

電磁波概論

工学博士 森田清著



東京・金原出版株式会社・京都

創立明治8年

著者略歴

大正 10 年 元東京高等工業学校卒
大正 14 年 母校助教授
昭和 8 年 工学博士 (東京帝大)
昭和 16 年 東京工業大学教授
昭和 36 年 3 月 停年退職
現 在 沖電気工業(株) 理事, 技師長;
東京工業大学名誉教授

主なる著書

電気磁気演習 (電気書院), 高周波工学
(共立出版), 超短波 (修教社), 実用マ
イクロ波講座 (オーム社) 監修及執筆

昭和 36 年 7 月 15 日 印刷

昭和 36 年 7 月 20 日 発行

電 磁 波 概 論

著 者 森 田 清
発 行 者 金 原 四 郎
印 刷 者 平 尾 秀 吉
印 刷 所 新日本印刷株式会社
東京都新宿区市ヶ谷本村町27

東京都文京区湯島切通坂町21

発行所 金原出版株式会社

電話 東京(921)7161~5 振替口座 東京 151494

京 都 支 社

京都市上京区河原町通丸太町上ル

電話 (23) 3014・振替口座 京都 25642

Printed in Japan

序

今や世を挙げて Electronics 時代という呼び声に諸外国から次々と新しい工学と工業技術とが紹介され、人々はただその受入れに忙殺されて基礎学理の理解と咀嚼に暇をかけられない。勿論外国からの到来技術を迎えることは大切ではあるが、こちらから新しい考えを出し新しく理論を展開する努力もまた大切である。そしてそれには既存学理の十分な理解がこれに先行せねばならない。この理論の咀嚼という点において工科と理科との協力は極めて必要であり、相互理解のための手段として数学の利用は近時愈々目覚ましい。工学部各科の高学年において応用数学の教課が必須とされる最近の風潮はまことに故なしとしない。

しかし数学を数学として勉強するばかりがこれに應える最良の手段ではない。実験担当者の立場から数学を見る手段もある。そして“物の見方”がこの場合には工科的であり、実用的であるといえる。ここに掲げた電磁波概論も実はこういう見地から書いたのもであって従来理科で扱っていたこの分野を工科としてまた数学の応用例として改めて解説したものである。

ここでは電波に関する殆ど凡ゆる新旧の重要事項をとり上げ、その理論的な骨子を紹介する。例えば Huygens の原理では単に言葉での観念的な説明でなくて Green の定理を用い、体積々分から面積々分への変換を用いて基礎理論を明かにした。また電磁 Horn からの放射電波に関連した指向性の問題についてはその基礎の算式の導出に力を入れた。

函数論は電磁波回折の理論になくてならない数学的手段なので巻頭にこれを説明し、Bessel 函数や tensor 自体についても或る程度の解説をつけた。これは屢々電磁界の解析にこれらが用いられるからであって応用事例は後半において説明するという順序をとった。なお積分方程式と Green 函数については特に詳しく運用例題をかかげて解説に努めた。

一方において従来理論の扱いのみで実験結果との照合が充分でなかった半無限金属板からの電波の回折とか、金属球による電波の蔭の問題について、更に疑似誘電体の問題については著者の新しい実験の結果と理論の照合とを例示している。また巻末には電磁波と電子との間の相互作用に関連した事象を扱っている。

本書は元來電波工学乃至通信工学を専攻する人のためにと執筆したものではあるがその前半は物理工学及び機械工学を学ぼうとする人々にも共通してこれが利用される様一般的な叙述という点に意を用いてある。

本書の執筆にあたり母校東京工業大学の物理及び電気の教官各位、就中理博河合紀雄氏また特に電気試験所々員工博飯島泰藏氏の熱心な御協力を得たことをここに記して感謝の意を表する次第である。

昭和 36 年 7 月

著 者 識

なお、主な参考文献は次の如くである。

J.J.Stratton ; Electromagnetic Theory

S.A.Schelkunoff ; Applied Mathematics for Engineers and Scientists

B.B.Baker and E.P.Copson ; The Mathematical Theory of Huygeus' Principle.

L.Lewin ; Advanced Theory of Wave Guides

J.Valask ; Introduction to Theoretical and Experimental Optics

P.M. Morse and H.Feshbach ; Methods of Theoretical Physics.

B.Noële ; The Wiener-Hopf Technique

H.Margenau and G.M. Murphy ; The Mathematics of Phsics and chemistry.

