现代数学丛书

高维动力系统的周期轨道：理论和应用

李炳熙 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

目　　录

1. 引　　言

考虑微分系统

$$\dot{x}=F(x), \tag{1.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$, $F: M\to\mathbb{R}^n$, $M\subset\mathbb{R}^n$ 为一区域, $F\in C^1(M)$. 设(1.1)的解 $x(t)=g(t, x_0)$, $g(0, x_0)=x_0$, 对一切 $t\in\mathbb{R}^1$ 存在. 可微映射 $g^t: x\mapsto g(t, x)$, 和 $(g^t)^{-1}$ 构成一个单参数微分同胚群. 这个群连同相空间 M 一起, 就是一个动力系统. 过某固定点 $p\in M$ 的轨道 $\Gamma(p)$, 是下列集合:

$$\Gamma(p)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists (t, p)\in\mathbb{R}^1\times M \text{ 使得 } g(t, p)=x\}.$$

轨道的拓扑类型有三种: (甲)一点; (乙)一条 Jordan 曲线; (丙)定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的一条正则可微曲线. 它们分别对应于系统(1.1)的一个常数解, 一个非常数周期解, 一个非周期解. 在情形(甲), 有 $g(t, p)\equiv p$; 在情形(乙), 有 $g(t+T, p)\equiv g(t, p)$, 这里, T 是最小正周期; 在情形(丙), 曲线上每点的切向量不为零, 而且 $t\neq t'\Rightarrow g(t, p)\neq g(t', p)$, $g(t,p)$ 描画出一条非周期轨道. 这时, 曲线可能不是 $\mathbb{R}^1$ 的同胚象(例如, 双谐和振荡器方程 $\ddot{x}+k^2x=0$, $\ddot{y}+l^2y=0$, $k>0$, $l>0$; 它们等价于 $\mathbb{R}^4$ 上的微分系统 $\dot{x}=u$, $\dot{u}=-k^2x$, $\dot{y}=v$, $\dot{v}=-l^2y$; 当 k/l 是无理数, 存在 $\mathbb{R}^4$ 中的二维环面 T^2, 其上的轨道不是周期的, 此轨道不是 $\mathbb{R}^1$ 的同胚象). 本书的周期轨道均指

(乙)这类型.

当 $n\geqslant3$, (1.1)的周期轨道的存在性、不存在性、唯一性和稳定性等问题，在理论上和应用上，都值得研究．在二维动力系统，研究周期轨道的存在性的基本工具是 Poincaré–Bendixson 定理及其推论(环域原理). 1963 年, Schwartz 把 Poincaré-Bendixson 定理推广到紧致、连通的二维 C^2 流形上的微分系统．D'Heedene 的反例显示 Poincaré-Bendixson 定理在高维情形没有简单的推广．1979 和 1980 年，Smith 在附加若干条件之下把此定理推广到下列两类微分系统：$f(D)x+b\phi(g(D)x)=0$ 及 $Dx=f(x)$．至于 Poincaré-Bendixson 的环域原理，Schweitzer 在 1974 年发表的、令人有深刻印象的反例，使此原理在高维情形的简单推广成为不可能(指 C^1 情形；在 C^r, $r\geqslant2$ 情形，这仍是个有兴趣但困难的、尚未解决的问题)[注]．因此，多年来，在 $n(\geqslant3)$ 维动力系统研究周期轨道存在性时，多依赖于“环区原理”．三十多年来，此原理曾成功地被用来处理电子学、力学、自动控制、原子物理学、生物学、化学及其它方面的高维动力系统周期轨道存在问题．但是由于“环区原理”的复杂几何结构，实际上它是很难应用的．故需另寻良法．上述 Smith 的推广提供一种选择．Brouwer 不动点定理是环区原理的基础，Королев 在 1965 年试图运用 Banach 不动点定理处理系统(1.1)的周期轨道存在和唯一问题，但没成功．应用环区原理时，需要寻找一个正向不变环区，这个过程有时可能是十分困难的；对于某类方程，例如描写生态系统的方程，寻找正向不变球体是更为可行的．1977 年，Grasman 应用映射的 Brouwer 度理论，沿此方向探讨，获得一组保证系统(1.1)存在非常数周期解的充分条件($n\geqslant3$)．此外，直接研究系统 (1.1) 的 Poincaré 映射是否存在不动点以及是否唯一，近年来亦广泛见诸文献.

