

7 U318

L 33

355900

结构分析程序 SAP5 原理及其应用

李润方 王建军 编



重庆大学出版社

前 言

SAP5 程序是一个大型的线弹性结构静动力分析有限元通用程序,自 1979 年引入我国以来,已经广泛应用于各种工程问题的分析和设计,国内几乎所有较大的计算中心、计算站都装有 SAP5 程序,近年来北京大学曲圣年教授等又率先把 SAP5 程序移置到 IBM-PC 微机及其兼容机上,使之进入了科技工作者的办公室,SAP5 程序必将得到更广泛的普及应用。

目前,用户使用 SAP5 程序主要依靠各种版本的《使用手册》。这些手册主要是介绍怎样输入原始数据,虽然也有一些单元库和功能库的简介以及程序原理的概述,但缺乏 SAP5 程序分析原理、结构有限元分析建模方法、各种单元特别是特殊单元的功能等方面的系统论述,对于广大工程技术人员、在校大学生以及部分科技工作者和青年教师来说,上述几方面常常是他们在用 SAP5 程序时所面临的实际问题。在科研和教学的实践中,常常碰到有人提出这样一些问题:在结构分析中如何利用伪单元和读入单刚单元?既然已经有了边界位移约束代码信息,为什么还要边界弹簧单元?同样结构可否利用不同的单元达到同样的目的?什么样的单元最有效?如何处理板壳单元第 6 个自由度问题?如何利用主从节点处理板杆、板块组合结构?什么是单元载荷乘子?如何利用载荷模式乘子以及载荷工况乘子来模拟各种载荷工况?如何充分利用程序中动力分析的五种功能来进行结构动力分析?在静动力分析中如何利用周期对称性?等等。由于这些问题还不可能从一般有限元法的论著和上述《使用手册》中立即找到满意的答案,因此有的人只好舍近求远,舍易就难,在分析中走了弯路,浪费了精力和机时,有的本来只要稍作处理就可以利用 SAP5 程序解决的问题也不得不去自编程序,有的由于理解不透、建模不当而造成计算错误甚至完全失败。因此,我们试图编写这本书来回答上述问题,以利于 SAP5 程序的推广应用。

本书包括三个部分:第一部分(第一、二、三章)在简要系统地介绍有限元法一般理论的基础上和论述过程中系统地讨论 SAP5 程序的分析原理;第二部分(第四章)介绍 SAP5 程序的基本情况,包括数据系统及其组织,一般单元和特殊单元以及程序的功能库;第三部分(第五、六章)阐述 SAP5 程序的应用,包括建立 SAP5 程序所要求的有限元分析模型的基本理论和方法,以及静力和动力分析的应用实例,在附录中给出了 29 个标准例题的有限元模型,对其中有代表性的例题还在第六章中作了分析比较。

本书的主要特点是把基本原理、实际应用和程序说明紧密结合起来,深入浅出、实用性强,既可以作为科技工作者、工程师、教师使用 SAP5 程序时的工具书,也可以作为高等学校有关专业学生学习结构分析有限元法和 SAP5 程序应用的教材。

本书是在我们多年从事机械结构静、动力有限元分析的研究工作以及在重庆大学、中国矿业大学机械系有关有限元法课程的教学工作基础上整理编写的。第一章至第三章由重庆大学李润方编写,第四章至第六章由中国矿业大学王建军编写,全书由李润方统稿。

本书承汪礼顺教授仔细地审阅,提出了许多宝贵意见,在此致以衷心的感谢。

由于 SAP5 程序涉及的面广,我们学术水平和实际经验有限,书中难免会有错误和不当之处,敬请读者批评指正。

李润方 王建军

1990 年 12 月

目 录

第一章 概论	(1)
1.1 有限元法的提出和发展	(1)
1.2 结构分析和有限元法	(2)
1.3 SAP 程序的功能	(4)
第二章 静力分析基本原理	(8)
2.1 有限元位移法的基本概念	(8)
2.2 平面问题	(16)
2.3 轴对称问题	(35)
2.4 二维等参元族	(44)
2.5 空间块体等参元族	(56)
2.6 杆梁类单元	(62)
2.7 薄板薄壳单元	(74)
2.8 有限元网格自动生成	(92)
第三章 动力分析基本原理	(104)
3.1 动力方程和质量矩阵	(105)
3.2 特征值问题和结构模态分析	(108)
3.3 广义雅可比法	(114)
3.4 逆迭代法	(117)
3.5 子空间迭代法	(124)
3.6 行列式搜索法	(129)
3.7 动力响应问题分析方法	(133)
3.8 有限元振动分析实例	(138)
第四章 SAP5程序的数据系统和单元库	(144)
4.1 SAP5程序的数据系统及其组织	(144)