寺沢寛一 ; 数学概論

豊田利率 ; 光学

目 次

第1章 複素函数	1
1.1 函数論大要	1
§1. 複素函数	1
§2. 複素函数の微分と Cauchy-Riemann の条件	2
§3. 等角写像	4
§4. Riemann 面, Branch cut	6
§5. 複素函数の積分	9
§6. 極を含む複素函数の積分	11
§7. Cauchy の積分解	12
§8. 解析函数の微分	13
§9. Taylor の展開	14
§10. Laurent の定理	15
§11. 留数と極	16
§12. 留数を応用した定積分	18
§13. Laurent の展開と Bessel 函数の積分表示	22
1.2 Laplace 変換	24
§1. Step 函数の積分表示	25
§2. Pulse 函数の積分表示	27
§3. 連続実函数の積分表示—Laplace 変換	28
§4. Laplace 変換の応用例 (その1)	29
§5. Laplace 変換の応用例 (その2)	30
1.3 円周座標と Bessel 函数	32
§1. 円周座標	32
§2. Maxwell の電磁方程式から波動方程式へ	35
§3. 波動方程式の解	38
§4. Bessel 函数 J_n, Y_n	41
§5. Modified Bessel 函数 I_n, K_n	43
§6. Ber, Bei 函数	44
§7. J_n, Y_n と I_n, K_n の極限值	45
1.4 円筒型空洞共振器	48
§1. 円筒空洞の電磁界	49
§2. 円筒 TE_{01} 姿態の空洞共振器	50
§3. 空洞内の蓄積エネルギー	51
第2章 ベクトル	53
2.1 ベクトルとダイアデック	53
§1. ベクトルの乗積	53

§2. 相反系のベクトル	54
§3. Gradient, divergence 及び rotation	55
§4. Div, grad, rot, に関する公式	57
§5. Dyadic	58
§6. Dyadic の idemfactor	59
§7. Dyadic の内積と conjugate dyadic	60
2.2 テンソル	62
§1. 非等方性の媒体	62
§2. Contravariant vector と covariant vector	62
§3. Tensor	66
§4. Tensor の和と差, 対称 tensor, 反対称 tensor	68
§5. Tensor の主値	69
§6. Vector から tensor へ	71
2.3 異方体	72
§1. 結晶体の誘電率	73
§2. 対称テンソル	74
§3. 結晶体における電磁波の伝播	76
§4. 位相推移とエネルギー伝播	81
§5. Gyration	83
§6. 磁界中の ferrite 充填導波管	87
第3章 Fourier 展開	90
3.1 Fourier 級数と Fourier 積分	90
§1. Fourier 級数と Fourier 積分	90
§2. 二変数の函数の級数展開	92
§3. Fourier 二重積分	93
§4. Bessel 函数 J_0 による函数 $F(r)$ の積分表示	94
§5. Hankel 函数の積分表示	96
3.2 絞りの計算	101
§1. 矩形導波管における Maxwell の方程式	101
§2. 容量性絞り	103
§3. ポスト	107
3.3 チェレンコフ放射	111
§1. Čerenkov radiation	111
§2. 放射の計算	113

§ 3. Čerenkov Radiation の引出し	115
3.4 非直線特性	116
§ 1. パラメトロン	117
§ 2. Mathieu の微分方程式とその解	119
§ 3. パラメトリック増幅と電力の 関係	122
3.5 漸近展開	127
第4章 近似法	129
4.1 変分法とその応用	129
§ 1. 微分方程式との関係	131
§ 2. 固有値決定への応用	132
§ 3. 物標の背部散乱断面積	135
§ 4. 変分法による背部散乱断面積の 計算	137
4.2 Perturbation Method と 逐次近似法	142
§ 1. Perturbation method	142
§ 2. 電磁空洞における perturbation	144
§ 3. アンテナ電流分布の計算	148
4.3 W.K.B 法	152
§ 1. Schrödinger の方程式	152
§ 2. W.K.B 法の概要	154
§ 3. トンネル効果	159
4.4 Method of Steepest Descent	163
§ 1. Γ 関数の吟味	164
§ 2. 解法	166
第5章 電波放射	168
5.1 アンテナ	168
§ 1. ダブルレットアンテナ	168
§ 2. ループアンテナ	171
§ 3. 放射電磁界と折半平面	173
§ 4. スリットアンテナと磁流	174
5.2 遅相擬似媒体	177
§ 1. 人工誘電体, 人工磁性体の考え	177
§ 2. 人工遅波媒体……金属帯	180
§ 3. 人工遅波媒体……ループの配列	182
5.3 Huygens の原理	190
§ 1. Green の定理	190
§ 2. Huygens の原理	191
§ 3. Helmholtz の式の意味	192
§ 4. Kirchhoff の式	193
§ 5. Stokes の廻折の式	193

§ 6. 回折波の計算	196
5.4 Maxwell の電磁方程式と vector field	197
§ 1. Maxwell の基礎方程式	197
§ 2. Vector field とその分解	198
§ 3. Vector field の例	201
第6章 電波の回折	204
6.1 平面波の回折	204
§ 1. 解き方	204
§ 2. 到来平面波の積分表示	206
§ 3. Riemann 面の考えの導入	210
§ 4. 反射波の導入	213
§ 5. 総括と数値例	217
6.2 球による電波の回折	220
§ 1. 球函数による電磁場	220
§ 2. 平面波を球函数に展開する事	226
§ 3. 電波による球の蔭	228
6.3 平面大地上の垂直ダイポール と電波伝播	238
§ 1. 解法の概略	239
§ 2. ヘルプベクトルによる表示	240
§ 3. 解の積分表示	242
§ 4. 境界条件の導入	244
§ 5. 表示式の分解	246
§ 6. Branch cut と Riemann 面	247
§ 7. 積分の複素面の変更	249
§ 8. 積分の式の整理	250
§ 9. 近似計算	253
§ 10. 結論	255
第7章 Green 函数と 積分方程式	258
7.1 Green 函数	258
§ 1. Source をもつ線型二階微分 方程式の解	259
§ 2. Green 函数の一例	261
§ 3. 二次元の電荷分布による電位	263
§ 4. 線電流を波源とする Green 函数	265
§ 5. 波動方程式における Green 函数 とその積分表示	267
§ 6. 電磁波における Green 函数の応用例	269
7.2 積分方程式	272
§ 1. 積分方程式を微分方程式へ	

