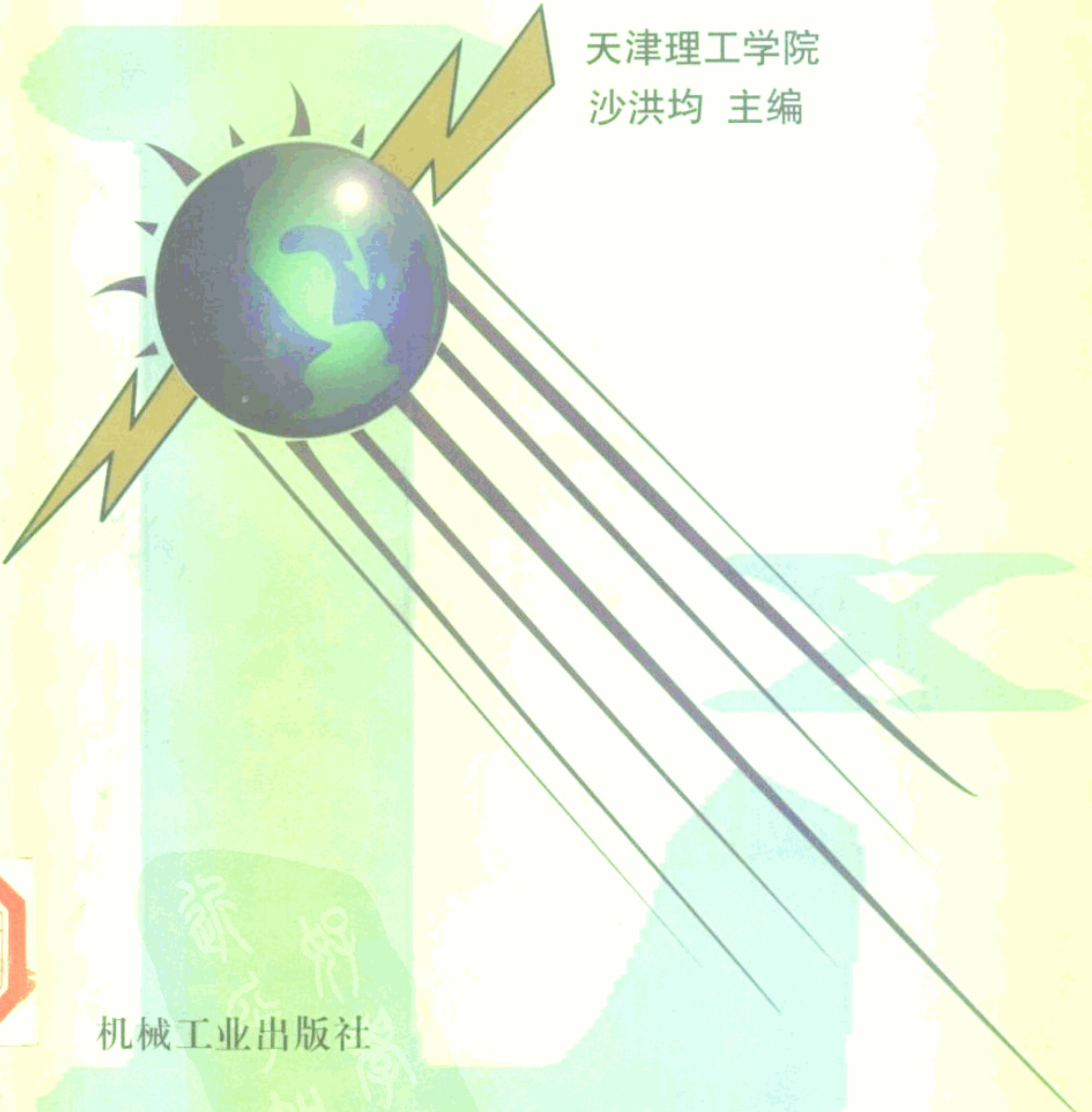
高等工程专科学校教材

物理学

天津理工学院

沙洪均 主编



机械工业出版社

前　　言

本书是为高等工程专科教育编写的物理教材。编写过程中，我们参照了新近制定的“高等学校工程专科物理教学基本要求”，在近几年来物理教学改革和教材建设的新经验、新思想基础上，力求体现下列原则：

