随 机 控 制

冯缵刚 郭治 编

国防工业出版社

随 机 控 制

冯缵刚
郭 治 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书以随机过程为数学工具，阐述了动态滤波与随机控制及其对偶关系的基本理论。全书分六章：随机过程；随机作用下的动态系统分析；卡尔曼滤波与预测；离散系统的随机控制；连续系统的滤波与随机控制；贝叶斯估计与控制。书后附有练习题。

本书主要作为高等工科院校自动控制、工业自动化、系统工程诸专业硕士研究生课的教材，也可供相应专业的教师与工程技术人员参考。

随机控制

冯缵刚
郭　治　编

*

国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张$17^1/_2$　408千字
1988年6月第一版　1988年6月第一次印刷　印数：0,001—2,400册

ISBN 7-118-00069-8/TP8　定价：2.95元

前 言

任何控制系统都是在随机变化的环境中、在随机干扰的作用下工作的，所有控制系统的测量装置测出的量都是含有随机误差的，这些随机现象的存在给实际的控制系统的分析与设计带来一系列新问题。随机控制理论就是在解决这些新问题的过程中逐步形成的。随机控制理论虽然有些深奥，但是作为自动控制专业的研究生却是不可回避的。本书就是为高等工科院校自动控制专业研究生编写的随机控制课程的教材。

本书包括三部分内容：随机过程、最优滤波和最优随机控制。最优随机控制的分离定理、最优确定性控制和最优滤波的对偶定理是本书的纽带，编者力图将上述三个分属不同范畴的内容联结成统一的整体，使通常由三门课程讲授的内容得以熔融于一门课程之中。这不仅有利于精简课程、减少课时，而且更有利于提高学生对知识的洞察与概括能力。

注重工程实用性是本书在选材与阐述方式上所遵循的首要原则。考虑到工程实践中被控量多为连续的模拟量，而控制策略又多为数字计算机提供的离散数字量，故本书对连续时间与离散时间的滤波与控制是同等重视的，同时也分析了采样系统的特点。书中的很多例题与练习题也是从具有工程背景的问题中提炼简化而来。通观全书，它是以理论阐述为主的，但从纯控制理论的角度看，它在存在性、唯一性、收敛性的分析上，甚至在问题的叙述上都会被认为是不够严密的。考虑到工科研究生知识结构的特点，编者以自己的实践经验为依据，认为这样的内容编排对学生接受知识并将之用于解决实际问题都是有益的。

使用本书要求预先学习一些课程。其中有：线性代数、线性系统、概率论（不包括随机过程）。对具备了这些知识的研究生，讲授本教材的全部内容约需 54 学时。学习本书的研究生如果具有内积与赋范空间概念（属泛函分析内容）并熟悉线性二次型准则的确定性最优控制理论，当能更快更深地理解本书所讨论的内容，但这些却并非必不可少的。熟悉随机过程的读者，可从第二章学起。对连续时间滤波与控制不感兴趣的读者，可略去第一章之第四至第六节、第二章之第七至第十三节及第五章之全部。本书为自适应滤波与自适应随机控制奠定了良好的理论基础，学完本书后再学习随机自适应控制理论，将不会存在很大的困难。

1982 年以来，本书的编者曾先后为华东工学院自动控制专业历届研究生与助教进修班讲授了随机控制课。本书即是在编者讲稿的基础上完成的。北京工业学院张志方教授审阅了全部书稿，提出的宝贵建议均已采纳。在编写过程中，华东工学院许志刚、李怀忠、谢立华、徐刚、陈学敏等同志亦提出过很多中肯的意见，并给编者很多具体帮助，大大减轻了编者事务性工作。在此一并表示深切的谢意。

编者热忱地期望读者对本书的错误与不足提出批评，以期将来改正。

编 者

目　录

第一章 随机过程

§1.1 引 言

在自动控制与数据处理系统中，所处理的信号的某些特征往往是不能事先确切知道的。描述这些信号强而有力的数学工具是随机过程。本章将叙述以后各章需要用到的随机过程的基本理论，主要包括：随机过程的定义；有限维分布函数族；统计参数；诸如独立过程、独立增量过程、马尔柯夫过程、二阶矩过程、高斯过程等特殊类型的随机过程；在均方意义下以及在概率1的意义下的随机过程分析。已具备上述知识的读者可直接从第二章学起。那些仅了解处理随机变量的概率论知识而尚未接触过随机过程的读者，认真地学习本章后，再学习以后各章时，将不会在随机过程理论方面遇到障碍，这是写作本章的宗旨。想系统地了解随机过程理论的读者，请阅读有关专著。

§1.2 随机过程的一般概念

在正式提出随机过程的定义之前，先举几个随机过程的实例。

例1.1 设计这样一个实验：将骰子的六个面分别标上数字 $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$，在 $t=0, 1, 2, \cdots$ 的每个瞬时掷一次骰子，同时记录朝上骰面的数字，那么，实验的结果将是一个数列 $x(t)$，$t=0, 1, 2, \cdots$，如图1.1所示。重复上述