[注]　Alan Weinstein(美国加州大学——UC Berkeley)告诉作者,UC Berkeley 数学系的 Jenny Harrison 在 C^2 情形构造了反例.

考虑二维系统 $\dot{x}_1=ax_2+f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2=-ax_1+f_2(x_1, x_2)$ 其中 $f_i(x_1, x_2)$ 是高次项,这系统不一定有周期解. 一个古典的结果(Poincaré)指出,若 f_1, f_2 满足对称条件:

$$f_1(x_1, -x_2)=-f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, -x_2)=f_2(x_1, x_2),$$

则该系统在原点的某邻域内有周期解(周期接近于 $2\pi/|a|$). 1979年, Podolak 及 Westreich 把此结果推广到 n 维情形.

至于 Hamilton 系统的周期解存在性问题,近年来 Weinstein, Moser, Rabinowitz 等获得了相当好的结果.

奇异摄动问题的周期解存在性, 1950 年前后 Friedrichs, Wasow, Levinson 等做了若干重要工作, 1960 年前后又有 Понтрягин 等人的工作.

Bendixson 准则是研究二维动力系统不存在周期轨道的工具,但在高维情形,工作较少.

高维动力系统的周期轨道唯一性的研究, 已发表的工作亦不多. 1960 年, Borg 发表了一个关于系统(1.1)的周期轨道唯一性定理. 后来, Sherman 成功地应用它研究了一个原子物理方面的三维动力系统. 虽然如此, 这定理是难以应用的. 其余有关的结果, 都是针对具体情况设计特殊方法, 去证明周期轨道的唯一性的.

关于系统 (1.1) 的周期轨道的稳定性, 1979 年 Franke 及 Selgrade 利用大范围分析与数值分析的技巧, 去判定周期轨道的稳定性. 另一方面, $n=2$ 时, Poincaré 稳定性准则是熟知的保证周期轨道渐近稳定的方法. 1979 年, Churchill 及 Selgrade 把此准则推广到高维动力系统.

以上就是此专题现状的梗概. 本书将依次总结这方面的主要结果,并用较多篇幅介绍应用. 以下各章为:

2. Poincaré-Bendixson 定理及其推广;

3. 周期轨道的存在性;

4. 周期轨道的不存在性；

5. 周期轨道的唯一性；

6. 周期轨道的稳定性；

7. 应用.

有关的基本概念和结果，可参考：秦元勋 [1]，叶彦谦 [2]，Arnold [3]，Coddington 与 Levinson [4]，Hale [5]，Hartman [6]，Hirsch 与 Smale [7]，Немыцкий 与 Степанов [8]．至于 Hopf 分枝理论(本书不拟涉及)，可参考 Marsden 与 McCracken [9]，Hsu 与 Kazarinoff[10]，Hassard 与 Wan [11]，Chow 与 Hale[215]，等等．有关的研究结果及应用，还可参考综合报告：Atherton 与 Dorrah[211]（这主要涉及二维系统，对 $n\geqslant 3$ 维系统亦有涉及)，李炳熙[212].

2. Poincaré–Bendixson 定理及其推广

研究平面动力系统周期轨道存在性的基本工具是下述著名的古典结果:

定理 2.1(Poincaré-Bendixson) 设 Ω 是系统 (1.1) 的有界极小集合($n=2$), 则 Ω 或者是一奇点,或者是一周期轨道.

其证明参见原始文献 Poincaré[12] 及 Bendixson [13], 或参考秦元勋 [1], Coddington 与 Levinson[4], Hale[5], Hirsch 与 Smale[7], Немыцкий 与 Степанов[8] 等.

2.1 Schwartz 定理

1963 年, Schwartz[14] 把此定理推广到紧致、连通的二维 C^2 流形上的微分系统.

定理 2.2 (Schwartz) 设 $\mathfrak{M}$ 为紧致、连通的 C^2 微分流形, $\phi:\mathbb{R}^1\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ 为 C^2 动力系统, $\Omega\subset\mathfrak{M}$ 是一极小集合, 则 Ω 必为下列三者之一:

(甲) 由一奇点组成的单点集;

(乙) 一条与 S^1 同胚的闭轨道;

或

（丙）$\Omega=\mathfrak{M}$，而 $\mathfrak{M}$ 同胚于二维环面 T^2.