1）避免与中学物理不必要的重复，将高等专科物理教学界定于简单微积分水平。

2）以必需和够用为度，选择基本理论知识内容，降低了理论性和系统性；避免以概念、符号和逻辑为体系构建教材；与此同时，我们仍然充分注意了物理学概念和方法的学科特点，以求启发和训练学生的物理思维能力。

3）突出物理学的工程应用性质，力图使学生通过学习认识到物理学在现代科学、工程技术、国民生产、社会与日常生活等广阔领域内深刻而持久的影响力和渗透力，由此唤起他们的工程意识和应用观念。

4）体现教学内容的现代化。为此，除了分散在各章节之中传统的力、热、电、光等内容外，还专设第五篇集中介绍物理学在现代科学和工程技术中的广泛应用。

5）参照了国家技术监督局于 1993 年 12 月 27 日发布的《中华人民共和国国家标准 GB3100～3102—93》，对以往教材中的非标准化内容作了修改，规范了物理学名词、术语、单位和符号。

本书的出版得到了编者所在单位和机械工业出版社教材编辑室的支持与帮助，谨表示诚挚的谢意。

天津市大学物理教学委员会主任、天津大学陈志芳教授主审了本书全稿，并提出了许多宝贵的意见，一并表示感谢。

参加编写的人员及其分工如下：内蒙工业大学王克勋执笔第一、二章，翟伶祥执笔第三、八章，赵巨东执笔第十九章；中国民用航空学院徐舟执笔第十一、十五章，乐小云执笔第十二～十四章；河南焦作工学院张智执笔第十六～十八章；天津城市建设学院刘学群执笔第五、六章；天津理工学院刘永胜执笔第四、九章，沙洪均执笔第七、十、二十～二十三章及附录。全书由沙洪均、刘永胜负责统稿。

限于编者的学识和水平，书中缺点和错误在所难免，恳诚读者批评指正。

编　者

1997 年 2 月

目　录

第二篇 热 学

第三篇 电 磁 学

第四篇 波动光学

第五篇 物理学与现代科学技术

附 录

第一篇　力　　学

力学的研究对象是机械运动。机械运动是指不考虑微观结构的宏观物体或物体各部分之间相对位置变化的运动。

机械运动的形式有多种多样。依据运动的基本特点，可区分为质点力学、刚体力学和连续体力学。

一个物体的运动，若不涉及转动与形变，可以不考虑其形状和大小，把物体视为具有一定质量的点，通常称为**质点**。质点力学研究的基本运动是平动。

一个物体在外力作用下，其形状和大小保持不变，这种理想化的物体称为**刚体**。刚体可以看作相对位置保持不变的质点系。刚体力学研究的基本运动是平动和转动。

一个内部有形变或流动的物体称为**连续体**。连续体包括弹性体和流体，其理想模型是完全弹性体（没有内摩擦的物体）和理想流体（完全不可压缩的无粘性的流体）。连续体可以看作由连续分布的质量元组成的系统。连续体力学研究的基本运动是振动、波动和流动。

经典力学研究宏观物体的低速运动。经典力学的基本规律是牛顿运动定律和机械能、动量、角动量守恒定律。牛顿运动定律是对物体机械运动的确定性描述。给定初值，物体的运动便唯一地由牛顿运动定律确定。

近20年来，非线性系统显示的混沌行为日益为人们所关注。混沌运动的每一步都服从牛顿运动定律，是确定性的。但是，由于运动自身的非线性导致敏感地依赖初值，呈现出随机性，因此，牛顿运动定律不仅能够描述简单的完全确定的世界，也可以描述非线性系统的内在随机运动。这是人们对经典力学认识的新的里程碑。

本篇主要讨论质点的曲线运动、刚体的定轴转动、理想流体的定常流动、机械振动和机械波。讨论过程中，将侧重应用牛顿运动定律以及能量、动量和角动量守恒定律分析这些运动的主要特征和基本规律。

第一章　牛顿运动定律

本章在中学物理的基础上，讨论质点运动的描述量及其微分表达式，以及牛顿运动定律在质点运动中的应用。

第一节　质点运动的描述

一、质点　参考系　坐标系

1. 质点　在所研究的运动中，实际物体的形状和大小对运动的影响可以忽略不计时，物体可视为质点。质点是力学中的一个理想模型。例如单摆的摆球、电场中的电子以及绕日公转的地球等。复杂物体的运动可以看作是质点系的运动，原则上可以在质点运动的基础上进行研究。