4.2	SAP5程序的一般单元	(154)
4.3	SAP5程序的特殊单元	(170)
4.4	SAP5程序的功能库	(177)
4.5	SAP5程序的单元载荷	(180)
4.6	单元载荷乘子及应用	(185)
4.7	单元的材料特性	(188)
第五章	有限元分析的建模方法	(193)
5.1	结构的离散化	(193)
5.2	复杂结构有限元建模的罚单元法	(203)
5.3	结构对称性的利用	(205)
5.4	组合结构的有限元建模	(217)
5.5	弹性接触问题求解的建模方法	(230)
第六章	SAP5程序的应用	(234)
6.1	静力分析	(234)
6.2	动力分析	(248)
附录	SAP5程序的标准例题	(270)
参考文献	(271)

第一章 概 论

1.1 有限元法的提出和发展

有限元法是根据变分原理求解数学物理问题的数值计算方法。是工程方法和数学方法相结合的产物,可以求解许多过去用解析方法无法求解的问题。对于边界条件和结构形状都很不规则的机器复杂结构,是一种非常有效的现代分析方法。

有限元法的基础是结构离散和分片插值。在结构分析中,就是要把一个本来是连续的弹性体划分为有限个单元,把一个具有无限多自由度的结构离散为有限自由度的系统。对每个单元给出满足连续条件的假定位移模式,各个单元在相互连接的节点处有跨单元的连续性。然后再从能量原理出发建立起整体控制方程,求解这一线性代数方程组就可以得到结构的位移场以及应力场等。

有限元法首先是从航空结构设计中提出来的。其起源可以追溯到 20 世纪 50 年代。当时,在世界范围内,喷气式飞机开始逐步取代传统的螺旋桨飞机。随着飞行速度的提高,结构愈益复杂,对结构分析的要求也越来越高。为了适应工程技术飞跃发展的需要,以美国波音公司的 J·Turner 和英国伦敦大学的 J. H. Argyris 为代表,提出了结构矩阵分析方法,应用电子计算机作为主要运算手段,有限元法正是在这种新方法的基础上发展起来的。

第一次正式使用“有限单元”(Finite Element)这一术语并提出这种离散系统分析方法的是美国加州大学伯克利分校的 R. W. Clough 教授(1960 年)。而开发大型通用有限元结构分析程序 SAP 的 K. J. Bathe 教授和 L. Wilson 教授以及有限元法的著名大师、英国皇家学会会员 O. C. Zienkiewicz 教授都十分推崇 Clough 教授在创立有限元法方面所作的杰出贡献。而 Zienkiewicz 教授则被誉为解决难题的能手。和他齐名的美国 J. T. Odne 教授、R. L. Taylor 教授以及卡学璜教授等都是从工程界出身的,这也正好说明有限元法是工程和数学相结合的产物。此外,应当指出 B. M. Irons 在有限元法方面的贡献也是不可磨灭的,他提出了等参数单元、波前解法以及叠层单元(Hierarchical Element)等有重要实用价值的新方法、新概念。

表 1-1 有限单元法的发展

	应用范围	理论基础	研究对象
1960 年	宇航及航空	虚功原理, 最小势能原理	线性问题, 静力分析
1967 年	宇航、航空、土木, 造船,机械,水利	瑞利—李兹法, 加权残数法	非线性问题, 动力分析
1971 年	热传导,流 体力学,电磁场	变分法	非线性接触,碰撞, 断裂力学, 耦合问题

有限元法一经提出,便获得迅速发展,从航天、航空扩展到土木、水利、造船和机械工程,从结构分析扩展到流体力学、热传导以及电磁场等各种领域。有限元法创建初期 1960 年正式发表的论文仅 10 篇,1969 年就达到 531 篇,1970 年略有下降。但随着有限元法在结构分析领域里继续广泛推广应用,并向其他场变量领域扩展后,研究成果不断增多,1974 年为 1377 篇,1979 年接近 2000 篇。有限元法的发展过程见表 1-1。