证明 设 $\Omega\subset\mathfrak{M}$ 为动力系统 ϕ 之极小集合．则 Ω 可以是下列三种情况之一：

（甲）一个奇点；

（乙）一条轨道 Γ，它与 S^1 同胚，即是一条周期轨道；

或

（丙）一个既不含奇点又不含闭轨道的集合．

情形(丙)又可再分为

$$(一)\ \mathrm{Int}(\Omega)\neq\emptyset;\quad (二)\ \mathrm{Int}(\Omega)=\emptyset.$$

可以证明，(一) $\Rightarrow \Omega=\mathfrak{M}$，且 $\mathfrak{M}$ 同胚于 T^2；而(二)是不成立的．于是得到本定理之结论．

以下分别证明这两件事．

先证 $\mathrm{Int}(\Omega)\neq\emptyset\Rightarrow\Omega=\mathfrak{M}$ 且 $\mathfrak{M}$ 同胚于 T^2.

注意 Ω 紧致，$\mathrm{Int}(\Omega)\neq\emptyset$，故 $\partial\Omega=\emptyset$(根据 Тумаркин 定理，即：如紧致极小集合有某一点是内点，则它的每一点都是内点，参见 Немыцкий 与 Степанов[8, 第五章])．于是 Ω 既开且闭，从而 $\Omega=\mathfrak{M}$．但 Ω 不含奇点或闭轨道，据 Kneser [15, p. 153]可得，Ω 与 T^2 同胚．

现来证明(二)不成立．其证明主要步骤为：$\mathrm{Int}(\Omega)=\emptyset\Rightarrow$ 本动力系统的 Poincaré 映射诱导出一个 C^2 映射 f，f 有七条性质；其次证明两条引理(引理1和引理2)；引理1及2 $\Rightarrow$ 这种多性质的 f 是不存在的；从而(二)不成立．分述如下：

$\mathrm{Int}(\Omega)=\emptyset$，$\Omega$ 闭集，故 Ω 在 $\mathfrak{M}$ 无处稠密[注]．注意及 Ω 不含奇点，故存在满足下列条件的 C^2 嵌入 $i:[-1,1]\to\mathfrak{M}$：

（i）$I=i((-1,1))$ 与每条和它相交的轨道无切；

（ii）$i(-1)$ 及 $i(+1)$ 不属于 Ω；

[注] 设有度量空间(X,d)，$\Omega\subset X$，以下三条性质是等价的：1° Ω 在 X 无处稠密；2° $\overline{\Omega}$ 满足条件：$\mathrm{Int}(\overline{\Omega})=\emptyset$；3° $X\setminus\overline{\Omega}$ 在 X 稠密．

(iii) $i(0)\in\Omega$.

于是存在 $\sigma>0$, 使得如下定义的映射 δ 是微分同胚:

$$\delta:\{(s,\ \tau)\in\mathbb{R}^2\,|\,|s|<\sigma,\ |\tau|<1\}\to\mathfrak{M},$$

$$\delta(s,\ \tau)=\phi(s,\ i(\tau)).$$

因此, 可取 δ^{-1} 为 $i(0)$ 邻域的坐标系, 而 I 可取作 ϕ 的一局部截线. 由 Poincaré 映射 $h:I\to I$ 可诱导出一个 C^2 映射 f 如下:

令 $U=\{x\in I\,|\,\exists t>0,\ 使得\ \phi(t,\ x)\in I\}$.

因为 Ω 是紧致极小集合, 所以 $U\neq\emptyset$. $\forall x\in U$, 令

$$t_x=\min\{t\,|\,t>0,\ \phi(t,\ x)\in I\}.$$

记 $i^{-1}(U)$ 为 V, 显然 $V\subset(-1,\ 1)$. 定义 $f:V\to(-1,\ 1)$ 为

$$f(v)=i^{-1}(\phi(t_{i(v)},\ i(v))),\ \forall v\in V.$$

当 $|v-v_0|$ 充分小时, 有

$$f(v)=\pi(\delta^{-1}(\phi(t_{i(v_0)},\ i(v)))),$$

其中 $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ 为投射 $\pi(\xi,\ \eta)=\eta$. 注意及 i, ϕ, δ 都是 C^2 映射, π 是 C^∞ 映射, 所以 f 是 C^2 映射. 以下列出 f 所具有的七条性质.