2. 参考系　宇宙间万物都在运动。绝对静止的物体是不存在的。这就是**运动的绝对性**。但是，处于不同运动状态的观测者对同一运动的描述是不同的。例如，在匀速行驶的船上的人，观测到船上的物体相对自己是静止的，而岸上的人则观测到物体在作匀速直线运动。由此可见，对物体运动的描述总是依赖于观测者与物体之间的相对运动的。这就是**运动描述的相对性**。为了确切地描述物体的运动，需要选定一个物体或物体系作为标准，这个标准物称为**参考系**。上述的船或岸都可以选为参考系。

3. 坐标系　为了定量地描述物体的运动，需要在参考系上建立一定的坐标系。例如，研究火车的运动，可以取地面为参考系，以车站为坐标原点，火车轨道为坐标轴建立坐标系。又如，研究地球在宇宙中的运动，通常取太阳为参考系，以太阳为坐标原点，由太阳指向某一恒量的有向直线为坐标轴建立坐标系。

参考系和坐标系的选取应根据实际问题而定。常用的坐标系有直角坐标系、球坐标系、极坐标系等。坐标系必须固定在参考系中。

二、质点运动的描述量

以抛体运动为例，研究质点运动的描述量。

1. 位矢　位移　如图 1-1 所示，炮车以仰角 θ_0 发射一枚炮弹。忽略空气阻力，则炮弹的运动轨迹是一条抛物线。取地面参考系，炮车为坐标原点，建立图示的直角坐标系。

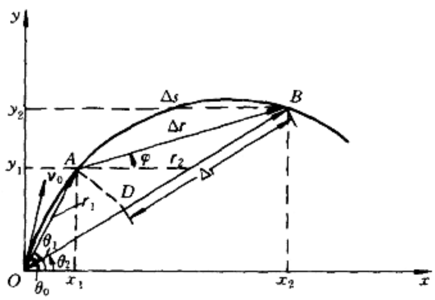


图 1-1　炮弹运动的位置矢量

设炮弹在时刻 t_1、t_2 相继到达 A、B 两点，那么，它在这两点的位置可以分别用由原点 O 指向 A、B 的矢量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 表示。$\boldsymbol{r}_1$ 或 $\boldsymbol{r}_2$ 称为**位置矢量**，简称**位矢**。一般地说，用 $\boldsymbol{r}$ 表示位矢，用 r 表示位矢的大小，用 θ 表示 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴正方向的夹角。在直角坐标系中，则有

$$r = xi + yj \tag{1-1}$$

$$r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1-2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \tag{1-3}$$

在 $t_1 \to t_2$ 时间间隔内位置的变化量称为**位移矢量**，简称**位移**。表示为

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j \tag{1-4}$$

位移的大小和方向分别表示为

$$\Delta r = |\Delta r| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1-5}$$

$$\cos\varphi = \frac{\Delta x}{|\Delta r|} \tag{1-6}$$

应该注意的是，位移的大小 $|\Delta r|$ 不等于位矢大小的增量 Δr。从图 1-1 中看出，前者等于 AB，后者等于 DB。

另外，位移的大小也不等于 $t_1 \to t_2$ 时间内运动的路程。运动路程等于弧长 $\widehat{AB}$。显然 $\widehat{AB} \neq AB$。一般地说，路程与 $t_1 \to t_2$ 时间内经历的所有状态有关，称为**过程量**，而位移仅与始末状态有关，称为**状态量**。

2. 平均速度　速度　如图 1-1 所示，炮弹在 $t_1 \to t_2$ 时间间隔内运动的平均快慢可以用**平均速度矢量**表示

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \tag{1-7}$$

平均速度矢量只能描述一段时间间隔内运动的平均快慢和方向，不足以描述某一时刻的运动快慢和方向。为此，应取平均速度矢量的极限值而称为**瞬时速度**。瞬时速度等于位矢对时间的一阶导数，表示为

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j \tag{1-8}$$

由图 1-2 可见，当 $\Delta t \to 0$ 时，B 点无限趋近于 A 点，位移 Δr 必将趋向 A 点的切线方向。事实上，设 A 点的瞬时速度 v 的方向与 x 轴的夹角为 θ，其斜率