1.2 结构分析和有限元法

结构分析是结构设计的重要方面,其目的首先就是要确定结构在静力或动力条件下受指定载荷、温度和约束作用时的应力和位移分布,为了保证结构能正常工作,必须满足强度、刚度和稳定性等方面的要求,可以说应力应变分析是结构分析的基本内容,此外根据其工作条件,也可能还有其他要求如(1)稳定性:研究各种结构的失稳条件及临界载荷等;(2)热弹性:确定在一定温度场下结构的热应力和热变形;(3)振型和频率:确定结构的自振频率和各阶振型;(4)动力响应:研究结构在给定的动载荷及支承运动下的强迫振动,确定应力响应和位移响应;(5)疲劳强度和裂纹扩展:研究有裂纹或无裂纹构件在交变载荷下的承载能力,确定高周疲劳和低周疲劳下构件的寿命;(6)低应力脆断:研究带裂纹构件的断裂韧性,确定裂纹尖端附近区域的应力场和位移场及应力强度因子;(7)机器优化设计:自动筛选出在一定的技术和物质条件下技术经济指标最佳的结构设计方案。

此外,在特定条件下还要研究材料非线性和几何非线性问题,蠕变和蠕变屈曲问题,气动弹性和气动热弹性问题,弹性和非弹性接触问题等。

传统的结构分析均采用解析法,但许多工程问题无法用经典理论求得精确解析解,因此只能在严格简化结构外形、边界约束、受力状态的前提下求出一个供参考的解答,其他各种复杂因素的考虑均包含在安全系数中。

但是,如果把一个复杂的构件离散化为有限个单元,则不论其结构外形、边界条件等如何复杂,总是可以使每个单元的形状变得比较简单,其位移模式也可以用简单的插值函数来表述,这样便可以用由数量很多但有限的单元以一定方式连接成的整体模型来模拟这一复杂零件。边界约束和受力条件也可以模拟,由此求出的数值解完全可以逼近真实解,使计算精度得到提高。

例 1-1 齿轮结构分析

关于轮齿的弯曲强度,早在 1893 年, W. Lewis 便应用材料力学方法推导出了计算公式,其基本出发点是把轮齿简化为等强度悬臂梁,即轮齿在齿根固结,齿廓简化为等强度的抛物线。抛物线 AB, AC 内接于齿廓曲线,这样就可以求得众所周知的弯曲应力计算公式(参看图 1.1):

$$\sigma_w = \frac{P_w \cos \gamma}{Bmy} \quad (a)$$

式中 B ——齿宽;
 m ——模数;
 y ——齿形系数。

这一方法至今仍获广泛应用,但是应该指出这一力学模型比较粗糙,例如关于载荷作用

点及其大小。实际上对于重叠系数为 1~2 的齿轮传动,只有在啮合的一定阶段,其载荷才由一个齿承担,但这时的啮合位置通常是在节点附近载荷并不作用在齿顶,而轮齿间的载荷分配是一个影响因素很多的复杂问题,用解析法很难解决。同时,只有当齿高远大于齿厚和齿宽时,把轮齿简化为悬臂梁才是可信的,但标准齿轮,其齿高和齿厚之比约为 1.43。因此简化为悬臂梁是不恰当的,光弹试验早已证明了这一点。因而自从 T. J. Jaramillo 关于无限长悬臂板在集中载荷作用下变形和弯矩的解析解发表以来,开始日益广泛的采用悬臂板理论来研究轮齿强度。我们所作的有限元分析表明:对于短而宽的变截面悬臂厚板(图 1.2),虽然也可以引用 Jaramillo 的解,但结果比较粗糙,必须加以适当修正。如果要同时考虑接触变形和剪切效应,则解析解的误差就更大了。此外关于齿根危险截面的形状和位置用解析法也是难于确定的。有人认为危险截面为平截面,而危险截面的确定又有四种不同的方法。除了 Lewis 的抛物线法〔图 1.3(a)〕外,还有 Nieman - Glaubitz 法, Nieman - 石川法及 Hofer 的 30°切线法〔参看图 1.3 中(b)、(c)、(d)〕。其中 m 为齿轮模数, BC 为齿根上的齿厚。