変換しての解法	272
§ 2. Fredholm の積分方程式	274
§ 3. Fourier 変換の導入による解法	276
§ 4. Wiener-Hopf 法の概要	278
§ 5. 複素面における Fourier 変換	280
§ 6. Wiener-Hopf 法の考え方	281
§ 7. Wiener-Hopf の解法例	284
7.3 半無限円筒からの音波放射	286
§ 1. 問題の所在	287
§ 2. Green 関数の導入と積分方程式	289
§ 3. Green 関数の表示と放射音波	290
§ 4. 積分方程式の Fourier 変換	294
§ 5. 変換された式の因数分解と結論	296

第 8 章 超高周波電界と

電子の運動

8.1 空間電荷波

§ 1. 基本方程式

§ 2. 二極管方程式

§ 3. 空間電荷の波動の伝播

8.2 電子と電磁波間の

エネルギー交換

§ 1. 速度変調管

§ 2. 螺旋進行波管

§ 3. 電子のサイクロトロン運動と

電磁波

第1章 複素函数

1.1 函数論大要

ここで述べる函数論は主として Riemann 面の考えや Laurent の展開から Bessel 函数の積分表示への推移また定積分への応用などを紹介するのが目的で、説明は数学的な厳格さはさけて実用的な見地に立って解説している。

そもそも函数論は実函数でなく複素函数の微分、積分、展開などを扱う数学の分野であるが、これが電波の回折とか過渡現象における問題の解析や複素函数域における Fourier 積分とか色々と応用がひろい。この知識なくしては電磁場の解析は難しいところから先ず第1章としてこれをかかげた次第である。

§1. 複素函数

今ここに $W=f(Z)$ (1.1)

という Z の函数 W を考えよう。ここに Z も W も、ともに複素数で

$$\left. \begin{aligned} Z &= x+iy \\ W &= u+iv \end{aligned} \right\} \text{.....(1.2)}$$

の形になっている。 f の形は色々に考えられるので例えば

$$W=Z^2 \text{.....(1.3)}$$

$$W=\frac{1-Z}{1+Z} \text{.....(1.4)}$$

$$W=\sin Z \text{.....(1.5)}$$

などが挙げられる。そしてこのような簡単な形ならば W の成分 u, v を夫々 Z の成分 x, y であらわし、又逆に x, y を u, v であらわすことが可能である。

例えば $W=Z^2$
の場合は $Z=re^{i\theta}; x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ }(1.6)

とすることによって

$$W=u+iv=r^2 e^{i2\theta}=r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta$$

従って $\left. \begin{aligned} u &= r^2 \cos 2\theta \\ v &= r^2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \text{.....(1.7)}$

の形となり、更に必要なら (r, θ) を (x, y) で書き改めることも出来る。他の例については

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1-Z}{1+Z} = \frac{(1-x)-iy}{(1+x)+iy} \quad \dots\dots\dots(1.8) \\
 &= \frac{(1-x^2-y^2)-i2y}{(1+x)^2+y^2} \\
 &= u+iv
 \end{aligned}$$

として W の各成分と Z の各成分との関連を知ることが出来る。

このように分解して相互関係を求めるのは後述の等角写像 conformal representation の場合において特に意義がある。しかし普通はこの分解を行わず $W=f(Z)$ の形のまま考え又処理して行く。

このような複素数間の関係を示す函数を複素函数と呼ぶ。複素函数はこれを微分する……つまり dW/dZ を作る……ことも出来れば、またこれを積分する……つまり $\int W dZ$ を行う……ことも出来るが、扱いが複素函数である所から特異の性質がある。そしてこの性質を利用して私達は種々興味深い問題を解いてゆく。

§2. 複素函数の微分と Cauchy-Riemann の条件

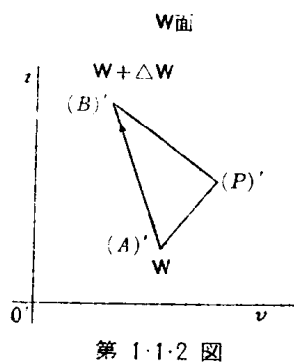
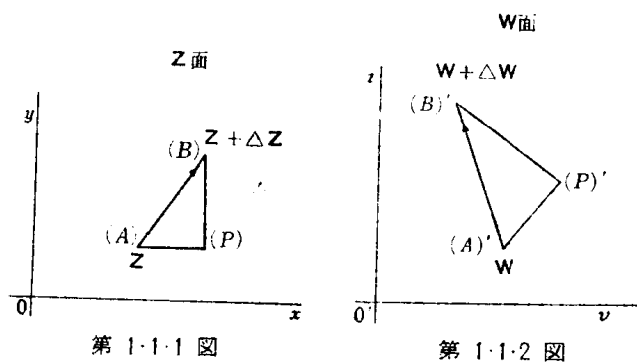
前節に示した一般の形の複素函数はこれを

$$f(Z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \dots\dots\dots(1.9)$$

の形にかくことが出来る。さてこれの微分を行おうとすると Z が複素数であるから dZ なる Z の微分量には大いさと同時に方向が含まれることになる。そこで実函数の場合と同じく

$$\frac{df(Z)}{dZ} = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{f(Z+\Delta Z) - f(Z)}{\Delta Z} \quad \dots\dots\dots(1.10)$$