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} \tag{1-9}$$

即为曲线在 A 点的切线斜率。因此，瞬时速度的方向必定沿着运动曲线的切线方向并指向运动一侧。速度的大小称为**速率**，它等于路程对时间的一阶导数，即

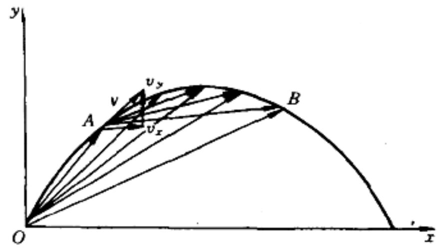


图 1-2　曲线运动的速度矢量

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{1-10}$$

3. 加速度　切向加速度与法向加速度　物体在 $t_1 \to t_2$ 时间间隔内运动速度的变化可用**平均加速度矢量**表示，即

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{1-11}$$

平均加速度矢量的大小和方向与时间间隔的选取有关，是运动速度变化的平均量度。为此，取平均加速度矢量的极限值并称为**瞬时加速度**。瞬时加速度等于瞬时速度对时间的一阶导数或者位矢对时间的二阶导数，表示为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-12}$$

在直角坐标系中，加速度表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} \tag{1-13}$$

在曲线运动中，加速度还可以沿曲线在某点的切线方向和法线方向分解，分别称为**切向加速度和法向加速度**。如图 1-3 所示，炮弹在 A 点的速度为 $\boldsymbol{v}$，加速度即为重力加速度。设两者之间的夹角为 θ，则加速度可以分解为

$$a_\tau=g\cos\theta$$

$$a_n=g\sin\theta$$

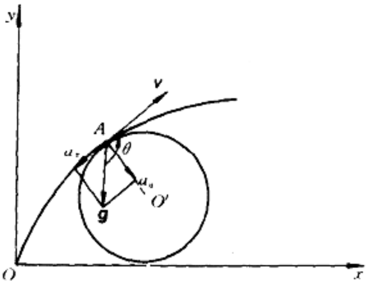


图 1-3　切向加速度与法向加速度

式中 $a_\tau<0$，表示切向加速度与速度方向相反；法向加速度 a_n 则总是指向曲线弯曲的一侧。一般而言，将加速度、力等矢量沿某点的切线分解时，规定沿该点的速度方向为正方向；沿法线分解时，规定沿法线而指向曲线弯曲的一侧为正方向。

可以证明（过程从略），任意曲线运动中切向加速度和法向加速度的大小分别为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1-14}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{1-15}$$

式中，v 为速度的大小即速率，ρ 为曲线在某点的曲率半径。由式（1-14）可以理解，切向加速度是速率变化的量度；由式（1-15）可以理解，法向加速度与曲线的曲率有关，因而是速度方向变化的量度。

以上所讨论的仅为二维曲线运动中的位矢、位移、速度和加速度的物理意义及其表示方法。这些结论对于三维空间的一般曲线运动同样适用，读者可以参考附录中有关三维空间曲线的数学知识加以推广和运用，这里不再详细讨论。

三、运动描述量之间的关系

位移、速度、加速度三者之间的微积分关系如下

$$\text{位矢}\underset{\text{积分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftharpoons}}\text{速度}\underset{\text{积分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftharpoons}}\text{加速度}$$

1. 位移和速度之间的关系是

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

或者

$$\Delta\boldsymbol{r}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \tag{1-16}$$

2. 路程和速率之间的关系是

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

或者
$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \cdot \mathrm{d}t \tag{1-17}$$

3. 速度和加速度之间的关系是

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

或者
$$\Delta \boldsymbol{v} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{a}\mathrm{d}t \tag{1-18}$$

四、运动方程

根据上述运动描述量之间的微积分关系，若已知位矢随时间的变化关系$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，就能够确定在任一时刻的运动状态$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$和$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$。因此，$\boldsymbol{r}(t)$称为**运动方程**，相应地，$\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$分别称为**速度方程**和**加速度方程**。