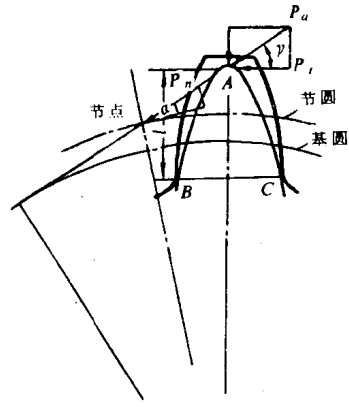


图 1.1

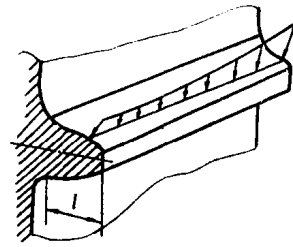


图 1.2

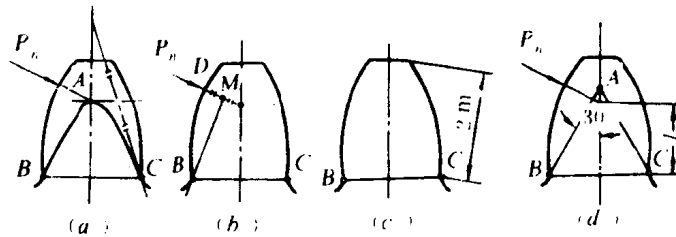


图 1.3

目前采用最广的是抛物线法和 30°切线法。如 BSS436(1940,英国标准)、AGMA(美国齿轮制造者协会)以及某些苏联企业均采用抛物线法,而 DIN3990E(1963,西德标准)。ISO(国际标准)以及日本机械学会(1967)等均采用 30°切线法。而另外则有人认为危险截面为折截面。(参看图 1.4)。其中 l 为悬臂长度, u 为折截面的大小。

当把齿轮轮齿作有限元分析时,由于结构已经离散,其边界条件的处理比较灵活,因而更符合实际。实践表明,这时可以不把固结区取在齿根,无需人为的确定危险截面,也不必取整个齿轮,而可以把固结边界移到轮毂的一定范围内(参看图 1.5)。其中 $BC = 3m$, $AB = 1.5m$ (m 为齿轮模数)。试算表明,这些边界上的位移只有齿廓载荷作用点位移的 1/30 左右,因此可以作为固结处理,而不会造成明显的误差。

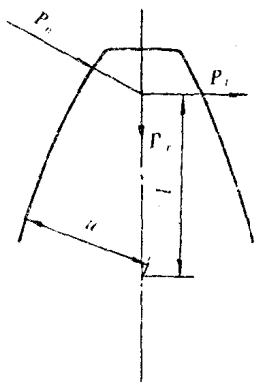


图 1.4

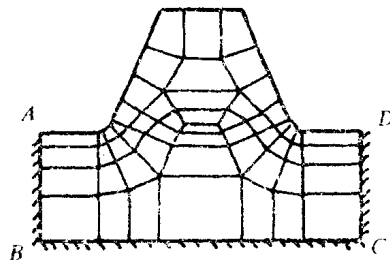


图 1.5

1.3 SAP 程序的功能

1.3.1 概述

SAP 是结构分析程序 (Structural Analysis Program) 的英文缩写。SAP 程序作为一个大型结构分析有限元通用程序是由美国加州大学伯克利分校的 K. J. Bathe, E. L. Wilson 和 F. E. Peterson 首先开发研制的, 它的第一个版本完成于 1970 年, 当时是一个二维有限元分析程序, 以后又经过多次修改, 其中直接由加州大学伯克利分校 Bathe 教授和 Wilson 教授负责修订的版本有 SOLID SAP (即 SAP2, 1971 年)、SAP3 (1972 年)、SAP4 (1973 年) 等版本。SAP5 是由美国南加州大学土木系发起的 SAP 用户协会 (SUG) 组织修改编制的。从 1979 年起, SAP4 和 SAP5 由北京大学⁽¹⁾、中国科学院计算中心、西安交通大学、郑州机械研究所以及北京工业学院等单位移植到国内的大中型计算机上。1982 年 7 月又在修改 SAP5 程序多处错误的基础上, 由北京大学力学系固体力学教研室推出了 LISA 通用有限元分析程序 (SAP5 改版)。1983 年他们又把 SAP5 程序移植到国内配备较为普遍的 IBM-PC/XT, IBM5550 等微型计算机上, 开发了 SAP5P 程序, 此外还有国家机械委员会计算机应用技术研究所研制的 SAP6/AT 程序和 SAP/XT 程序, 南京当代电脑技术公司的 SAP5C 程序和 SAP6C 程序等。