因 $\Omega\subset\mathfrak{M}$ 是紧致极小集合, 所以 $\overline{\Gamma}_\omega=\Omega$, $\forall\omega\in\Omega$, 这里 $\Gamma_\omega=\{\phi(t,\ \omega)\,|\,t\in\mathbb{R}^1\}$, $\overline{\Gamma}_\omega$ 表示 Γ_ω 的闭包. 令

$$G=i^{-1}(I\cap\Omega),$$

故 $G\subset V$, 而且是无处稠密、完全集. 取 $(-1,\ 1)$ 中满足条件

$$G\subset W\subset\overline{W}\subset V$$

的开集 W. 可以证明 (见后面的 [注 2]), 映射 f 有下列七条性质:

① $G=(-1,\ 1)\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,\ b_i)\subset W$;

② $f:W\to(-1,\ 1)$;

③ $f(G)=G$;

④ $f^k(g)=g,\ g\in G\Rightarrow k=0$; 这里 $f^k(g)=f^{k-1}(f(g)),\ f^0=id$;

⑤ $\exists L,\ F\in\mathbb{R}^1,\ 0<L<1<F$, 使得

$$L\leqslant|f'(w)|\leqslant F,\ \forall w\in W;$$

⑥ $|f''(w)|\leqslant M,\ \forall w\in W$;

⑦ 令 $B(k,\ g)=f^k(g),\ g\in G$; 则 G 是 B 作用下的极小集合.

现来证明两条引理(即引理 1 和引理 2).

引理 1 存在毗邻区间 $(a,\ b)$, 使得 $a,\ b\in G,\ a<b$, 而且

$$f^k((a,\ b))\subset W,\ \forall k\geqslant 0,\ k\text{ 为整数}.$$

引理 1 证明 令

$$\mu=\operatorname{dist}(G,\ (-1,\ 1)\backslash W),$$

$$S=\{j\,|\,b_j-a_j\geqslant\mu\},$$

$$Y=\{a_j,\ b_j\,|\,j\in S\}.$$

注意到上述性质 ①, 即 $G=(-1,\ 1)\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,\ b_i)\subset W$, 所以 S 和 Y 都是有限集.

(1°) f 的性质 ④ $\Rightarrow\exists N\in\mathfrak{N}$, 使得 $f^k(a_1)\notin Y,\ \forall k\geqslant N$, 这里 $\mathfrak{N}$ 表自然数集.

事实上, Y 是有限集, 设

$$Y=\{a_{i_1},\ b_{i_1},\ \cdots,\ a_{i_k},\ b_{i_k}\}.$$

若 $f^k(a_1)\notin Y,\ \forall k\geqslant 0$, 则取 $N=1$. 若存在 λ_1 (取这种 λ_1 中之最小者)使

$$f^{\lambda_1}(a_1)\in Y,$$

则有两种可能性: $f^{k+\lambda_1}(a_1)\notin Y,\ \forall k>0$, 则取 $N=\lambda_1+1$; 或存在 λ_2 (取这种 λ_2 中之最小者)使得 $f^{\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\in Y$. 对于后一情形, 又有两种可能:

$$f^{k+\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\notin Y,\ \forall k>0\quad(\text{这时, 取 }N=\lambda_2+\lambda_1+1);$$

或存在 λ_3(取其最小者), 使得

$$f^{\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\in Y.$$

如此类推. 设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\sigma$, 使得($\lambda_i \geqslant 1, \forall i$)

$$f^{\lambda_\sigma+\lambda_{\sigma-1}+\cdots+\lambda_2+\lambda_1}(a_1) \in Y.$$

则由性质 ④ 得

$$f^{\lambda_\sigma+\lambda_{\sigma-1}+\cdots+\lambda_2+\lambda_1}(a_1) \neq f^k(a_1),$$

$$k=\lambda_1,\ \lambda_1+\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\sigma.$$

因 Y 是有限集, 上述过程必在有限步内终止. 故存在 $N \in \mathfrak{N}$, 使得

$$f^k(a_1) \notin Y, \ \forall k \geqslant N.$$

(2°) 其次, 由性质 ③ 和性质 ⑤, 可推得: f 把毗邻区间的端点变为毗邻区间的端点. 事实上, 设 (a_l, b_l) 为 G 的某毗邻区间, 由性质 ③ 知, $f(a_l), f(b_l) \in G$, 因 G 无处稠密, 故 $f(a_l), f(b_l)$ 为毗邻区间的端点; 又由性质 ⑤ 知, $f'(w) \neq 0, \forall w \in W$, 故 $f(a_l)$, $f(b_l)$是同一个毗邻区间的端点.

