为控制输入和扰动输入等。古典控制理论应用于实践的主要是单输入、单输出线性系统，采用的主要方法是频率特性法等等。到了六十年代，人们将线性代数知识应用于多变量线性系统，从而得到一些新概念，如：能控性、能观测性、状态观测器、鲁棒调节器、最优控制等。这一阶段称为现代控制理论。现代控制论结合并应用于实践的主要是多变量确定性和随机性的线性动态定常系统。确定性线性多变量离散时间系统可用下式描述：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\tag{0.15}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为 m 维输入向量，$\boldsymbol{y}(t)$ 为 r 维输出向量。$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为相应维数常阵。

式(0.15)所示的系统便是上述的通常系统或前向时间系统。

确定性线性多变量连续时间系统可用如下的微分方程组描述；

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases} \tag{0.16}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$、$\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{y}(t)$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的含义与式(0.15)相同。$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 表示 $d\boldsymbol{x}(t)/d(t)$。

由式(0.15)和式(0.16)所示的前向时间系统是现代控制论的主要讨论对象。短短的十几年时间内，所发表的许多研究成果主要针对这一类随机或确定性线性系统。然而，在七十年代中期，H.H.Rosenbrock 在讨论复杂的电网络系统中提出更广泛意义下的系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases} \tag{0.17}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases} \tag{0.18}$$

式(0.17)为广义微分方程，式(0.18)为前述的广义差分方程。它们统称为广义动态系统，式中的$\boldsymbol{E}$阵可能是奇异阵。

对广义系统(0.17)和(0.18)来讲，与通常系统(0.15)和(0.16)一样，也有能控性、能观测性、状态观测器、鲁棒调节器、最优控制等基本概念和基本问题。然而，由于$\boldsymbol{E}$阵的奇异性使得这些问题的讨论更为复杂些。经过十年来国内外控制理论家的努力，与通常控制系统所对应的上述问题大部分都已解决，并有少量文章报导了广义系统理论在工程实践的应用。但是，我们更关心的是该理论对经济与管理各领域的应用。下面简要介绍这方面情况。

四、广义系统经济控制论在国民经济计划等领域中的应用

著名控制理论家 H.H.Rosenbrock 在七十年代于工程领域发现广义系统的实际例子；然而，早在四十年代，经济学家就已经将经济系统用广义微分方程或差分方程描述。众所周知的动态投入产出系统便是典型的广义系统：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}[\boldsymbol{x}(t+1)-\boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{d}(t) \tag{0.19}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为消耗系数阵，$\boldsymbol{B}$为投资系数阵，$\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维产出向量，$\boldsymbol{d}(t)$ 为 n 维消费向量。将式(0.19)化为：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t+1)=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{d}(t) \tag{0.20}$$

比较式(0.18)与式(0.20)可知动态投入产出系统为离散时间广义动态系统，且由于$\boldsymbol{B}$往往为奇异阵，从而给定量分析带来困难。

同样，在四十年代，数学家、计算机科学家和经济学家冯·纽曼给出的冯·纽曼模型也是典型的广义动态系统。无联合生产并考虑快变与慢变生产过程的广义冯·纽曼模型可用下式描述：

$$\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t+1)+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{d}(t) \tag{0.21}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$ 为产出向量，$\boldsymbol{d}(t)$ 为消费向量，$\boldsymbol{A}_1$ 为慢变生产过程的投入系数阵，$\boldsymbol{A}_2$ 为快变生产过程的投入系数阵，$\boldsymbol{B}$为折旧剩余系数阵。式(0.21)不难化为：

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t+1)=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{d}(t) \tag{0.22}$$