SAP5 程序属于线弹性结构静动力分析有限元通用程序, 在国内现在已经广泛地应用于航空航天、土木建筑、机械、船舶、兵器、石油化工等许多部门。国内许多计算中心都配备有这套软件, 估计用户达 1~2 万人。在广泛应用中已经解决了许多工程实际问题, 取得了明显的经济效益。表 1-2 列举了 SAP5 程序应用的部门及其结构类型。

表 1-2 我国应用 SAP5 的情况

序号	部门	课题类目
1	机械工业	锻压机械、重型机床、精密机床、机电设备、汽车、农机具、工程机械、冶金机械、振动台
2	核工业	反应堆和加速器部件

续表

序号	部 门	课 题 类 目
3	航空工业	飞机和发动机部件
4	电子工业	大型天线结构
5	兵器工业	坦克、火炮、发动机部件
6	航天工业	卫星结构、火箭舱、战斗部
7	海军	鱼雷
8	工程兵	地铁结构、地下仓库、涵洞、防核爆工程
9	铁道	铁路桥梁、公路铁路立交桥、车厢体、油罐车
10	交通	港口码头、码头吊车、立交桥、斜张桥
11	水利	大型拱坝、涡壳、闸墩、升船机架
12	石化工业	油气管道、钻井平台、井架、压力容器、贮油罐、热交换器
13	探矿	矿井支架、矿车箱、矿车支架、提升机
14	建筑	高层建筑、塔吊
15	轻工	自行车架、仓库
16	地质	地震应力场

1.3.2 程序的单元库^{(1)、(2)、(3)}

SAP 程序在修改版本过程中,程序的功能库和单元库不断扩充和完善。如前所述发表于 1970 年的 SAP 程序只能处理二维静力分析问题,在此基础上经过修改编制的 SAP2 已能处理三维静力分析问题,除了原来的杆梁单元、平面单元、轴对称单元外,还包括三维块体单元,板壳单元以及 16 节点厚壳单元,其中还采用了二维和三维的非协调元,但仍然限于静力分析。以后完成的 SAP3 和 SAP4 的主要特点是增加了动力分析的功能。SAP4 的发表是一个重要的标志,到此为止 SAP 程序的基本功能和单元库已经齐备。1973 年以后 SAP 程序的主要开发者都转而从事其他研究项目,Bathe 教授开始从事 ADINA 程序的开发并且离开了加州大学到麻省理工学院执教。Wilson 教授则主要从事微机用有限元静动力分析程序 SAP80 的研究工作。

SAP5 和 SAP4 相较,除扩充了动力分析中频率响应和重量、重心计算的内容以外,主要是完善其前后处理的功能,即增加了网格自动生成,节点带宽优化及图形显示的功能,其单元库并没有重要的扩充,只是为了解决组合结构中各种单元的连接问题而增加了伪单元,同时为了便于引入新的单元形态而增加了读入单刚单元。

SAP5 程序的单元库中共有以下几类单元。

1 三维桁杆单元,可以用来模拟各种空间桁架,单元只受轴力。如果给出节点温度值时,也能计算温度应力并叠加到机械应力上。

2 三维梁单元,用以模拟各种空间刚架。不论端点是固结,铰支,滑动或自由都能用这种单元来模拟处于空间任一方向的梁,作用在梁上的载荷可以是节点上的集中力或力矩,也

可以是重力或惯性力。但不能直接输入梁上作用的分布力,如要模拟分布力,必须事先等效移置为节点集中力。

3 二维单元,包括以下三种情况:(1)平面应力单元,用以描述厚度远远小于长度和宽度且外力完全作用在平面内的构件;(2)平面应变单元,用以模拟长度远远大于厚度和宽度同时长度方向不伸长,外力沿长度方向为均匀分布的构件;(3)轴对称单元,用于形状和外力都满足几何轴对称条件的构件。每个单元最多能输出 5 个点上的应力即 4 个节点和形心上的应力。可以同时输出应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 和主应力 σ_1 、 σ_2 ,还可以采用非协调元以提高计算精度。