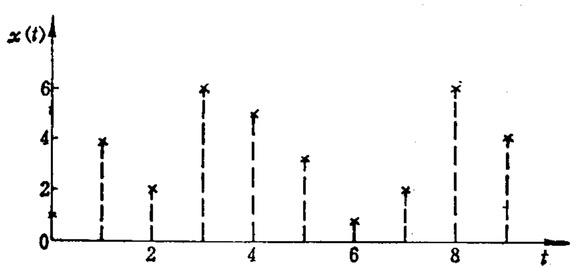

图 1.1

实验，可得另一结果。所有可能的结果构成的集合就是一种随机过程。用数学符号表示上述随机过程，即

$$\mathscr{X}=\{x(t),\ t\in T\}$$

其中 t 称为附标，T 是附标集合。对本例

$$T=\{t;\ t=0, 1, 2, \cdots\}$$

当固定 $t=t_i\in T$ 时，$x(t_i)$ 是一个事件，又称一个样本。样本的集合 $\{x(t_i)\}$ 称样本空间，它是一个随机变量。随机过程的一个元素 $x(t)$，$t\in T$ 称为该过程的一个实现、一条轨迹或一个样本函数。所有样本函数的集合就是随机过程，又称样本函数空间。对本例而言，这是一个样本与附标均取离散值的随机过程。

例1.2 同一型号的多个电源稳压器在相同环境中同时工作，由于它们内部结构上的微小差异以及环境条件随时间而变化，它们的输出电压将不尽相同并且会随时间而有

所波动，如图1.2所示。所有这些可能出现却又互不相同的输出电压所构成的集合$\{x(t),\ t\in T\}$是又一种随机过程。其中$T=\{t;\ 0\leqslant t<\infty\}$，且$x(t_i)$在$t_i\in T$时可取某个范围内的任何值。显见，这是一种样本空间与附标集合均连续的随机过程。

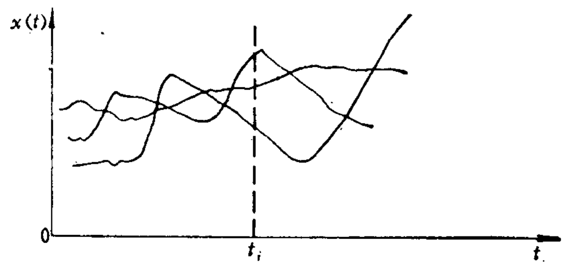

图 1.2

倘若将上述诸电压在$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$诸瞬时精确采样，那么，采样后形成的随机过程的样本空间仍将是连续的，但附标将仅取离散值。倘若再将采样后的电压送入数字电压表中加以显示，由于该仪表要将输入电压在其能表示的最后一位上进行舍入，并要通过零阶保持器显示该电压值，所以显示后所造成的随机过程的样本只取离散值，而附标集合将是连续的。

例1.3 用相同型号的雷达同时对一个空中目标连续地测量其位置，所有可能得到的测量误差的集合$\{x(t),\ t\in T\}$又是一种随机过程，它与前两例之明显差异是，当$t_i\in T$时

$$x(t_i)=(x_1(t_i),\ x_2(t_i),\ x_3(t_i))^T\in \boldsymbol{R}^3$$

其中$\boldsymbol{R}^3$为三维欧几里得空间。此时$\{x(t_i)\}$是三维随机变量。而$\{x(t),\ t\in T\}$为三维随机过程。

随机过程的定义 设T是某个确定的实数集合，对于每个$t_i\in T$，集合$\{x(t_i)\}$是一个在N维欧几里得空间内取值的N维随机变量，则对于全部$t\in T$的N维随机变量族$\mathscr{X}=\{x(t),\ t\in T\}$就称为$N$维随机过程，又称$N$维随机函数。$t$称为随机过程的附标，在实用中常常把它解释为时间。$T$称为附标集合，本书只考虑两类附标集合：①$T=\{t;\ t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$或$T=\{t;\ t=\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，此时随机过程称为离散参数或离散时间的随机过程，又称随机序列；②$T=\{t;\ 0\leqslant t<\infty\}$或$T=\{t;\ -\infty<t<\infty\}$，此时随机过程称为连续参数或连续时间的随机过程。

随机变量的分布函数 对一个N维随机过程的一个样本空间$\{x(t_i)\}$而言，它是一个N维随机变量。倘若已知该N维随机变量的分布函数

$$F(\xi_i^T;\ t_i)=P\{x(t_i)\leqslant\xi_i\} \tag{1-1}$$

即事件$x(t_i)\leqslant\xi_i$出现的概率时，我们就认定该N维随机变量的统计特性被完全确定。这里

$$x(t_i)=(x_1(t_i),\ x_2(t_i),\ \cdots,\ x_N(t_i))^T$$
$$\xi_i=(\xi_{i_1},\ \xi_{i_2},\ \cdots,\ \xi_{i_N})^T$$

且规定

$$P\{x(t_i)\leqslant\xi_i\}=\{x_1(t_i)\leqslant\xi_{i_1},\ x_2(t_i)\leqslant\xi_{i2},\ \cdots,\ x_N(t_i)\leqslant\xi_{i_N}\} \tag{1-2}$$

当然，也可以用相应的密度函数

$$f(\xi_i^T;\ t_i)=\frac{\partial}{\partial\xi_i}F(\xi_i^T;\ t_i)$$
$$=\frac{\partial^N}{\partial\xi_{i_1}\cdot\partial\xi_{i_2}\cdots\partial\xi_{i_N}}F(\xi_{i_1},\ \xi_{i_2},\ \cdots,\ \xi_{i_N};\ t_i) \tag{1-3}$$