在三维直角坐标系中，运动方程可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-19a}$$

其分量式为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1-19b}$$

消去运动方程中的时间t，可得运动的轨道方程。例如图 1-1 所示的炮弹的抛体运动，其运动方程为

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\theta_0 \\ y(t) = v_0 t\sin\theta_0 - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去运动方程中的t，得到运动曲线的轨道方程为

$$y = x\tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2$$

显然，这是直角坐标系中的抛物线方程。

第二节　直线运动和曲线运动

一、直线运动

质点作直线运动时，位矢、速度、加速度等物理量的矢量特性可以简化为用代数量表示。代数量的正负号表示这些矢量的方向。在选定的一维坐标系中，和x轴正方向同方向的物理量为正，反之为负；某一物理量的计算结果为正，表明其方向沿x轴正方向，反之则沿x轴负方向。如图 1-4 所示，质点沿x轴负方向作减速运动，有$|v_2|<|v_1|$，但是

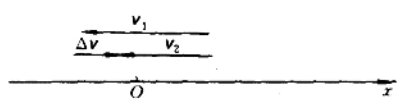


图 1-4　直线运动的加速度方向

$$\Delta v = v_2 - v_1 = -|v_2| - (-|v_1|) = |v_1| - |v_2| > 0$$

由加速度的定义，有 $a>0$，即加速度沿 x 轴正方向。

在直线运动中，利用位移、速度、加速度对时间的关系曲线分析问题，比较直观简明。举例说明如下。

例题 1-1 一质点从原点开始作直线运动，速度—时间关系曲线如图 1-5 所示。(1) 分析质点的运动特征；(2) 求质点运动加速度并作加速度—时间曲线；(3) 求质点运动的位移和路程。

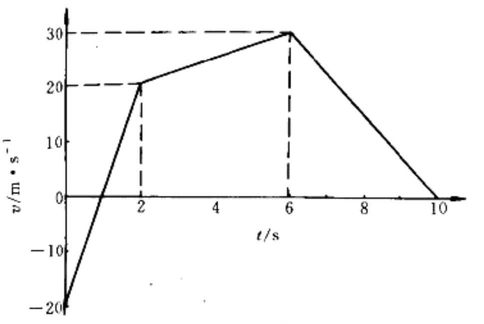


图 1-5 例题 1-1 的速度—时间曲线

解 (1) 由图中看出，$v—t$ 曲线由三段不同斜率的直线组成。由于 $v—t$ 曲线的斜率等于加速度的大小，因此，在 0～2s 内，质点作匀加速运动；在 2～6s 内，作加速度较小的匀加速运动；在 6～10s 内，作匀减速运动。

(2) 根据图中所给数据，计算各段时间内的加速度。

在 0～2s 内

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \left(\frac{20-(-20)}{2-0}\right)\mathrm{m/s^2} = 20\mathrm{m/s^2}$$

在 2～6s 内

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \left(\frac{30-20}{6-2}\right)\mathrm{m/s^2} = 2.5\mathrm{m/s^2}$$

在 6～10s 内

$$a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = \left(\frac{0-30}{10-6}\right)\mathrm{m/s^2} = -7.5\mathrm{m/s^2}$$

根据以上数据作出的加速度—时间曲线如图 1-6 所示。

(3) 为求位移方程，先求速度方程。由 $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$，将此式在

$$\begin{cases} t_1 = t_0 \\ v = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_2 = t \\ v = v \end{cases}$$

条件下积分，则有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t}a\mathrm{d}t$$

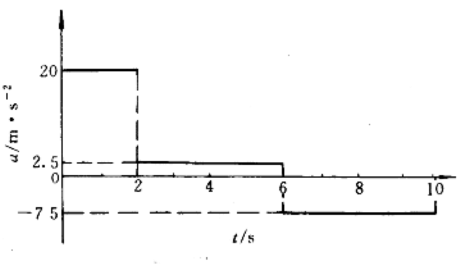


图 1-6 例题 1-1 的加速度—时间曲线

即
$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t}a\mathrm{d}t \tag{a}$$

在式 (a) 中代入图 1-5 中的已知条件以及 (2) 中求得的加速度值，可得

0～2s 内，($t_0=0$，$v_0=-20\mathrm{m/s}$)

$$v = -20 + \int_0^t 20\mathrm{d}t = (20t - 20)\mathrm{m/s} \tag{b}$$

2～6s 内，($t_0=2\mathrm{s}$，$v_0=20\mathrm{m/s}$)

$$v = 20 + \int_2^t 2.5\mathrm{d}t = (2.5t + 15)\mathrm{m/s} \tag{c}$$

6～10s 内，($t_0=6\mathrm{s}$，$v_0=30\mathrm{m/s}$)

$$v = 30 + \int_6^t -7.5\mathrm{d}t = (-7.5t + 75)\mathrm{m/s} \tag{d}$$

由 $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，得 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，将此式在

$$\begin{cases} t_1 = t_0 \\ x = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_2 = t \\ v = v \end{cases}$$