と定義し、 ΔZ の方向 (ΔZ はベクトルであるから) 如何に拘わらず $df(Z)/dZ$ が unique (唯一、無二の) にきまるためにはどんな条件が必要かを吟味しよう。



これには第 1.1.1 図と第 1.1.2 図とを参照する。第 1.1.1 図は Z 面、第 1.1.2 図は $f(Z) = W$ 面をあらわしており Z 面上の点 (A) (そこは Z なる座標をもつ) に対応して W 面上では点 $(A)'$ (ここで W 即ち $f(Z)$ なる座標をもつ) が考えられる。 (A) 点から ΔZ だけ隔たった (B) 点 (そこは

$Z + \Delta Z$ なる座標をもつ) に対応しては W 面上に $(B)'$ 点 (ここでは $W + \Delta W$ なる値をもつ) があると考えられる。そこで $f'(Z)$ とは、ベクトル $(A)'$ $(B)'$ なる比を意味するわけでこれ自体が大いさと方向をもつ。

そして $f'(Z)$ が unique にきまるためには ΔZ の方向はどの方向をとっても同じ $f'(Z)$ を

与える様になっていなければならない。試みに ΔZ の成分たる $\Delta x = (A)(P)$ をとっても $i\Delta y = (P)(B)$ をとっても、それに対応する W 面上のそれぞれの値 $(A)'(P)'$ のベクトルと $(P)'(B)'$ のベクトルとは共に前記の比

$$\frac{(A)'(P)'}{(A)(P)} = \frac{(P)'(B)'}{(P)(B)} = \frac{(A)'(B)'}{(A)(B)} = f'(Z) \quad \dots\dots\dots (1.11)$$

を保たねばならない。

つまり Z 面の直角三角形 APB に対応する W 面の三角形 $A'P'B'$ は ($\Delta Z \rightarrow 0$ の極限において) 相似の直角三角形でなければならない。一方

これを数式で云えば先ず $(A)'(P)'/(A)(P)$ について

$$\begin{aligned} f'(Z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

となり、次に $(P)'(B)'/(P)(B)$ については

$$\begin{aligned} f'(Z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (1.12) \end{aligned}$$

の関係が成立、この両者が等しいことが必要なのであるから

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1.13)$$

なる関係を得、これが Cauchy-Riemann の条件式と云われるものである。なお上記の関係から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.14)$$

が成立、即ち u も v も Laplace の方程式を満足することがわかる。

そして前述の Z 面、 W 面の各三角形が相似であることを互に conformal であるという。

以上のことを例を以て示せば例えば

$$W = Z^2$$

をとると $W' = 2Z$ であるが

一方

$$\begin{aligned} W &= u + iv = (x + iy)^2 \\ &= (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad \dots\dots\dots (1.15) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$W' = f'(Z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2Z$$

となり上の考えと一致する。

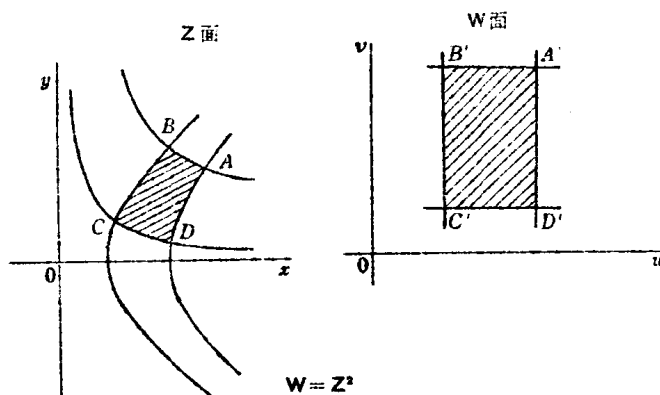
§3. 等角写像 (Conformal representation)

$$W=f(Z), \quad \dots\dots\dots(1.16)$$

なる函数は前述の如く W の成分 u, v と Z の成分 x, y との間を結ぶ関係式を示しているの、これから Z 面内のある曲線が W 面内ではどんな曲線に対応するかが算出できる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{例えば前述の } f(Z)=u+iv=Z^2 \\ \text{については} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{array} \quad \dots\dots\dots(1.17)$$

の関係が求められるから W 面内の u 一定なる直線は Z 面内では双曲線であり、一方 v 一定なる直線は同じく Z 面内で前者に直交する別の双曲線となる。すなわち第1.1.3図に見る如く W 面



第1.1.3図

内での u 一定となる直線 $A'D'$ と $B'C'$ とは Z 面内では $\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$ なる双曲線群となり、 v 一定なる直線 $A'B'$ と $C'D'$ とは Z 面内ではそれぞれ $\widehat{AB}$ および $\widehat{CD}$ なる別の双曲線群であらわせる。そしてこれは前記双曲線群とは直交している。そして図中陰影を施した部分同士が相対応する。