4 三维块体单元,用以模拟各种实体构件,包括 8 节点三维块体单元和可变节点三维块体单元(8~21 节点)。外载包括面力,静水压力,三个方向的体力以及热载荷,当然集中力可以直接加在节点上作为节点载荷信息输入。三维 8 节点块体单元每个元素最多可以输出两点上的应力,即在单元中心的应力和表面中心的应力中任选 1~2 个点,对于单元中心可以给出整体坐标上的应力分量和三个主应力的大小和方向,对于表面中心的应力则给出局部坐标轴下的应力分量。而每个可变节点三维块体单元最多可以输出 7 个点上的应力。用户可以在 8~21 个节点和 6 个侧表面中心点任意选取这 7 个点的位置。

5 薄板薄壳单元,其中薄板单元用以模拟厚度远小于宽度和长度且外力垂直于平面的构件,又称为弯曲板元;薄壳单元用以模拟厚度远小于长度和宽度且外力垂直于曲面的构件。

6 管道单元,包括直管和曲管两种类型用以直接模拟各种管件,其刚度阵中已综合考虑了管壁内压及管件上拉压、弯扭、剪切的影响。

7 其他单元,除了前面所述伪单元和读入单刚单元外,还有广为应用的平面应力膜单元和边界弹簧单元。后者相当于作用在结构边界上的拉压弹簧或扭转弹簧,每一个边界弹簧单元可以为边界上一个节点的某一方向提供线位移约束或角位移约束,也可以直接模拟边界上的弹簧支承,或在这些节点输入给定位移,对于具有斜支承的结构的边界约束处理特别方便。

1.3.3 程序的功能⁽¹⁾⁽³⁾

SAP5 程序共有 6 种功能:

(1)静力分析功能,(调用子程序 SOLEQ),在结构离散的基础上首先输入节点坐标,给定温度和约束条件然后再输入单元节点信息、材料特性、节点载荷和单元载荷等,则程序可以自动形成单元刚度矩阵,整体刚度矩阵及载荷向量,并求解整体刚度方程从而得到节点位移,根据节点位移即可求得应变和应力。程序采用线性方程组集的解法可以对多个载荷向量进行平行运算。以便模拟多种载荷工况。这些载荷工况是由节点载荷和预先给定的 4 种单元载荷模式的不同线性组合而构成的。不同的载荷工况对应于不同的载荷乘子的组合。

(2)求解特征值和特征向量(调用 SOLEIG 模块)即求解结构的无阻尼自由振动的振型和频率,这是结构动力分析中用户首先关心的问题。对于阶数较低的结构动力分析可以求出各阶模态即各阶频率和振型,对于阶数高的结构可以求出最低的 NF 阶频率和振型。

(3)历程响应分析,调用模块 HISTRY。当结构承受随时间变化的各种干扰力时,调用此模块可以求得在此干扰力作用下,节点位移随时间变化的曲线以及各单元应力随时间变化

的情况,通常只求低阶响应。

(4)响应谱分析,调用模块 RESPEC。承受地震和基础振动及在粗糙不平路面上行驶的汽车,其基础的加速度必然会产生惯性力,这种惯性力作为一种干扰会激起系统的位移响应和应力响应。响应谱分析就是要在前面求出的各低阶振型和频率的基础上进一步根据设计规范所给的谱曲线和地震系数求出结构物在这些频率下的位移响应和应力响应,即由于输入的位移谱或加速度谱对结构所产生的均方根应力和变形。

(5)瞬态问题的直接积分,当结构承受随时间变化的外力作用时,调用 STEP 模块可对系统的动力平衡方程进行直接积分,把整个历程分为若干时间步长,逐步进行积分以求得位移、速度、加速度及应力随时间变化的曲线。外力可以沿任意方向按任意变化规律作用于任何节点上。

(6)频率响应。当结构的基础作简谐平动加速运动时,调用 FREQ 模块便可利用振型叠加法求得结构在这种激励下的频率响应即获得位移和应力随激励频率由小到大变化而产生的响应历程。程序可根据使用者的要求输出任何一种平动自由度的响应历程,既可用表格输出,也可以绘图。并且可以打印出绝对值最大的位移响应及其相应的频率。如果需要也可以根据位移响应计算出应力响应。

