新 编

线性代数

XIANXINGDAISHU

刘汉宗 编著

科学技术文献出版社

新 编 线 性 代 数

刘汉宗　　编著

科学技术文献出版社

（京）新登字130号

图书在版编目（CIP）数据

新编线性代数／刘汉宗编著.-北京：科学技术文献出版社，1995
ISBN 7-5023-2423-2

Ⅰ.新… Ⅱ.刘… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第10623号

科学技术文献出版社出版
（北京复兴路15号 邮政编码100038）
中国科学技术信息研究所重庆分所印刷厂印刷 新华书店重庆发行所发行
1994年12月第1版 1994年12月第1次印刷
787×1092毫米 32开本 14印张 308千字
科技新书目：342—124 印数：1—5000册
定价：9.00元

内容简介

本书是编者根据《工程数学教学大纲》，高等学校工科数学课程教学指导委员会在1992年制订的《线性代数课程教学基本要求》(征求意见稿)，在自编教材《线性代数》的基础上进一步改编而成的。

本书内容是：行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵相似对角化、二次型等。各章均有较多的例题，每章附有足够数量的练习题，书末附有答案，供读者参考。

本书的特点是：取材适当，层次分明，结构合理，叙述清楚，例题丰富，由浅入深，便于教与学。

本书可作为高等工科院校教学用书，也可作为工程技术人员自学用书或参考用书。

前　言

本书是编者在西南石油学院多次讲授所编教材《线性代数》的基础上，根据1992年高等学校工科数学课程教学指导委员制订的《线性代数课程教学基本要求》(征求意见稿)以及近年来研究生入学考试《数学考试大纲》中线性代数的要求修改编写而成的。本书适用学时数为34—40。书中打“*”号内容可以不讲授。

在此次修改编写过程中，编者注意了以下四点：

1. 鉴于线性代数内容多，学时紧，学懂容易，做题难的情况，在教材内容取舍上，注意突出重点、分散难点、由浅入深、由易到难、循序渐进地安排内容，并辅以各种例题，使初学者易于理解所学内容，掌握解题思路和方法，以提高学习者的兴趣。

2. 本书内容包括：行列式，矩阵，线性方程组，向量空间，矩阵相似对角化，二次型等六章。前三章是学习本课程的基础，也是其它领域里常用的工具，因此，对前三章内容安排上力求做到叙述详细，解释清楚，自然篇幅也占得大些。第四章向量空间部分内容，是按照《线性代数课程教学基本要求》(征求意见稿）和报考研究生《数学考试大纲》所要求的内容安排的，是读者应该了解和掌握的内容。

3. 尽量注意以实例引入某些基本概念，其目的是让读者了解这些概念的实际背景，同时，也尽量结合实际应用，例如应用矩阵相似对角化求解一阶线性齐次常系数微分方程

组，又如介绍用正(负)定二次型来求多元函数的极值，以引导读者从学习开始就注意理论联系实际问题，达到学以致用的目的。

4. 给读者提供对所学内容进行自我检查的机会，切实掌握解题的一些基本方法和技巧，解决做题难的矛盾，特在每章最后增加一节例题分析，这一节是读者学完该章后再去自学的内容，其中有些例题是采用近年来研究生的入学试题，以此培养读者分析问题和解决问题的能力。

江茂泽教授仔细审阅了全书手稿，并提出了许多宝贵的意见，对编者帮助很大，在此，致以深切谢意。

对西南石油学院各级领导、老师、同学给予的关心、支持和帮助致以衷心的感谢。

本书在修改编写过程中，学习、参考了许多兄弟院校老师们编写的有关书籍、讲义和资料，在此，向所有老师一并表示诚挚的谢意。

限于编者水平与经验，不妥或谬误之处敬请同行、读者批评指正。

编　者

1994年6月

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数的一个重要内容，是科技工作者解决实际问题的一个不可缺少的数学工具．本章在复习二阶、三阶行列式的基础上，引进排列的有关知识，进而把二阶、三阶行列式的概念推广到n阶行列式．

本章的主要内容是：n阶行列式定义、性质及计算，应用行列式解n元线性方程组，即Cramer法则．

§1.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

在中学代数里，大家曾学过用消元法解下列形式的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

消去x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程组(1)的唯一解为

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\[2ex]
x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}
\end{cases}
\tag{2}
$$

(2) 式就是方程组(1)的求解公式。

从求解公式(2) 的形式可见，它较复杂，不好记忆，又不便于应用，因此为了寻求(2) 的分子分母的结构规律，有必要引进一个新的数学符号来表示 (2)，这就是行列式的起源。

经过分析不难发现，x_1、x_2的表达式(2) 的特征是：分子分母都是两个数的乘积减去另两个数的乘积，且分母都是

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

而$x_j(j=1,2)$的表达式的分子是从(3)中将x_j的系数a_{1j}，a_{2j}分别用常数项b_1，b_2代替所得到的结果。因而只要将分母的结构弄清楚了，x_1，x_2的表达式的结构也就清楚了。

为此，给出二阶行列式的定义如下。

定义1 代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做由$2^2=4$个数$a_{ij}(i,\ j=1,2)$排成2行2列的数表的二阶行列式，并用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示之，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4}$$

在数学上常用字母D或d表示行列式。行列式中横排叫行，纵排叫列。数a_{ij}叫做行列式的元素$(i,j=1,2)$。元素a_{ij}的第一个下标i(叫行标)表示该元素在行列式中的第i行，第二个下标j(叫列标)表示该元素在行列式中的第j列，例如a_{12}就是行列式中第一行第二列的元素，其它仿此。