また別の見方をすれば

$$W=Re^{i\varphi}; \quad Z=re^{i\theta} \quad \dots\dots\dots(1.18)$$

の如く極座標で示すと

$$R=r^2; \quad \varphi=2\theta \quad \dots\dots\dots(1.19)$$

の関係が成立するから W 面内の原点を中心とする円は Z 面内では原点中心の半円になる。一部欠如した円は Z 面内ではその半角だけ欠如した半円となる。第1.1.4図はこれを示す。

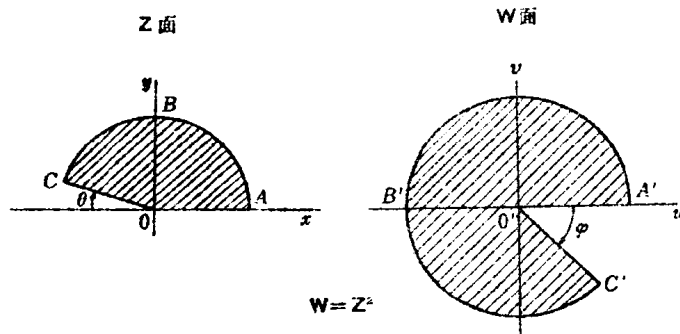
さらに又別の見方をすれば

$$\left. \begin{array}{l} x^2-y^2=R \cos \varphi \\ 2xy=R \sin \varphi \end{array} \right\}$$

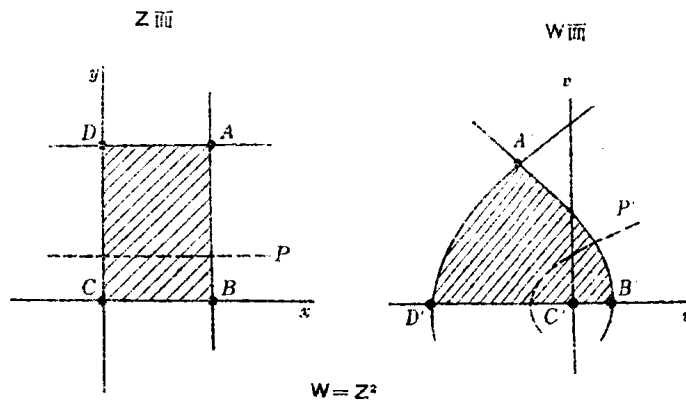
の関係から

$$R=\frac{2x^2}{1+\cos \varphi}=\frac{2y^2}{1-\cos \varphi} \quad \dots\dots\dots(1.20)$$

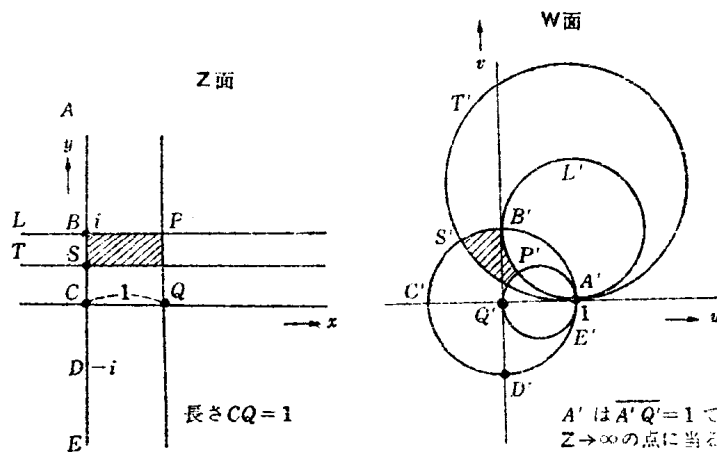
なる式を得、従って第1.1.5図の如く Z 面内の直線群は W 面内では曲線群で示される。



第 1.1.4 図



第 1.1.5 図



第 1.1.6 図

そして第 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5 図何れの場合も Z 面内の陰影を施した部分と W 面内の陰影部が対応する。これを“写像された”という言葉で表現する。そして Z 面内の直交曲線群は W 面内では（又別の形ではあるが）やはり直交曲線群に変換され、その包蔵する形が極限の小さな図形同士では同じであるのでこれを **conformal representation** という*。

なお等角写像の他の一例として複素関数

$$W = \frac{Z-1}{Z+1} \quad \dots\dots\dots (1.21)$$

* ただしこの様な写像は $f(z)$ の特異点では必ずしも成立しない。

をとり上げて見よう、 Z 面上軸 y は

$$u+iv = \frac{-1+iy}{1+iy} \quad \dots\dots\dots(1.22)$$

で示され $u^2+v^2=1$ の円になり、

$$Z \text{ 面上 } x \text{ 軸は } u = \frac{x-1}{x+1}; v=0$$

なる直線であって写像図形は第 1.1.6 図の如くなる。即ち y 軸から右側の半無限面は W 面内では半径 1 の $A'B'C'D'$ 円の内部に写像され、 y 軸から左側の半無限面は W 面内では同円の外部に写像される。 Z 面における無限点 $\pm\infty$, $\pm i\infty$ は何れも W 面の $v=0$; $u=+1$ なる点に写され、 x 軸に平行な二直線 ST' 直線と BL 直線とはそれぞれ A' を通過する $S'T'$ 円と $B'L'$ 円とに写像される。一方 Z 面内で y 軸に並行な $x=1$ 一定なる直線は W 面では A' を通り v 軸に切する円となる。