第二章 静力分析基本原理^{[4],[10],[22],[30]}

2.1 有限元位移法的基本概念

2.1.1 概述

如前所述,在工程实际问题中,结构的几何形状和受力状态都非常复杂。要想在整个结构区域内用统一的解析式来描述其位移场和应力场往往是非常困难的,在许多情况下甚至根本不可能。我们知道,一个复杂的弹性体可以看成是由无限多个质点组成的连续体,它具有无限多个自由度。在材料力学和弹性理论中,我们是假设构成弹性体物理模型的‘单元’是无限小的微分六面体,通过微分六面体的特性分析建立起控制微分方程,然后求解。由于形状载荷和边界条件比较复杂,所以微分方程的建立和求解都很困难。而有限单元法则把连续的弹性体简化为有限个单元组成的集合体。这些单元仅在有限个节点上相互连接。求解时首先进行单元特性分析,虽然在有限元法单元分析这一关键步骤中,仍然要采用弹性理论来建立单元的节点力和节点位移之间的关系,即要应用我们熟知的几何方程和物理方程,但这时弹性体已经不再由无限个微分六面体组成,不再具有无限多个自由度。而是只具有有限个自由度,由于单元划分得很小,因此在单元内部可以采用比较简单的位移模式,这就大大的简化了问题求解的过程。同时由于单元很多,因此所有单元的集合体又能够模拟形状、载荷和边界条件都很复杂的实际工程结构。由此可见,结构分析中的有限元法是一种结构离散化的近似数值解法,只要单元形态选择恰当,随着单元数量增多,可以趋近于解析解。

为了说明这一特性,我们以悬臂梁作为实例作简单的分析。

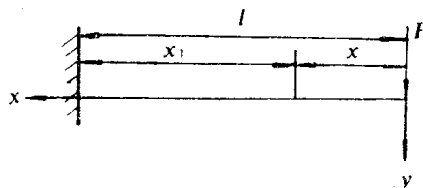


图 2.1

例 2-1 悬臂梁的应力应变分析(图 2.1)

在材料力学中,悬臂梁简化为一端固定一端自由的杆件,其解已为大家所熟知,即

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{Pxy}{I} & (a) \\ \tau = \frac{P}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) & (b) \\ v_{(y=0)} = f_A = \frac{-Pl^3}{6EI} \left(\frac{3x_1^2}{l^2} - \frac{x_1^3}{l^3} \right) & (c) \end{cases}$$

式中 I ——截面惯性矩, $I = \frac{bh^3}{12}$;

y ——到中性轴的距离;

E ——弹性模量;

v ——垂直方向的位移；

f_A —— A 点的挠度。

在弹性力学中,可以把悬臂梁简化为平面问题,取坐标系如图 2.2,应用弹性力学微分方程,当边界条件取为

$$u = v = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{当 } x = l, y = 0 \text{ 时}) \quad (d)$$

其应力分量和位移分量为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-Pxy}{I} & (e) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_y &= 0 & (f) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{-P}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) & (g) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{-P}{3EI} x^2 y + \frac{P}{3EI} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) y^3 + \frac{P}{2EI} \left[l^2 - (1 + \nu) \frac{h^2}{2} \right] y & (h) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \frac{\nu P}{2EI} x y^2 + \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{Pl^3}{2EI} x + \frac{Pl^3}{3EI} & (i) \end{aligned} \right.$$

式中 u —— x 方向的位移；

v —— y 方向的位移；

ν ——材料的波桑比。

由此可见,弹性力学中的应力解和材料力学中的解相同。从形式上看剪应力差一个符号,但这是由于符号规则不同而造成的。实际上两者的应力方向完全一致。这两种解均认为层间纤维的挤压应力 σ_y 为零。这也是一种近似结果,并不完全符合实际。

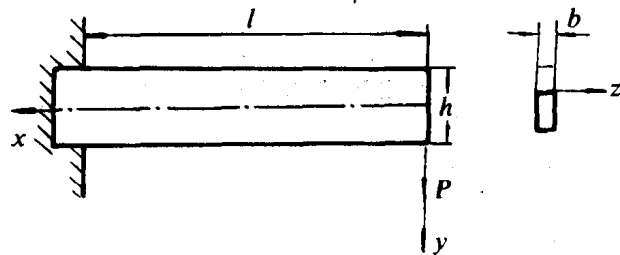


图 2.2

同时材料力学求出的挠度和弹性力学平面解所得到的梁的轴线沿 y 方向位移相同。但是弹性力学可以求得截面上各点的位移,按照这一位移解,梁的各个截面包括固定端截面在内并不再保持为平面。以固定端为例,只要将 $x=l$ 代入式 (h), (i) 便可得到

$$\left\{ \begin{aligned} u_{(x=l)} &= \frac{P}{3EI} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) y^3 - (1 + \nu) \frac{Ph^3}{4EI} y & (j) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_{(x=l)} &= \frac{\nu Pl}{2EI} y^2 & (k) \end{aligned} \right.$$