于是, 由 (1°)和 (2°)知: $f^k(a_1) \notin Y$, $f^k(b_1) \notin Y$, $\forall k \geqslant N$; 而且对某 j, 有 $f^N(a_1)=a_j$ 或 $f^N(a_1)=b_j$; 为确定计, 设 $f^N(a_1)=a_j$, 从而 $f^N(b_1)=b_j$. 令 $k=m+N, m\geqslant 0$. 于是由 Y 的定义,

$$\begin{aligned}|f^m(a_j)-f^m(b_j)| &= |f^m(f^N(a_1))-f^m(f^N(b_1))|\\ &= |f^k(a_1)-f^k(b_1)|<\mu.\end{aligned}$$

从而 $$f^m((a_j, b_j)) \subset W, \ \forall m \geqslant 0.$$

于是, 取$(a, b)=(a_j, b_j)$, 即得本引理.

引理 2 设 $N \in \mathfrak{N}$ (自然数集)及$[p, q] \subset (-1, 1)$使得

$$f^k([p, q]) \subset W, \ \forall k \in \{0, 1, \cdots, N\}$$

成立, 则有下列两公式:

$$f^{k+1}(p)-f^{k+1}(q)=(Df^{k+1})(w)\cdot(p-q), \tag{2.1}$$

其中 $w \in (p, q)$; 以及

$$|(Df^{k+1})(u)|\cdot|(Df^{k+1})(v)|^{-1} \leqslant \exp\Big[ML^{-1}\sum_{j=0}^{k}|f^j(p)-f^j(q)|\Big], \tag{2.2}$$

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, N\} \quad 及 \quad u, v \in [p, q].$$

这里$(Dg)(x)=g'(x)$.

引理2的证明　先证公式(2.1). 因$f: W \to (-1, 1)$, 且$f^k([p, q]) \subset W$, 故$f^{k+1}(p)$, $f^{k+1}(q)$皆有定义,对映射f^{k+1}使用微分中值定理,即得(2.1).

至于公式(2.2), 由性质⑤知$|f'| \neq 0$, 故可定义辅助函数

$$\Sigma = \log|(Df^{k+1})(u)| \cdot |(Df^{k+1})(v)|^{-1},$$

而且可推得

$$|f^j(u)-f^j(v)| \leqslant |f^j(p)-f^j(q)|, \ \forall j=0, 1, \cdots, k.$$

于是连同中值定理及性质⑥(即$|f''| \leqslant M$), 可得

$$\begin{aligned}\Sigma &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \left| \log|(Df)(f^j(u))| - \log|(Df)(f^j(v))| \right| \\ &= \sum_{j=0}^{k} |(Df)(f^j(w_j))|^{-1} \cdot |(D^2 f)(f^j(w_j))| \cdot |f^j(u)-f^j(v)| \\ &\leqslant ML^{-1} \sum_{j=0}^{k} |f^j(u)-f^j(v)| \\ &\leqslant ML^{-1} \sum_{j=0}^{k} |f^j(p)-f^j(q)|,\end{aligned}$$

从而有

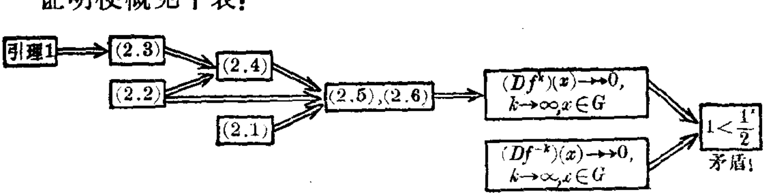
$$\begin{aligned}&|(Df^{k+1})(u)| \cdot |(Df^{k+1})(v)|^{-1} \\ &\qquad \leqslant \exp\left[ML^{-1} \sum_{j=0}^{k} |f^j(p)-f^j(q)| \right],\end{aligned}$$

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, N\} \quad 及 \quad u, v \in [p, q].$$

是为公式(2.2).

以下, 运用引理1, 引理2证明: 具有上述七条性质的映射f是不存在的,从而得出定理2.2.