等价地描述上述N维随机变量的统计特性。

例1.4 由例 1.1 给出的随机过程的任意一个样本空间均是一维随机变量，很明显，其样本在诸离散值上取值是等概率的，其相应的分布函数与密度函数如图 1.3 所示。

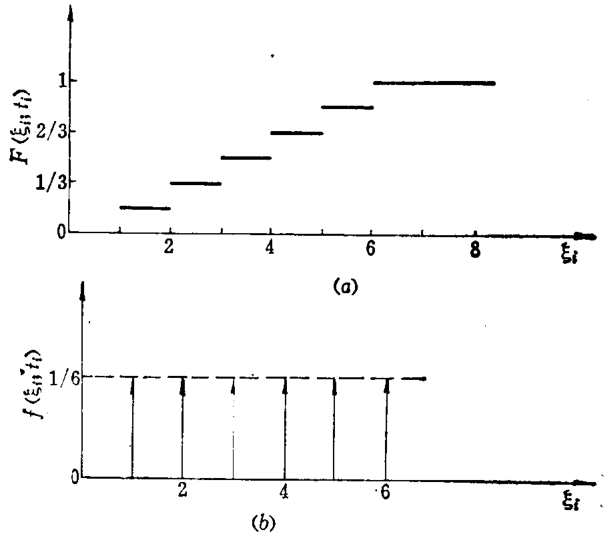

图 1.3

密度函数 $f(\xi_i;\ t_i)$ 在此图中是用六个箭头表示的，它们分别表示六个面积为 1 / 6 的狄拉克（Dirac）函数，简记做 δ -函数。δ -函数的定义是

$$\delta(\xi_i - j) = \begin{cases} 0 & j \neq \xi_i \\ \infty & j = \xi_i \end{cases} \tag{1-4}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi_i - j) d\xi_i = 1 \tag{1-5}$$

从而可写出

$$f(\xi_i;\ t_i) = \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{6} \delta(\xi_i - j)$$

很显然，对具有离散样本的随机变量、其分布函数不连续，其密度函数含有 δ -函数。书写均甚不便。此时，描述其统计特性的更好的工具往往是概率函数，即样本取所有不同值的概率表示式。对本例而言，即是

$$P\{\xi_i = j\} = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \\ 0 & j \neq 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \end{cases}$$

例1.5 若N维随机变量$\{x(t_i)\}$的密度函数可表述成

$$f(\xi_i^T;\ t_i) = (2\pi)^{-N/2}[\det P(t_i)]^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}[\xi_i - a(t_i)]^T P^{-1}(t_i)[\xi_i - a(t_i)]\right\} \tag{1-6}$$

其中ξ_i与 $a(t_i)$ 为N维矢量，而$P(t_i)$ 是一个将被定义为方差的N维正定方阵，则随机变量$\{x(t_i)\}$称为N维高斯变量，又称正态变量。由例 1.2 与例 1.3 给出的随机过程的

任一个样本空间分别可用一维的与三维的高斯分布来近似的描述其统计特性。很显然，这种分布的样本空间是连续的。

例1.6 若一维随机变量$\{x(t_i)\}$的样本空间仅取正整数，且其概率函数可表示成

$$P\{x(t_i)=k\}=\frac{1}{k!}[\lambda(t_i)t_i]^k e^{-\lambda(t_i)t_i} \tag{1-7}$$

对$k=0,1,2,\cdots,\infty$成立，则该随机变量称为泊松（Poisson）变量，相应的分布称泊松分布，如式（1-7）所示。在$[0,t_i)$的时间间隔内，电话对总机的呼唤次数$x(t_i)$乃是一个仅取正整数的随机变量。在一定的假设下，可以证明，此$\{x(t_i)\}$服从泊松分布。详细论述，请参看§1.6例1.17。

倘若$\{x(t_i)\}$是N维随机变量，如果其概率分布满足

$$P\{x_1(t_i)=k_1,\ x_2(t_i)=k_2,\ \cdots,\ x_N(t_i)=k_N\}$$

$$=\prod_{j=1}^{N}\frac{[\lambda_j(t_i)t_i]^{k_j}}{k_j!}e^{-\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_j(t_i)t_i} \tag{1-8}$$

则称$\{x(t_i)\}$是N维泊松变量。

随机过程的有限维分布函数族 已知$t_i\in T$的每一个$\{x(t_i)\}$的分布函数，在一般情况下，并不能充分说明$\{x(t),\ t\in T\}$的全部统计规律性。至少，它不能说明$\{x(t_i)\}$与$\{x(t_j)\}$，t_i，$t_j\in T$，且$t_i\neq t_j$时，这两个随机变量是否互相独立，至于更多瞬时的样本空间的统计规律性就更无从谈起了。为了解决诸如此类的问题，下面引入有限维分布函数的概念。

在一维随机过程的M个相异的样本空间中各取一个样本$x(t_i)$，$i=1,2,\cdots,M$，就可构成一个联合事件$(x(t_1),\ x(t_2),\ \cdots,\ x(t_M))^T$，所有可能的联合事件的集合就构成了一个$M$维随机变量，而它的分布函数被定义为

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_M;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M)=p\{x(t_1)\leqslant\xi_1,\ x(t_2)\leqslant\xi_2,\ \cdots,\ x(t_M)\leqslant\xi_M\} \tag{1-9}$$