式中的 $\boldsymbol{A}_1$ 往往是奇异阵。

将式(0.22)与式(0.18)比较可知，冯·纽曼模型也是典型的广义动态系统。

控制理论家以往多是在一般情况下去研究式(0.17)和式(0.18)所示系统的能控性、能观性、鲁棒调节与最优控制等问题。其实，除了这些问题之外，还有一些问题值得研究。比如，若式(0.17)和式(0.18)中的参数阵 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是非负阵时，那么又有许多特殊规律值得进一步去探讨。而参数的非负性在经济领域有其广泛的实际背景。对经济学家来讲，尽管他们早在四十年代就给出了广义系统模型，然而较少从一般情况下去讨论系统的运动分析、稳定性分析以及能控、能观、极点配置、鲁棒调节等问题及其实际意义。经济学家主要针对具体问题进行具体分析。他们考虑的问题有：非负参数广义动态经济系统的产出结构、价格、增长率、利率、经济调整等实际问题。得到了诸如冯·纽曼射径和“快车道”等著名结论。如果将控制理论家和经济学家已有的研究成果和方法结合起来，便可得到一个新的研究领域，不妨称之为：“广义系统经济控制论”。这个研究方向对以计划经济为主的国家来讲是特别有用的。但无论在理论上还是在实际上都还有许多问题等待人们去解决。本课程只是介绍这个领域最基本的知识。

列昂惕夫模型和冯·纽曼模型是国家或地区、企业进行计划经济工作的主要模型。计划经济中的许多基本问题可以利用这些模型和广义系统理论来解决。例如，利用式(0.20)和式(0.22)所示的列昂惕夫模型和冯·纽曼模型可解决如下一些基本问题：

1. 已知各年消费 $\boldsymbol{d}(0),\cdots,\boldsymbol{d}(t)$，求产出 $\boldsymbol{x}(t)$ 的变化规律。

2. 若消费按某一增长率增长，如果我们希望产出也按同一增长率增长，那么产出与消费同步增长条件是什么？

3. 在一定的物价水平 $\boldsymbol{p}(t)$ 和工资水平 ω 之下，有一定的消费水平 $\boldsymbol{d}(t)$。而消费水平 $\boldsymbol{d}(t)$ 又影响产出结构 $\boldsymbol{x}(t)$ 和物价水平 $\boldsymbol{p}(t)$。那么工资水平、物价水平、产出结构、增长率之间的关系怎样？供需均衡时的比例、比价、增长率如何求解？

4. 怎样构造不同技术水平时的经济增长模型？如何从当前低技术水平最优过渡到高技术水平？

5. 如何进行经济结构的调整？

6. 经济系统不进行调整走向崩溃的可能性。

………

以上问题无疑是计划经济工作中的基本问题，不难用广义系统经济控制理论知识予以解答。

广义列昂惕夫模型和广义冯·纽曼模型在我国已开始受到重视并加以实际应用。它们的正确使用有助于国家或地区经济沿着有计划按比例的最优增长轨道(快车道)前进。一旦经济增长率得到提高，其经济效益将是以百亿元、千亿元计算，长远效益更是不可估量。

除了常用的列昂惕夫和冯·纽曼模型是广义系统外，还有许多宏观以及微观经济与管理系统以描述方程来表达，它们也属于广义系统，在本书有关章节将分别予以介绍。广义系统经济控制论的应用范围将是十分广泛的。

第一章　经济与管理中的广义动态系统

§ 1.1　前向时间因果经济系统

本节对前向时间系统最基本的一些知识及其应用作简要介绍。

§ 1.1.1　前向时间因果经济系统的运动分析和稳定性分析

关于前向时间系统的定义已经在导论中予以介绍。前向离散时间系统可用如下方程描述：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为 m 维输入向量，$\boldsymbol{y}(t)$ 为 r 维输出向量。

所谓前向时间系统的运动分析就是在已知系统初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$（当前状态）和控制策略 $\boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{u}(1), \cdots, \boldsymbol{u}(t-1)$ 时，去预测系统未来状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 的变化规律。容易用迭代法求解 $\boldsymbol{x}(t)$. 从式(1.1.1)可知：

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0)$$

则：

$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1)$$

解出 $\boldsymbol{x}(2)$ 后再向前推知 $\boldsymbol{x}(3)$，如此反复迭代，得：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \cdots + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-2) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-1)$$