条件下积分，则可求得位移方程

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t$$

即

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t \tag{e}$$

在式 (e) 中代入式 (b)、(c)、(d) 中的速度表达式，并注意到各时间段的初始值，可得

0～2s，($t_0=0$，$x_0=0$)

$$x = 0 + \int_0^t (20t - 20)\mathrm{d}t = (10t^2 - 20t)\mathrm{m}$$

令 $t=2$，则 2s 末位移 $x_2=0$。

2～6s，($t_0=2\mathrm{s}$，$x_0=x_2=0$)

$$x = 0 + \int_2^t (2.5t + 15)\mathrm{d}t = (1.25t^2 + 15t - 35)\mathrm{m}$$

令 $t=6\mathrm{s}$，则 6s 末位移 $x_6=100\mathrm{m}$。

6～10s，($t_0=6\mathrm{s}$，$x_0=x_6=100\mathrm{m}$)

$$x = 100 + \int_6^t (-7.5t + 75)\mathrm{d}t = (-3.75t^2 + 75t - 215)\mathrm{m}$$

令 $t=10\mathrm{s}$，则 10s 末位移 $x_{10}=160\mathrm{m}$。

值得注意的是，在任意时间间隔内，由速度—时间曲线和 x 轴、t 轴所围面积的代数和恰好等于这段时间间隔内的位移。但是，这段时间内通过的路程则为各面积的绝对值的和。请读者自行验证上述结论。

例题 1-2 如图 1-7 所示，套管 A 受绳子牵引沿铅直杆向上滑动。绳子的另一端绕过离杆距离为 b 的滑轮 B 而绕在鼓轮 C 上。当鼓轮匀速转动时，其边缘处质点速度为 v_0，试求套管 A 沿铅直杆上升的速率 v_x（设牵引绳原长 $AB=l_0$）。

解 取 $t=0$ 时 $l=l_0$，则时刻 t 的牵引绳长 $l=l_0-vt$。由图 1-7 中的几何关系（忽略滑轮 B 及其支撑物的大小），有

$$l^2 = x^2 + b^2$$

对上式的两边求导数，有

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

即
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t = v_0$，$x=\sqrt{l^2-b^2}=\sqrt{(l_0-v_0t)^2-b^2}$

所以
$$v_x = \frac{l_0 - v_0 t}{\sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 - b^2}}v_0$$

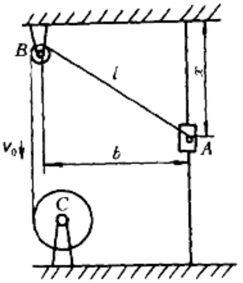


图 1-7　例题 1-2 图

二、曲线运动

抛体运动和圆周运动是常见的二维曲线运动。下面以圆周运动为例，讨论曲线运动的角量描述。

（一）圆周运动的角量描述

如图 1-8 所示，质点绕中心 O 作半径为 R 的圆周运动。在直角坐标系中，其运动方程为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

设位矢在极坐标系中与极轴 Ox 之间的平面角为 θ，称为**角位置**。在时间 Δt 内，位矢转动的角度为 $\Delta\theta$，称为**角位移**。平面角的法定计量单位是 rad。

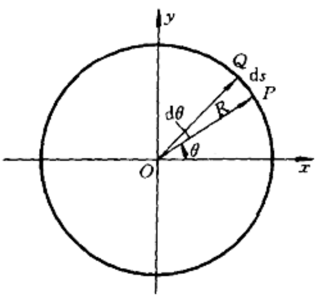


图 1-8　圆周运动的角量描述

角位移对时间的比值称为**平均角速度** $\bar{\omega}$，即

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1-20}$$

平均角速度的极限值称为**瞬时角速度**，简称角速度 ω，即

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-21}$$

角速度用于描述质点绕中心 O 转动的快慢，其法定单位是 rad/s。质点作变速圆周运动时，其角速度随时间而变化。角速度对时间变化率的极限，即角速度对时间的一阶导数称为**角加速度** α，则有