与它相应的密度函数

$$f(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_M;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M)=\frac{\partial^M}{\partial\xi_1\partial\xi_2\cdots\partial\xi_M}F(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_M;\ t_1,\ t_2,\cdots,\ t_M) \tag{1-10}$$

如果随机过程是N维的，在它的M个相异的样本空间中各取一个样本$x(t_i)$，$i=1,2,\cdots,M$，就可得到一个$N\times M$维随机变量$\{(x^T(t_1),\ x^T(t_2),\ \cdots,\ x^T(t_M))^T\}$。只要将式（1-9）与（1-10）中的$\xi_i$看做是$N$维矢量，那么，此公式就可原封不动地表示此$N\times M$维随机变量的分布函数与密度函数。对附标集合仅有$M$个元素的$N$维随机过程，用这种方法可将它转化成一个$N\times M$维随机变量，从而就可用有限维的随机变量的分布函数来准确地描述它的统计特性。由于本书所考虑的随机过程的附标集合有无穷多个元素，故不能仅用一个有限维分布函数来描述它。

由于M可以随意给定为某个正整数，而M给定后，$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M$的位置还可在T内随意给定，考虑到上述两种随意性，对一个随机过程可以做出无限多个有限维分布函数来。对所有的正整数M与所有的$t_i\in T$，$i=1,2,\cdots,M$，有限维分布函数的集合

$\{F(\xi_1^T, \xi_2^T, \cdots, \xi_M^T; t_1, t_2, \cdots, t_M)\}$称为随机过程$\{x(t), t\in T\}$的有限维分布函数族。不言而喻，还可定义它的有限维密度函数族。对一个随机过程而言，它的有限维分布函数族不仅刻划了相应于每一个$t_i\in T$的随机变量的统计特性，而且也刻划了若干个不同瞬时的随机变量间的相互关系。倘若已知某随机过程的有限维分布函数族，我们就认定该随机过程的统计特性被完全确定。这种认定至少在工程技术领域内是完全可以接受的。关于这种认定在随机过程理论探讨中可能出现的问题已超出属本书讨论的范畴，若需要请读者查阅有关专著。

随机过程的统计参数 有限维分布函数族的引入，可将对随机过程的研究转化为对高维随机变量的研究。因而就有可能将随机变量的统计参数，如均值、方差、协方差等概念引入到随机过程中来。

设$\{x(t), t\in T\}$是N维随机过程，$F(\xi^T; t)$是它的有限维分布函数族中$M=1$时的某个元素，即$t=t_i\in T$时，随机变量$\{x(t)\}$的分布函数，而$f(\xi^T; t)$是相应的密度函数。N维矢量

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t)=E[x(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\xi f(\xi^T; t)d\xi\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\xi dF(\xi^T; t)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x^T; t)dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x^T; t)
\end{aligned}
\tag{1-11}
$$

定义为该随机过程的数学期望函数或均值函数。本书今后将把随机变量的分布函数与密度函数分别写成$F(x^T; t)$与$f(x^T; t)$。很明显，这样做不会影响统计参数的计算，但其实际含义，对初学者来讲，最好令$x=\xi$，而仍按式（1-9）与（1-10）去理解。这里还应该提醒一下，倘若将矢量$x(t)$写成展开式

$$
x(t)=(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t))^T \tag{1-12}
$$

则式（1-11）应理解为

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t)&=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_N)_t^T\\
&=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{N\text{个}}(x_1, x_2, \cdots, x_N)^T f(x_1, x_2, \cdots, x_N; t)dx_1dx_2\cdots dx_N
\end{aligned}
\tag{1-13}
$$

又，N维方阵

$$
\begin{aligned}
P_x(t)&=\mathrm{var}[x(t)]\\
&=E[x(t)-\bar{x}(t)][x(t)-\bar{x}(t)]^T\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-\bar{x}(t)][x(t)-\bar{x}(t)]^T f(x^T; t)dx
\end{aligned}
\tag{1-14}
$$

定义为该随机过程的方差函数，或中心矩函数。而N维方阵

$$
\begin{aligned}
R_x(t, s)&=\mathrm{cov}[x(t), x(s)]\\
&=E[x(t)-\bar{x}(t)][x(s)-\bar{x}(s)]^T\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-\bar{x}(t)][x(s)-\bar{x}(s)]^T
\end{aligned}
$$

$$\times f[x^T(t),\ x^T(s);\ t,\ s]dx(t)dx(s) \tag{1-15}$$

定义为该随机过程的协方差函数。显然

$$P_x(t)=R_x(t,\ t)$$

当 $x(t)$ 用式（1-12）表示时，有

$$R_x(t,\ s)=\begin{pmatrix} r_{11}(t,\ s),\ r_{12}(t,\ s),\ \cdots,\ r_{1N}(t,\ s) \\ r_{21}(t,\ s),\ r_{22}(t,\ s),\ \cdots,\ r_{2N}(t,\ s) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{N1}(t,\ s),\ r_{N2}(t,\ s),\ \cdots,\ r_{NN}(t,\ s) \end{pmatrix}$$

$$=\{r_{ij}(t,\ s)\}_{N\times N} \tag{1-16}$$

其中

$$r_{ij}(t,\ s)=E[x_i(t)-\bar{x}_i(t)][x_j(s)-\bar{x}_j(s)]^T$$

为标量，其值与 t，s 有关。又

$$R_x^*(t,\ s)=\left\{\frac{r_{ij}(t,\ s)}{[r_{ii}(t,\ t)\cdot r_{jj}(s,\ s)]^{1/2}}\right\}_{N\times N} \tag{1-17}$$