この変換は若しも $x=R$ (抵抗)

$$iy=iX \text{ (リアクタンス)}$$

と見做せば、一般インピーダンス ($R+iX$) を W 面内の単位円内に写し込む手段を提供するので如何に R や X の値が大であっても W 面内であらわせば容易に単位円内に移せるのである。この単位円内の直交円群はその一群が抵抗一定リアクタンス可変の円群であり他の一群 (T' 円 L' 円) はリアクタンス一定、抵抗可変の円群である。この様なインピーダンスのあらわれ方を行った図形を Smith Chart といい、送電線の負荷インピーダンス算出にしばしば利用され、又マイクロ波導波管回路のインピーダンス計算にも多く利用される。

§4. Riemann 面, Branch cut

前の例では $W=f(Z)$ の写像が Z 面内の直線又は円を基として考えて、それがどのように W 面内にあらわれるかを調べている。そして 1 対 1 の対応をもってこれが描かれている。

$$\text{しかし若しここに } W=\sqrt{Z} \quad \dots\dots\dots(1.23)$$

なる函数を考えるならば $Z=re^{i\theta}$ とおくと直ぐわかるように

$$W=\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \dots\dots\dots(1.24)$$

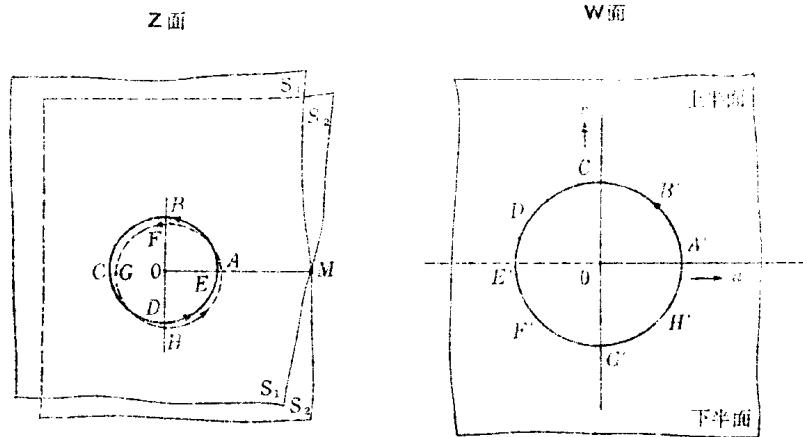
であるから $\theta=360^\circ$ なる Z 面内の全円周角を完全に追跡する円は W 面内では半円角 180° に直る半円となるに過ぎない。 Z 面内を 2 回つまり 720° 追跡すれば、 W 面内で初めて完全な一円周が写し出される。しかし 720° は同一図面の上ではあらわせないのでここに Riemann 面と称せられる特殊の面をこの場合の Z の表示に使用する。

これは第 1.1.7 図に示す如く OM なる線 (普通正の実軸に一致させてとる) だけを共通にする 2 枚の平面 S_1S_2 を考え W の上半面は S_1 面内の図形として写像し、 W の下半面は S_2 面内の図形として写像する。若し W 面における図が原点を中心とする円である場合は Z 面では S_1 上でも S_2 上でも全く同じ大いさの円が描かれる。つまり前式の Z 面内の円の式

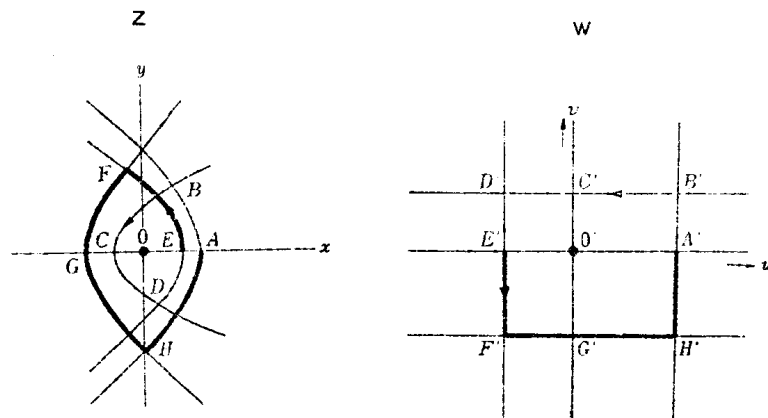
$$Z = re^{i\theta} \quad \dots\dots\dots(1.25)$$

からわかるように $\theta = 4\pi$ になって初めて W 面内の円は一円周するからである。

さらに詳しく言えば第 1.1.8 図で示すように W 面内での矩形 $A'B'C'D'E'F'G'H'A'$ は Z 面内では $ABCDEFGHA$ に写像されるが図中太く画いた部分は Riemann の第二面の上に画かれることになる。