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-22}$$

角加速度的法定单位是 rad/s^2。

质点在平面内作圆周运动时，通常规定逆时针转动方向为正，顺时针转动方向为负。这样，角速度的正负就表示质点绕中心转动的方向。角速度也可以定义为矢量，这在描述刚体的一般转动时是必要的。角速度的矢量方向可用右螺旋法则确定：以右手四指沿转动方向弯曲绕行，大拇指指向为角速度方向。

（二）角量和线量的关系

根据弧长 s 和角位置 θ 的关系 $s=R\theta$，有

$$\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta \tag{1-23}$$

由于 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=\omega$，所以

$$v = R\omega \tag{1-24}$$

由于 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = a_\tau$，$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \alpha$，所以

$$a_\tau = R\alpha \tag{1-25}$$

式（1-24）表示速率与角速度的关系，式（1-25）表示切向加速度与角加速度的关系。法向加

速度与角量的关系则可由 $a_n=v^2/R$ 及式（1-24）得到

$$a_n = R\omega^2 \tag{1-26}$$

（三）匀变速圆周运动

匀变速圆周运动中，角速度均匀增加或减少，角加速度 α 为常量。与匀变速直线的规律相似，匀变速圆周运动的有关公式是

$$\alpha = 常量 \tag{1-27}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{1-28}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{1-29}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \tag{1-30}$$

若用半径 R 同乘式（1-29）两边，得到变速圆周中的弧长与时间关系式

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_\tau t^2 \tag{1-31}$$

例题 1-3 如图 1-9 所示，飞轮半径 $R=50\text{cm}$，绕中心 O 转动时角位置与时间的关系 $\varphi=2t^2$。求（1）以直角坐标表示的运动方程；（2）以弧长表示的运动方程；（3）飞轮边缘一点的速率和加速度的大小。

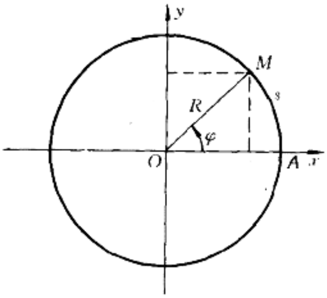


图 1-9 例题 1-3 图

解 （1）直角坐标系中的运动方程

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = R\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + R\sin\varphi\,\boldsymbol{j}$$
$$= 50\cos(2t^2)\boldsymbol{i} + 50\sin(2t^2)\boldsymbol{j} \quad \text{cm}$$

（2）用弧长表示的运动方程可由弧长与角位置的关系直接求得

$$s = R\varphi = 50 \times 2t^2 = 100t^2 \quad \text{cm}$$

也可运用式(1-31)。但是要由 $\varphi=2t^2$ 首先确定 s_0、v_0、a_τ，读者可自行演算。

（3）飞轮边缘一点的速率

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 200t \quad \text{cm/s}$$

切向加速度大小

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 200 \quad \text{cm/s}^2$$

法向加速度大小

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(200t)^2}{50}\text{cm/s}^2 = 800t^2 \quad \text{cm/s}^2$$

加速度大小 $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{200^2+(800t^2)^2}\text{cm/s}^2=200\sqrt{16t^4+1} \quad \text{cm/s}^2$

第三节　牛顿运动定律

牛顿（Isaac Newton，1642—1727），在前人工作的基础上，于 1687 年发表《自然哲学的数学原理》一书。该书系统地阐述了物体的运动与物体之间相互作用的内在联系及其规律，这

就是牛顿运动定律。

本节简要讨论牛顿运动定律的物理意义以及牛顿运动定律在微积分水平上的简单应用。

一、牛顿运动定律

（一）牛顿第一定律

牛顿第一定律又称**惯性定律**。惯性描述了物体所具有的基本运动属性。惯性定律指出，不受其他物体作用的一切物体将保持静止或匀速直线运动状态。惯性定律能够成立的参考系称为**惯性系**。相对于某一惯性系静止或作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系。

（二）牛顿第二定律

牛顿第二定律描述了物体运动状态的变化与其原因之间的定量关系。物体之间的相互作用力不是维持运动状态的原因，而是改变运动状态的原因。

牛顿第二定律的数学表达式是矢量式。实际应用时，应在选定的参考系中建立坐标系。牛顿第二定律是力的瞬时作用规律，体现为加速度是关于时间的微分运算。

牛顿第二定律的矢量式是

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-32}$$

式中，m 是反映物体惯性大小的物理量，称为**惯性质量**。式（1-32）只适用于质点，式中 $\boldsymbol{F}$ 为作用于质点的合外力，$\boldsymbol{a}$ 则是合外力作用下的合加速度。