定义为该随机过程的规范化的协方差函数。

若另有M维随机过程$\{y(t);\ t\in T\}$，则$N\times M$矩阵

$$\begin{aligned}R_{xy}(t,\ s)&=\mathrm{cov}[x(t),\ y(s)]\\&=E[x(t)-\bar{x}(t)][y(s)-\bar{y}(s)]^T\\&=\{E[x_i(t)-\bar{x}_i(t)][y_j(s)-\bar{y}_j(s)]\}_{N\times M}\end{aligned} \tag{1-18}$$

称为随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$与$\{y(t),\ t\in T\}$的互协方差函数。

在定义随机过程的均值函数、方差函数与协方差函数时，仅用到了$f(x^T;\ t)$与$f[x^T(t),\ x^T(s);\ t,\ s]$，而这仅相应于用到有限维密度函数族中的一维与二维密度函数族。因而，从一般意义上讲，均值函数，方差函数与协方差函数不能表示随机过程的全部统计特性，但这些统计参数却描述了随机过程的统计规律性的最重要与最关键的部分。

设N维随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$在任一瞬时的随机变量均服从由式（1-6）所示的正态分布，那么，根据式（1-11）与（1-14）将很容易知道它的均值函数与方差函数分别为

$$\bar{x}(t)=a(t)$$

$$\mathrm{var}[x(t)]=P_x(t)$$

倘若上述随机过程在任一瞬时的随机变量均服从由式（1-7）所示的泊松分布，那么，可同样求出其均值函数与方差函数均为

$$\bar{x}(t)=\mathrm{var}[x(t)]=\lambda(t)t$$

请注意，并不是所有随机过程都有均值函数、方差函数与协方差函数。现举一例证。

例 1.7　若随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$在任意一个$t\in T$上，随机变量均服从柯西分布，即

$$f(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \tag{1-19}$$

则

$$\bar{x}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{1+x^2}dx=\text{indeterminate}$$

即均值函数不存在。考虑到式（1-14）与（1-15），其方差函数与协方差函数都不能存在。

协方差函数的性质 设$\{x(t),\ t\in T\}$与$\{y(t),\ t\in T\}$分别为N与M维随机过程，则它们的方差函数、协方差函数与互协方差函数有下列性质

（1）
$$R_{xy}(t,\ s)=R_{yx}^T(s,\ t) \tag{1-20}$$

此性质可从它的定义直接得到。若$x(t)=y(t)$，则协方差阵

$$R_x(t,\ s)=R_x^T(s,\ t) \tag{1-21}$$

而其对角线上的元素有

$$r_{ii}(t,\ s)=r_{ii}(s,\ t)$$

（2）令$t_i\in T$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ M$，则方阵

$$\{R_x(t_i,\ t_j)\}_{M\times M}=\begin{pmatrix} R_x(t_1,\ t_1), & R_x(t_1,\ t_2), & \cdots, & R_x(t_1,\ t_M) \\ R_x(t_2,\ t_1), & R_x(t_2,t_2), & \cdots, & R_x(t_2,\ t_M) \\ \cdots & & & \\ R_x(t_M,\ t_1), & R_x(t_M,\ t_2), & \cdots, & R_x(t_M,\ t_M) \end{pmatrix}\geqslant 0 \tag{1-22}$$

为非负定阵。

证明 令z为$M\times N$维非随机矢量，记

$$w=((x(t_1)-\bar{x}(t_1))^T,\ (x(t_2)-\bar{x}(t_2))^T,\ \cdots,\ (x(t_M)-\bar{x}(t_M))^T)^T$$

则z与w均为$M\times N$维矢量，且

$$z^T\cdot w=w^T\cdot z$$

由于二个相等数相乘的均值必大于或等于零，故有二次型

$$E(z^Tww^Tz)=z^T\cdot E(w\cdot w^T)\cdot z=z^T\cdot\{R_x(t_i,\ t_j)\}_{M\times M}\cdot z\geqslant 0$$

即
$$\{R_x(t_i,\ t_j)\}_{M\times M}\geqslant 0$$

令上式中的$M=1$，则有

$$P_x(t)=\operatorname{var}[x(t)]=R_x(t,\ t)\geqslant 0 \tag{1-23}$$

即方差阵亦为非负定阵。

（3）在$R_x(t,\ t)$与$R_y(s,\ s)$中，不妨设$R_y(s,\ s)>0$，则必有

$$R_x(t,\ t)-R_{xy}(t,\ s)R_y^{-1}(s,\ s)R_{yx}(s,\ t)\geqslant 0 \tag{1-24}$$

证明 令z为N维非随机矢量，λ为$N\times M$常矩阵，则有

$$z^T\{[x(t)-\bar{x}(t)]-\lambda[y(s)-\bar{y}(s)\}$$
$$=\{[x(t)-\bar{x}(t)]-\lambda[y(s)-\bar{y}(s)]\}^Tz$$

将等式两边相乘，再求均值，恒有

$$\begin{aligned} & z^T\cdot E\{[x(t)-\bar{x}(t)]-\lambda[y(s)-\bar{y}(s)]\} \\ & \cdot\{[x(t)-\bar{x}(t)]-\lambda[y(s)-\bar{y}(s)]\}^Tz \\ & =z^T[R_x(t,\ t)-\lambda R_{yx}(s,\ t)-R_{xy}(t,\ s)\cdot\lambda^T \\ & \quad +\lambda R_y(s,\ s)\lambda^T]z\geqslant 0 \end{aligned}$$