第 1.1.7 図



第 1.1.8 図

つまり Riemann 面は写像における一つの便宜手段なので第一面と第二面とは実は重なった平面であって思考上の区別にしか過ぎない。しかし便利である。そして第一面から第二面への移行部をきめる line を branch line, branch line の起点 O を branch point という。

また別の例を挙げると

$$W = \sqrt{(Z-1)(Z-3)} \quad \dots\dots\dots(1.26)$$

の場合には Z の一つの値に対して W は 2 つ値をもつ、そこでこの W の 2 つの値に対応する Z の Riemann 面が考えられるべきである。第 1.1.9 図はこれを示すもので左側の Z 面において任意点 P をとるとき、そしてこの P 点が Z を示すものとせば

$$\overline{OA}=1, \overline{OB}=3$$

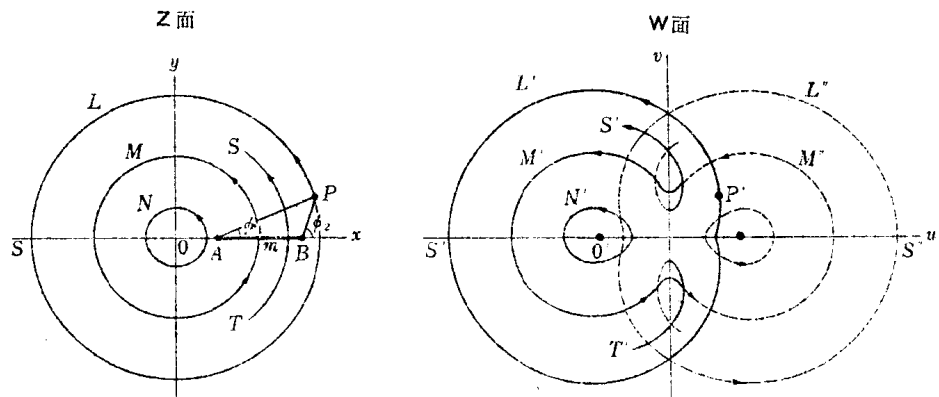
としてベクトル $\overline{AP}, \overline{BP}$ を作れば

$$\overline{AP} = \rho_1 \quad \overline{BP} = \rho_2 \quad \text{とするとき}$$

$$Z-1 = \rho_1 e^{i\phi_1} \quad Z-3 = \rho_2 e^{i\phi_2} \quad \dots\dots\dots (1.27)$$

であるから

$$W = \sqrt{(Z-1)(Z-3)} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}} \quad \dots\dots\dots (1.28)$$



Z 面上線分 AB 上の点は W 面内で虚軸 v 上の線図 $v=0 \sim \pm 1$ の間の点に対応する。

第 1.1.9 図

となる。この考えにしたがって Z 面内の図形を W 面に写像するとこの第 1.1.9 図の如くなる。すなわちこの場合前者は円であるが

円の半径が	3.5	の場合	(L 円)
	2.0	"	(M 円)
	0.7	"	(N 円)

の三つの円につき写像すると W 面ではやや変形した円となってあらわれる。 L は L' に N は N' になり M は M' になる。

すなわち $Z=1$ と $Z=3$ とを結ぶ線分 $\overline{AB}$ よりはなれて位置する円に対しては W 面内の写像もそれ自体で閉じる近似円 L' と N' とになる。しかし $\overline{AB}$ を切るような円、例えば M 円については、 W 面内では M' が対応し、これは自閉しない、 M' 曲線が v 軸と交わる点は $\pm i\sqrt{\overline{Am} \cdot \overline{Bm}}$ で与えられる。つまり $\overline{AB}$ を切るような途を通る場合に特異な状態が現れるのであって、この $\overline{AB}$ を branch line*, A と B とを branch point という。

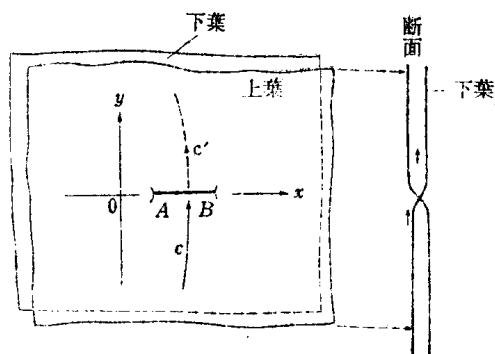
そして誰でも容易に気付くように、ある与えられた Z の値に対して

$$\sqrt{(Z-1)(Z-3)}$$

は正負同大の二つのベクトル値になるのであって、これが W 面上に左右対称の実線曲線と点線曲線とであらわされている。そこでこの W 面上の一对をなす図形に対応して Z 面そのものを 2 葉の Riemann 面とし、例えば上葉を実線図の方に下葉を点線図の方に対応せしめれば都合がよい。そしてこの Riemann 面のつなぎは branch line $\overline{AB}$ において行う。

* 脚註；branch cut は便宜的なものであって branch point (この場合は A 点 B 点) を結ぶ曲線であれば何でもよい。

即ち第1-1-10図に見る如く上葉と下葉とは AB 線のところだけでつながっており、あとは離れ離れになっている。上葉面内で AB 線を突切るような C 線は AB を通ると下葉の方へ C' となって抜けて行くものと考え、逆に下葉面内で AB 線を突切るような線は AB を通った途端に上葉の方へ抜け出て来ると考えるのである。強いてこの AB 線を切った断面を画いて見ると第 1-1-10 図右端の如くである。