在直角坐标系中，将力 $\boldsymbol{F}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 分别沿三个坐标轴分解，则牛顿第二定律可以表示成等价的三个分量式

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} & \text{(1-33a)} \\ F_y = ma_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} & \text{(1-33b)} \\ F_z = ma_z = m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} & \text{(1-33c)} \end{cases}$$

在曲线运动中，还可以将力 $\boldsymbol{F}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 分别沿某点的切线方向和法线方向分解，牛顿第二定律可以表示成两个等价的分量式

$$\begin{cases} F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & \text{(1-34a)} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} & \text{(1-34b)} \end{cases}$$

（三）牛顿第三定律

牛顿第三定律指出了物体之间作用力的相互性质和同种属性，用数学式表示为 $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$。力的法定单位是 N。

了解一些常见力的相互作用性质和特点，对于应用牛顿定律解决实际问题是必要的。简要介绍如下：

1. 万有引力　重力　任意两个质点之间存在的吸引力称为**万有引力**。其作用规律用万有引力定律表述，矢量式为

$$\boldsymbol{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{1-35}$$

式中，引力常数 $G=6.672\times10^{-11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$，$\boldsymbol{r}_{12}$是由 m_1 指向 m_2 的矢径，$\boldsymbol{F}_{12}$是 m_1 对 m_2 的引力，即 m_2 受到 m_1 的万有引力。

重力是地球表面附近的物体所受地球的万有引力。由重力产生的加速度称为重力加速度。重力加速度的大小 g 因地理位置、地质情况等因素而稍有变化。一般计算取 $g=9.80\mathrm{m/s^2}$。

2. 弹性力 因物体相互接触发生形变而产生的力称为弹性力。常见的弹性力有弹簧弹性力、绳的张力、正压力和支撑力等。在弹性限度内，弹性力满足胡克定律 $f=-kx$。式中的 k 取决于弹性系统自身的性质，称为**劲度系数**（曾用名“倔强系数”）。

3. 摩擦力 相互接触的物体因相对运动或相对静止但存在运动趋势而产生的接触面之间的作用力称为**摩擦力**。前者属于**滑动摩擦力**，后者属于**静摩擦力**。在达到最大静摩擦力之前，静摩擦力是一变力。**最大静摩擦力**与接触面之间的正压力成正比，用公式表示为

$$f_{\max}=\mu_0 N \tag{1-36}$$

式中，μ_0 为**静摩擦系数**，它取决于材料接触面的性质。

滑动摩擦力与接触面之间的正压力也成正比，即

$$f=\mu N \tag{1-37}$$

式中，μ 为**滑动摩擦系数**，它不仅与接触面性质有关，还与相对运动速度有关。

弹性力和摩擦力起因于物体接触部分的电磁作用力，通常称为**接触力**。重力和万有引力则称为**非接触力**。

二、简单变力作用下的运动

物体（质点）在变力作用下，其加速度的大小和方向不再保持不变。变力作用下的运动或者是变速直线运动，或者是曲线运动。下面通过例题说明牛顿运动定律在变力条件下的应用。

例题 1-4 试求脱离地球引力场作宇宙飞行的飞船所需要的最小速度。

解 设飞船发射时初速度为 v_0，忽略空气阻力。飞船在距离地心为 x 处所受的地球引力为

$$F=-G\frac{mM}{x^2}$$

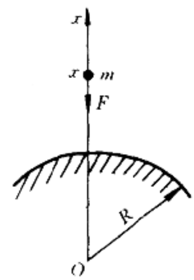


图 1-10 例题 1-4 图

式中的负号表示引力方向与图 1-10 中的坐标轴 Ox 正方向相反。由牛顿第二定律

$$F=-G\frac{mM}{x^2}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

分离变量后则有

$$-GM\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=v\mathrm{d}v$$

对上式两边作不定积分并整理，可得

$$v^2=\frac{2GM}{x}+C$$

为了求得积分常数 C，考虑飞船发射时的初始条件：$x=R$，$v=v_0$，代入上式则有

$$c=v_0^2-\frac{2GM}{R}$$

所以

$$v^2=v_0^2+2GM\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R}\right)$$