令 $\lambda=R_{xy}(t,\ s)\cdot R_y^{-1}(s,\ s)$，则

$$R_x(t,\ t)-R_{xy}(t,\ s)\cdot R_y^{-1}(s,\ s)\cdot R_{yx}(s,\ t)\geqslant 0$$

若取 $x(t)=y(t)$，则有

$$R_x(t,\ t)-R_x(t,\ s)R_x^{-1}(s,\ s)R_x(s,\ t)\geqslant 0$$

令$\{x(t),\ t\in T\}$与$\{y(t),\ t\in T\}$均为一维随机过程，由上两式可导出两个非常有用的公式，即

$$r_x(t,\ t)r_y(s,\ s)\geqslant r_{xy}^2(t,\ s)\geqslant 0 \tag{1-25}$$

及

$$r_x(t,\ t)r_x(s,\ s)\geqslant r_x^2(t,\ s)\geqslant 0 \tag{1-26}$$

将 $x(t)$ 与 $y(t)$ 分别看做随机矢量样本 $u(t)$ 的第 i 个与第 j 个分量（标量），则

$$\mathrm{var}[u(t)]=P_u(t)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} \ddots & & \\ r_x(t,\ t) & \cdots & r_{xy}(t,\ t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yx}(t,\ t) & \cdots & r_y(t,\ t) \\ & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad & \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} & \end{array}$$

从式（1-25）可知，只要$P_u(t)$主对角线上的元素存在，整个$P_u(t)$就一定存在。又

$$\mathrm{cov}[u(t),\ u(s)]=R_u(t,\ s)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} \ddots & & \\ r_x(t,\ s) & \cdots & r_{xy}(t,\ s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yx}(t,\ s) & \cdots & r_y(t,\ s) \\ & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad & \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} & \end{array}$$

设 $t,\ s\in T$，$r_x(t,\ t)$，$r_x(s,\ s)$，$r_y(t,\ t)$ 与$r_y(s,\ s)$ 均存在，由式（1-26）可知，$r_x(t,\ s)$ 与$r_y(t,\ s)$ 均应存在。而由式（1-25）可知，$r_{xy}(t,\ s)$ 亦存在。又，重新审查一下式（1-25）的整个证明过程，可以发现、将条件到结论中的 t 与 s 对调，一切公式均仍成立，即

$$r_x(s,\ s)r_y(t,\ t)\geqslant r_{xy}^2(s,\ t)=r_{yx}^2(t,\ s)\geqslant 0 \tag{1-27}$$

依然成立。这表明，上述矩阵中的$r_{yx}(t,\ s)$ 也存在。

综上所述：若一个N维随机过程的每个分量的方差函数存在，则它的任意二个分量间的互协方差函数存在；整个随机过程的方差函数存在；整个随机过程的协方差函数存在。

从式（1-26）还可引出另一结论：规范化的协方差函数$R_x^*(t,\ s)$ 中的每一个元素的绝对值均不大于 1，即式（1-17）中的

$$|r_{ij}^*(t,\ s)|=\frac{|r_{ij}(t,\ s)|}{[r_{ii}(t,\ t)\cdot r_{jj}(s,\ s)]^{1/2}}\leqslant 1 \tag{1-28}$$

（4）若$R_x(t,\ s)$ 诸对角线上的元素在 $(t,\ t)$ $t\in T$上连续，即

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} r_{ii}(t+h,\ t+k)=r_{ii}(t,\ t)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

则$R_x(t,\ s)$ 的所有元素均在 $(t,\ s)$ $t,\ s\in T$上连续，即

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} r_{ij}(t+h,\ s+k)=r_{ij}(t,\ s) \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{1-29}$$

此时称$R_x(t,s)$在$t,s\in T$上连续。此性质的意义很明确：只要N维随机过程的每个分量的方差函数是连续的，那么整个随机过程的方差函数与协方差函数都是连续的。

证明　做

$$\begin{aligned}
&|r_{ij}(t+h,\ s+k)-r_{ij}(t,\ s)|\\
&=|\mathrm{cov}[x_i(t+h),\ x_j(s+k)-x_j(s)]+\mathrm{cov}[x_i(t+h)-x_i(t),\ x_j(s)]|\\
&\leqslant\{r_{ii}(t+h,\ t+h)[r_{jj}(s+k,\ s+k)-2r_{jj}(s+k,s)+r_{jj}(s,s)]\}^{1/2}\\
&+\{[r_{ii}(t+h,\ t+h)-2r_{ii}(t+h,\ t)+r_{ii}(t,t)]\cdot r_{jj}(s,\ s)\}^{1/2}
\end{aligned}$$

令$h\to 0$，$k\to 0$，上述不等式的右部趋于零，原命题得证。

随机过程的相关函数　相关函数是随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$的又一种统计参数，其定义是

$$\Psi_x(t,\ s)=E[x(t)\cdot x^T(s)]=R_x(t,\ s)+\bar{x}(t)\cdot\bar{x}^T(s) \tag{1-30}$$