证明梗概见下表:



▲ 现来证明：引理 1⇒(2.3)，即对某集 $\{w_k\}\subset(a, b)$，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)|\leqslant 2(b-a)^{-1}. \tag{2.3}$$

事实上，引理 1⇒$|f^k(a)-f^k(b)|\leqslant\mu_k$, $\forall k\geqslant 0$，这里 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu_k\leqslant 2$. 于是，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)||b-a| &= \sum_{k=0}^{\infty}|f^k(a)-f^k(b)|\\ &\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\leqslant 2,\ \{w_k\}\subset(a, b).\end{aligned}$$

从而 $$\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)|\leqslant 2(b-a)^{-1},\ \{w_k\}\subset(a, b).$$

▲ 证明：(2.2)，(2.3)⇒(2.4)，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(a)|\leqslant 2(b-a)^{-1}\exp[2ML^{-1}]. \tag{2.4}$$

注意到，由引理 1 知，

$$f^k((a, b))\subset W,\ \forall k\geqslant 0.$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $\{w_k\}\subset[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$，在 (2.2) 中取 $u=a+\varepsilon$, $v=w_k$, $p=a+\varepsilon$, $q=b-\varepsilon$，得

$$\begin{aligned}&|(Df^k)(a+\varepsilon)|\cdot|(Df^k)(w_k)|^{-1}\\ &\leqslant\exp\Big[ML^{-1}\sum_{j=0}^{k-1}|f^j(a+\varepsilon)-f^j(b-\varepsilon)|\Big]\\ &\leqslant\exp[2ML^{-1}],\ \forall k\geqslant 0.\end{aligned}$$

再利用(2.3)和 f 是 C^2 映射，当 $\varepsilon\to 0$，可得

$$\begin{aligned}\Delta=\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(a)| &\leqslant\Big[\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)|\Big]\exp[2ML^{-1}]\\ &\leqslant 2(b-a)^{-1}\exp[2ML^{-1}].\end{aligned}$$

所以，$0<\Delta<\infty$. 而且若令

$$\nu=\mu L[6(\Delta+1)(M+1)]^{-1},$$

可见 $0<\nu$，且

$$ML^{-1}\nu e\Delta = e\mu\Delta M/6(\Delta+1)(M+1) < e\mu/6 < \frac{1}{2}\mu < 1.$$

这里，$e \simeq 2.71828$.

▲ 现用 (2.1), (2.2), (2.4) 以及数学归纳法证明 (2.5) 及 (2.6)：

$$|f^k(x) - f^k(a)| < \mu, \tag{2.5}$$

$$|(Df^k)(x)| < e|(Df^k)(a)|, \tag{2.6}$$

这里，$x \in \mathbb{N}(\nu) = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid |y-a| < \nu\}$, k 为整数，$k \geqslant 0$.

事实上，当 $k=0$, (2.5), (2.6) 显然成立. 作归纳法假设：

$$(2.5),\ (2.6) \quad 当 \quad 0 \leqslant k \leqslant N \quad 成立. \tag{*}$$

依次运用 (2.2), (2.1), (*), (2.4), 可推出

$$\begin{aligned}
&|(Df^{N+1})(x)| \cdot |(Df^{N+1})(a)|^{-1} \\
&\leqslant \exp\left[ML^{-1}\sum_{k=0}^{N}|f^k(x) - f^k(a)|\right] \\
&\leqslant \exp\left[ML^{-1}\sum_{k=0}^{N}|(Df^k)(u_k)|\,|x-a|\right] \\
&< \exp\left[ML^{-1}\nu e\sum_{k=0}^{N}|(Df^k)(a)|\right] \\
&< \exp[ML^{-1}\nu e\Delta] < \exp[1] = e,
\end{aligned}$$

是为 $k=N+1$ 时的 (2.6), 再连同 (2.1), 可推出 $k=N+1$ 时的 (2.5). 因此，对一切整数 $k \geqslant 0$, (2.5), (2.6) 成立.

▲ (2.4), (2.6) 及性质 ⑦, 性质 ⑤ $\Rightarrow (Df^k)(x) \rightarrow\rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $x \in G$.

事实上，首先由 (2.4) 和 (2.6) 知

$$(Df^k)(x) \rightarrow\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,\ x \in \mathbb{N}(\nu).$$

现把此结果扩大到 $x \in G$. 注意到 $G = f^p(G)$, $f^p(\mathbb{N}(\nu) \cap G) \subset G$, $\forall p = 0, \pm 1, \cdots, \pm n, \cdots$. 集合

$$\mathbb{K} = \bigcup_p \{f^p(\mathbb{N}(\nu) \cap G)\},\ p \in \mathbb{Z}.$$

有下列性质：$\mathbb{K} \neq \emptyset$; 对于 $B(k, \mathbb{K}) = f^k(\mathbb{K})$ 来说，$\mathbb{K}$ 是不变集；又