第 1-1-10 図

そこで前述の L 円, M 円に話を戻せば L 円は実はこれを Riemann 面の上葉と下葉とに別々に同じものを画いて W 面内のそれぞれ L' 円と L'' 円とに対応させる。 N 円についても同様、ただし M 円について同じく上葉, 下葉に計 2 個画くのではあるが W 面における $M'M''$ ループ曲線にこれに対応させるためにはこの 2 つの M 円を前記の約束にしたがって辿って行くことにするのである。

TS 曲線も亦, AB を切るがこれは又 M 円と同様の扱いをする, それは W 面内の対応図形が $T'S'$ 曲線になることから直ぐわかるであろう。

Riemann 面は 2 葉とは限らない。多値函数であればそれに応じて葉面の数は増やさねばならず、例えば 3 葉のときは接合部断面は第 1-1-11 図の如くなる。



第 1-1-11 図

§ 5. 複素函数の積分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(Z) dZ \quad \dots\dots\dots (1.29)$$

なる積分は各 Z の値に対応する $f(Z)$ の値に dZ を乗じて得た複素量を Z 面上の α 点から β 点まで両点を結ぶ曲線に沿って総和をとることである。

そこで若し

$$f(Z) = u + iv$$

$$dZ = dx + idy$$

とおけば

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(Z) dZ = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \quad \dots\dots\dots (1.30)$$

となる。ここに C は積分の路程である。一例として $f(Z) = Z^2$ をとり上げ、積分の上限下限として、第 1-1-12 図の如く A 点と O 点とをとる。

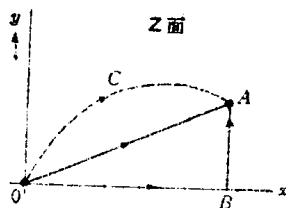
ここに A 点は $(2+j)$, O 点は原点であるが初めに直線 OA を積分路程としてえらむならば次のような計算となる。

$$Z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy \cdot i$$

$$\text{積分} = \int_{0,0}^{2,1} [(x^2 - y^2) dx - 2xy dy] + i \int_{0,0}^{2,1} [2xy dx + (x^2 - y^2) dy]$$

しかし積分路程 OA に沿うては $2y=x$, $dx=2dy$ なので上式の x を y に書き代えると

$$\text{積分} = \int_0^1 (6y^2 - 4y^2) dy + i \int_0^1 (8y^2 + 3y^2) dy = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$



第 1.1.12 図

なる結果を得る.

しかし若し積分路程を第 1.1.12 図中 OB , OA なる折線に沿うて行なうならばどうなるか. この場合は

$$\text{積分} = \int_{OB} Z^2 dZ + \int_{BA} Z^2 dZ$$

そして OB に沿うては $dZ=dx$, $Z=x$

BA に沿うては $dZ=idy$, $Z=2+iy$

であって

$$\begin{aligned} \text{積分} &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 [i(4-y^2) - 4y] dy \\ &= \frac{8}{3} + \left(\frac{11i}{3} - 2 \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i \end{aligned}$$

となって両者全く同じ結果になる.

これからも解るように $f(Z)$ が Z に関し単値, 連続で無限大となることがなければ, $\int_{\alpha}^{\beta} f(Z)$ は $\alpha \rightarrow \beta$ に至る積分の路程には無関係である. 第 1.1.12 図でいえば O から A へ向って任意に描いた曲線 C に沿うて積分してもやはり $\left(\frac{2}{3} + \frac{11i}{3} \right)$ なる結果を得る. つまり積分した結果は α と β との値の函数であることは当然ながら, α から β へ至る道すちをどう通って積分したかには関係がないのである. 実数函数の積分なら積分の途はきまっています実軸上で, つまり実数値について, 行方から疑義はないが複素数の場合は種々の途が考えられるので上述の吟味が意義をもつわけである.

$f(Z)$ がある特定の Z について ∞ となっても, 積分路がこの特定点を通過するのでなければ上記の考えは依然成立する. 例えば

$$f(Z) = Z^{-1} \quad \dots\dots\dots (1.31)$$

をとる. これは明かに原点 $Z=0$ で ∞ となる. これにつき第 1.1.13 図の A 点から B 点迄の積分をやろう. まづ半径 ρ の円弧に沿い A 点 ($\theta=0$) から

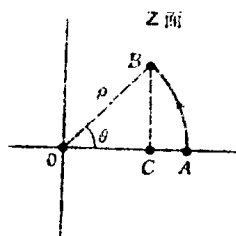
$$B \text{ 点 } \left(\theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

の積分をとって見ると次の如くなる.

$$f(Z) = (\rho e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \quad \dots\dots\dots (1.32)$$

であって円弧に沿うては ρ 一定故 $Z = \rho e^{i\theta}$ に対し, $dZ = i\rho e^{i\theta} d\theta$ で示される.

$$\therefore \int_A^B f(Z) dZ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \cdot i\rho e^{i\theta} d\theta$$



第 1.1.13 図