当$\bar{x}(t)=0$　$t,\ s\in T$时，有

$$\Psi_x(t,\ s)=R_x(t,\ s)$$

重新审查上述协方差函数性质的证明，不难看出，只要去掉均值，协方差函数就变成了相关函数。这就是说，前述的四条有关协方差函数的性质，对相关函数而言，依然存在。

设$\{x_i(t),\ t\in T\}$是N维随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$的第i个分量，记$j=\sqrt{-1}$，则

$$\varphi(t,\ \tau)=E[e^{j\tau x_i(t)}] \tag{1-31}$$

定义为$\{x_i(t),\ t\in T\}$的特征函数。且有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\varphi(t,\ \tau)&=\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}E[e^{j\tau x_i(t)}]\\
&=j^k\cdot E[x_i^k(t)e^{j\tau x_i(t)}]
\end{aligned}$$

令$\tau=0$，则有

$$E[x_i^k(t)]=\frac{1}{j^k}\cdot\varphi_\tau^{(k)}(t,\ 0)$$

分别取$k=1,\ 2$，有

$$\bar{x}_i(t)=\frac{1}{j}\varphi_\tau'(t,\ 0)$$

$$E[x_i^2(t)]=-\varphi_\tau''(t,\ 0)$$

它称为$\{x_i(t),\ t\in T\}$的原点矩函数。很明显，它是$\Psi_x(t,\ t)$的第i个对角元素。综观上面两式，可知，只要$E[x_i^2(t)]$存在，$\bar{x}_i(t)$就必然存在；只要$E[x_i^2(t)]$连续，$\bar{x}_i(t)$亦必然连续。又

$$\mathrm{var}[x_i(t)]=E[x_i^2(t)]-\bar{x}_i^2(t)=[\varphi_\tau'(t,\ 0)]^2-\varphi_\tau''(t,\ 0) \tag{1-32}$$

这又表明，$E[x_i^2(t)]$存在，则$\mathrm{var}[x_i(t)]$必然存在；$E[x_i^2(t)]$连续，则$\mathrm{var}[x_i(t)]$

也一定连续。

倘若 $x(t)$ 的每一个分量都有如上的特性，再考虑到协方差与相关函数的性质，不难得到如下结论：如果N维随机过程的每一维分量的原点矩函数都存在，那么，它的相关函数必然存在；它的相关函数存在，则其均值函数与协方差函数亦都存在。将上述存在性条件改为连续性条件，命题依然成立。

相关函数存在的随机过程称为二阶矩过程，这是一种非常重要的随机过程。

§1.3 特殊类型的随机过程

欲探讨随机过程的统计规律性，应从它的有限维分布函数族或有限维密度函数族入手。根据有限维分布函数族或有限维密度函数族的性质，把随机过程分为若干种特殊类型，再从简到繁逐一地予以讨论，这将使今后的论述具有条理性与科学性。那些实用价值大的，尤其在估值理论与控制工程中得到广泛应用的特殊类型的随机过程将是讨论的重点。下述的种种类型，如无特别指明，它们的每一类型又都可分为连续时间与离散时间两种。

独立过程 若随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$的有限维密度函数族中的每一个元素都有

$$\begin{aligned}&f(x_1^T,\ x_2^T,\ \cdots,\ x_M^T;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M)\\&f(x_1^T;\ t_1)\cdot f(x_2^T;\ t_2)\cdots f(x_M^T;\ t_M)\end{aligned}\tag{1-33}$$

则称该随机过程为独立过程。对独立过程而言，只要已知它的每一瞬时的样本空间的分布函数，它的统计规律性就完全被确定了。

设随机过程的样本函数 $x^T(t)=(y^T(t),\ z^T(t))$，该随机过程的有限维密度函数族中的每一个元素均有

$$\begin{aligned}&f(y_1^T,\ z_1^T,\ y_2^T,\ z_2^T,\ \cdots,\ y_M^T,\ z_M^T;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M)\\=&f(y_1^T,\ y_2^T,\ \cdots,\ y_M^T;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M)\\&\cdot f(z_1^T,\ z_2^T,\ \cdots,\ z_M^T;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M)\end{aligned}\tag{1-34}$$

则称随机过程$\{y(t),\ t\in T\}$与$\{z(t),\ t\in T\}$独立。有了上述两个定义，读者应该分清，两个独立过程与两个随机过程独立是不同的两件事。

不相关过程 设随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$存在协方差函数，若对所有 $t,\ s\in T$，且 $t\neq s$ 时，恒有

$$R_x(t,\ s)=E[x(t)-\bar{x}(t)][x(s)-\bar{x}(s)]^T=0\tag{1-35}$$

则称该随机过程为不相关过程。否则为相关过程。倘若还有

$$\bar{x}(t)=0$$

则称该随机过程为正交过程。

若另有随机过程$\{y(t),\ t\in T\}$，当 $t,\ s\in T$时，恒有

$$R_{xy}(t,\ s)=E[x(t)-\bar{x}(t)][y(s)-\bar{y}(s)]^T=0\tag{1-36}$$

则称随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$与$\{y(t),\ t\in T\}$不相关。否则，称该两随机过程相关。若还有