或记为：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{x}(0) + \sum_{j=0}^{t-1} \boldsymbol{A}^{t-j-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j) \tag{1.1.2}$$

输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 为：

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{x}(0) + \sum_{j=0}^{t-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{t-j-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j) \tag{1.1.3}$$

上式便是式(1.1.1)所示的前向时间系统解表达式。式中第一项：

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{x}(0)$$

称为系统的自由运动，它的大小只与初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 有关，而与输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 无关。式(1.1.3)的第二项：

$$\boldsymbol{y}_2(t) = \sum_{j=0}^{t-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{t-j-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j)$$

称为系统的强迫运动，它的大小只与输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 有关。

下面举一例子说明如何对经济系统进行预测。

例 1.1.1 继续考虑例 0.1 的地区总产出预测问题。从式(0.9)有:

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}I(t+1)\\K(t+1)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&\sigma\theta\\1-\rho&1-\delta+\rho\sigma\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I(t)\\K(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\\rho\end{bmatrix}u(t)\\y(t)&=[0,\theta]\begin{bmatrix}I(t)\\K(t)\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.4}$$

现设: $\rho=0.7$, 即投资的 70% 当年形成固定资产，而余下的 $1-\rho=0.3=30\%$ 在下一年形成固定资产。又设积累率 $\sigma=0.3$, 资本产出比 $\theta=0.25$, 折旧率 $\delta=0.05$。现问: 当 1987 年 ($t=0$) 投资总额 $I(0)=10$ 亿元，固定资产存量 $K(0)=300$ 亿元，且每年中央拨款 $u(t)=1$ 亿元为常数时，该地区总产出 $y(t)=Y(t)$ 将怎样变化? 增长率为多少?

解 依题意有:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&\sigma\theta\\1-\rho&1-\delta+\rho\sigma\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.075\\0.3&1.0025\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\\rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0.7\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}I(0)\\K(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\300\end{bmatrix}$$

利用解表达式(1.1.2)有:

$$\begin{bmatrix}I(t)\\K(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^t\begin{bmatrix}I(0)\\K(0)\end{bmatrix}+(\boldsymbol{A}^{t-1}+\boldsymbol{A}^{t-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\cdot 1\tag{1.1.5}$$

记矩阵等比级数和为 $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}^{t-1}+\boldsymbol{A}^{t-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$$

两边同乘以 $\boldsymbol{A}$ 阵,得:

$$\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{A}^t+\boldsymbol{A}^{t-1}+\cdots+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}$$

令 $\boldsymbol{S}$ 减去 $\boldsymbol{AS}$, 得:

$$\boldsymbol{S}-\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^t$$

当 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 有逆时,得:

$$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^t)\tag{1.1.6}$$

把它代入解表达式(1.1.5)中,得:

$$\begin{bmatrix}I(t)\\K(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^t\begin{bmatrix}I(0)\\K(0)\end{bmatrix}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{B}\tag{1.1.7}$$

利用线性代数知识或本书第二章提供的方法可求出 $\boldsymbol{A}^t$ 值为:

$$\boldsymbol{A}^t=\begin{bmatrix}0.0209883\lambda_1^t+0.9790116\lambda_2^t&0.0716725(\lambda_1^t-\lambda_2^t)\\0.2866902(\lambda_1^t-\lambda_2^t)&0.0209883\lambda_1^t+0.9790116\lambda_2^t+0.9580233(\lambda_1^t-\lambda_2^t)\end{bmatrix}$$

式中, $\lambda_1=1.0244627$, $\lambda_2=-0.0219627$, 它们是 $\boldsymbol{A}$ 阵的两个特征根。

将 $\boldsymbol{A}^t$ 值代入式(1.1.7),整理后,得:

$$\begin{bmatrix}I(t)\\K(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}*\\336.30422\lambda_1^t+3.69574\lambda_2^t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\40\end{bmatrix}$$

最后,求出总产出 $Y(t)$ 为:

$$Y=\theta K(t)=0.25K(t)=84.076\times 1.02446^t+0.9239(-0.0219627)^t-10\tag{1.1.8}$$