二阶行列式含有2行2列，4个元素，它是两个数乘积项的代数和。(4)式右端代数式称为二阶行列式的展开式。

有了二阶行列式的定义1，就可以用二阶行列式来表示方程组(1)的解的表达式(2)。于是当

$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$时，方程组(1)的唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{5}$$

其中D称为方程组(1)的系数行列式，而D_1，D_2是用方程组(1)的常数项b_1，b_2分别代替D中的第1列、第2列的元素所得到的二阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

二阶行列式的计算法则是：

根据定义1，易知二阶行列式的值等于从它的左上角到右下角的对角线(叫主对角线)所连接的两个元素的乘积$a_{11}a_{22}$，减去从右上角到左下角的对角线(叫副对角线)所连接的两个元素的乘积$a_{12}a_{21}$，即$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。二阶行列式的这个计算方法叫做对角线法则，用图1表示为实线连接的两个元素乘积取正号：$+a_{11}a_{22}$，虚线连接的两个元素乘积取负号：$-a_{12}a_{12}$。以上两个乘积(每个乘积叫做行列式的一项)求和，即得(4)式右端的展开式。

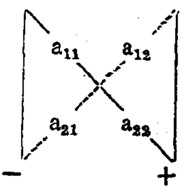

图 1

例1 计算二阶行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$，(2) $D=\begin{vmatrix} a+b & b^2 \\ 1 & a-b \end{vmatrix}$。

解 由对角线法则，有

(1) $D=\begin{vmatrix}2 & -5\\ -3 & -1\end{vmatrix}=2\times(-1)-(-5)\times(-3)=-17$

(2) $D=\begin{vmatrix}a+b & b^2\\ 1 & a-b\end{vmatrix}=(a+b)(a-b)-b^2\cdot 1=a^2-2b^2$

例2 解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+10=0\\ 3x_1+x_2\qquad=0\end{cases}$$

解 把常数项移到方程的等号右端去，方程组变形为

$$\begin{cases}2x_1-x_2=-10\\ 3x_1+x_2=0\end{cases}$$

它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

∴方程组有唯一解。

又∵

$$D_1=\begin{vmatrix}-10 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-10,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & -10\\ 3 & 0\end{vmatrix}=30$$

∴方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-10}{5}=-2,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{30}{5}=6.$$

2. 三阶行列式

这里，采用类似于二阶行列式的定义1，我们直接给出三阶行列式的定义，然后利用它来解三元线性方程组。

定义2 代数和$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$叫做由$3^2=9$个数$a_{ij}(i,j=1,2,3)$排成3行3列的数表的三阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{即} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{6}$$

三阶行列式含有3行3列，共有9个元素$a_{ij}(i,j=1,2,3)$，它是$3!=6$项的代数和，每一项都是从三阶行列式中的不同行不同列上取一个元素的乘积。

计算三阶行列式的对角线法则是：由(6)式不难看出，三阶行列式也有与二阶行列式类似的对角线计算法则。只要把三阶行列式中的第1列、第2列元素依次写在它的第3列右边，如图2所示

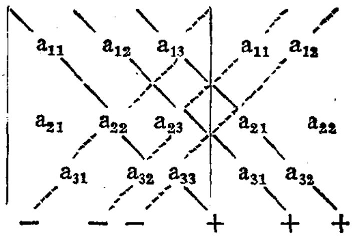

图 2

由于三阶行列式所表示的是$3!(=6)$项的代数和，它可由图2表示出来：

各实线连接的三个元素乘积是代数和中取正号的项，各虚线连接的三个元素乘积是代数和中取负号的项，并求其和，即得(6)式右端的展开式。

例3 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix},$$

解 由对角线法则，有

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-5)\cdot 1$$

$$+1\cdot 3\cdot 3-1\cdot 2\cdot 1-2\cdot(-5)\cdot 3-(-1)\cdot 3\cdot(-2)=28.$$

例4 设三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 2\lambda & \lambda+3\end{vmatrix}$$

问：(1) 当λ为何值时 $D=0$；

(2) 当λ为何值时 $D\neq 0$.

解

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 2\lambda & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=4\lambda^2-2\lambda(\lambda+3)-\lambda(\lambda+3)=\lambda(\lambda-9).$$

由$\lambda(\lambda-9)=0$，解得$\lambda=0$，或$\lambda=9$.

所以 (1) 当$\lambda=0$，或$\lambda=9$时，$D=0$；

(2) 当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 9$时，$D\neq 0$.

用三阶行列式解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{7}$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(7) 有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{8}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

由D_1，D_2，D_3可见，它们正是以(7) 中的常数项b_1，b_2，b_3依次替换D中的第1列、2列、3列所得到的三阶行列式。

例5 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-3x_2-4x_3=-10 \end{cases}$$

解 ∵系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-28\neq 0$$

∴方程组有唯一解。又∵

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -10 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-28,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -10 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=-28,\quad D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -10\end{vmatrix}=-56$$

∴方程组的解由(8) 式得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-28}{-28}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-28}{-28}=1,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-56}{-28}=2$$

由此可见，用二阶、三阶行列式表达二元、三元线性方程组的解，其表达式整洁清晰，便于记忆和应用。

我们知道，大量的工程技术问题中所归纳出的数学模型有些往往含有若干个未知量和方程构成的线性方程组。它的一般形式可写为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

关于这种线性方程组的讨论将放在第三章中进行。在本章只就未知量个数与方程个数相同，即$m=n$时的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_2=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{9}$$

进行讨论。

现在的问题是：方程组(9)是否能象二元、三元线性方程组那样求解？其解的表达公式能用n阶行列式来表示吗？如能，n阶行列式该怎样定义？又该怎样计算呢？