$$\bar{x}(t)=\bar{y}(t)=0$$

则称该两随机过程正交。

独立与不相关是两个互不隶属的两种概念。独立过程可能不存在协方差函数，如每

个样本空间均为柯西分布的随机过程就没有协方差函数，因而就无从谈起它是否为不相关过程。但是，对二阶矩过程而言，若独立就一定不相关。这可证明如下：

独立的二阶矩过程的协方差函数必然存在，考虑到协方差函数的定义式（1-15）与独立过程的定义式（1-33），易于导出等式

$$
\begin{aligned}
R_x(t,\ s) &= E[x(t)-\bar{x}(t)][x(s)-\bar{x}(s)]^T \\
&= E[x(t)\cdot x(s)]-\bar{x}(t)\cdot\bar{x}^T(s) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot x^T(s)\cdot f[x^T(t),\ x^T(s);\ t,\ s] \\
&\quad \cdot dx(t)dx(s)-\bar{x}(t)\bar{x}^T(s) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot f[x^T(t);\ t]dx(t)\right\} \\
&\quad \cdot x^T(s)\cdot f[x^T(s);\ s]dx(s)-\bar{x}(t)\cdot\bar{x}^T(s) \\
&= \bar{x}(t)\cdot\bar{x}^T(s)-\bar{x}(t)\cdot\bar{x}(s) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

根据不相关过程定义，独立的二阶矩过程必为不相关过程，但其逆不真。

平稳过程　若随机过程的有限维密度函数族中每一个元素都满足

$$
\begin{aligned}
& f(x_1^T,\ x_2^T,\ \cdots,\ x_M^T;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_M) \\
&= f(x_1^T,\ x_2^T,\ \cdots,\ x_M^T;\ t_1+\tau,\ t_2+\tau,\ \cdots,\ t_M+\tau)
\end{aligned}
\tag{1-37}
$$

即所有的密度函数都不随时间的推移而改变，则该随机过程称为狭义的或严格的平稳过程。

若随机过程的均值函数为常数、协方差函数为时间间隔的函数，即

$$
\begin{cases}
\bar{x}(t)=\text{const} \\
R_x(t,\ s)=R_x(t-s)=R_x(\tau)
\end{cases}
\tag{1-38}
$$

则该随机过程称为广义或弱的平稳过程，简称为平稳过程。

狭义的二阶矩平稳过程一定是广义的平稳过程。现证明如下

设$\{x(t),\ t\in T\}$为狭义的二阶矩平稳过程，当t_1，$t_2\in T$，且$\tau=t_2-t_1$时，有

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\ t_1)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\ t_1+\tau)dx \\
&= \bar{x}(t_2)
\end{aligned}
$$

由于t_1与t_2的任意性，故$\bar{x}(t)=\text{const}$。又有

$$
\begin{aligned}
R_x(t_1,\ t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x(t_1)-\bar{x}][x(t_2)-\bar{x}]^T \\
&\quad \cdot f[x(t_1),\ x(t_2);\ t_1,\ t_2]dx(t_1)dx(t_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})^T f(x_1,\ x_2;\ t_1+\tau',\ t_2+\tau')dx_1dx_2 \\
&= R_x(t_1+\tau',\ t_2+\tau')
\end{aligned}
$$

令$t_1+\tau'=0$，则

$$R_x(t_1,\ t_2)=R_x(0,\ t_2-t_1)=R_x(\tau)$$

命题得证。但其逆不真。

对广义平稳过程而言，其协方差函数的性质，与前一节的一般论述相比较，可进一步强化为

（1） $R_x(\tau)=R_x^T(-\tau)$ （1-39）

（2） $\{R_x(t_i-t_j)\}_{M,M}\geqslant 0$ （1-40）

（3） 当随机过程为一维随机过程时，有

$$r_x(0)\geqslant|r_x(\tau)| \tag{1-41}$$

（4） 若 $\tau=0$ 处，$R_x(\tau)$ 的诸对角元素存在，则 $R_x(\tau)$ 在所有 τ 上存在；若 $\tau=0$ 处，$R_x(\tau)$ 的诸对角元素连续，则 $R_x(\tau)$ 在所有 τ 上连续。

这些性质的成立是显而易见的。

各态历经过程 若随机过程$\{x(t),\ t\in T\}$的任意一个样本函数

当 $T=\{t;\ 0\leqslant t<\infty\}$时

$$\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}x(t)dt=\bar{x}=\text{const} \tag{1-42}$$

当 $T=\{t;\ -\infty<t<\infty\}$时

$$\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T_1}^{T_1}x(t)dt=\bar{x}=\text{const} \tag{1-43}$$

当 $T=\{t;\ t=0,1,2,\cdots\}$时

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{t=0}^{m}x(t)=\bar{x}=\text{const} \tag{1-44}$$

当 $T=\{t;\ t=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$时

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\sum_{t=-m}^{m}x(t)=\bar{x}=\text{const} \tag{1-45}$$

依概率1成立〔其含义详见§1.6，这里不妨粗略地理解为一般意义上的成立〕，则称该随机过程的均值函数是各态历经的。

若式（1-42）～（1-45）换成

$$\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}[x(t)-\bar{x}(t)][x(t+\tau)-\bar{x}(t+\tau)]^T dt$$
$$=R_x(\tau) \tag{1-46}$$

$$\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1}[x(t)-\bar{x}(t)][x(t+\tau)-\bar{x}(t+\tau)]^T dt$$
$$=R_x(\tau) \tag{1-47}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{t=0}^{m}[x(t)-\bar{x}(t)][x(t+n)-\bar{x}(t+n)]^T$$
$$=R_x(n) \tag{1-48}$$