由此可见,即使不考虑 y 方向的变形,其 x 方向的变形也是一个三次曲线,因此各层纤维挠度曲线不再相同。

而且值得注意的是,在我们给定的边界条件下(即轴线挠度曲线在固定端处的切线斜率为零)在固定端截面的中心处,其转角就不为零。不难求得,其转角为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} = \frac{-P}{2EI}(1+\nu)\frac{h^2}{2} \quad (l)$$

反过来如以固定端截面转角为零作为边界条件(即 $x=l, y=0$ 处, $u=v=\frac{\partial u}{\partial y}=0$)求解, 则梁的轴线的挠度方程式和材料力学解不一样, 可表示如下式

$$v_{(y=0)} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Ph^2(1+\nu)}{4EI}(l-x) \quad (m)$$

而且悬臂梁固定端截面中心处挠度曲线的切线斜率又不为零。其斜率为

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l, y=0} = \frac{-Ph^2(1+\nu)}{4EI} \quad (n)$$

综上所述, 即使是像等截面悬臂梁这样简单的结构, 若要求得解析解也必须提出一些假设, 这些假设并不完全符合实际。至于一个复杂结构则更难用一个解析解来描述其实际的位移分量和应力分量。

悬臂梁还可以作为三维问题按弹性理论求解, 这里不再赘述。

如果我们不在全域采用统一的模式来描述悬臂梁的位移场和应力场, 我们也可以把悬臂梁 $ABBA'$ 划分为若干个单元, 应用有限元法求解, 其计算力学模型如图 2.3 所示。各种单元类型下所得到的计算结果如表 2-1 所示。由表可见, 对于这种简单结构只需要划分三个单元, 只要单元形态选择得恰当, 就可以得到满意的结果。

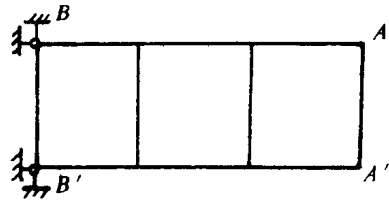


图 2.3

悬臂梁的有限元分析结果 (设解析解为 1.00)

表 2-1

单元类型						
A 处作用 垂直载荷	AA' 处 最大挠度	0.26	0.65	0.53	0.99	1.00
	BB' 处 最大应力	0.19	0.56	0.51	0.99	1.00
AA' 处 作用力偶	AA' 处 最大挠度	0.22	0.67	0.52	1.00	1.00
	BB' 处 最大应力	0.22	0.67	0.55	1.00	1.00

2.1.2 引例

为了说明有限元法的求解过程, 我们首先看一个实例。

例 2-2 受自重 q 作用的等截面杆(截面积为 A , 弹性模量为 E , (图 2.4)。这一问题很容易用材料力学方法求解。

已经知道, 对于受单向拉伸的等截面杆, 我们有 $\Delta L = \frac{NL}{EA}$ (N 为拉力)。对于受自重作用的杆, 其拉力是位置 x 的函数, 以 $N(x)$ 表示。现取一段很小的长度 dx , 在 $N(x)$ 作用下 dx 的伸长为 $\Delta dx = \frac{N(x)dx}{EA}$, 在 $0 \sim x$ 这段杆长内所产生的总伸长为:

$$\Delta = u(x) = \int_0^x \frac{N(x)dx}{EA} \quad (a)$$

已知 $N(x) = q(L-x)$ (b)

所以 $\Delta = u(x) = \frac{q}{2EA}(2Lx - x^2)$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{q}{EA}(L-x) \quad (c)$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{q}{A}(L-x) \quad (d)$$

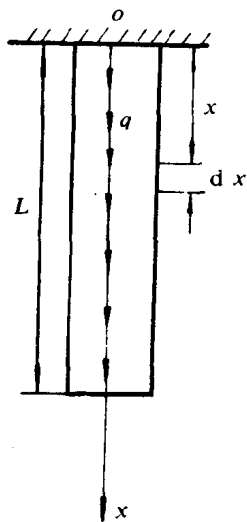


图 2.4

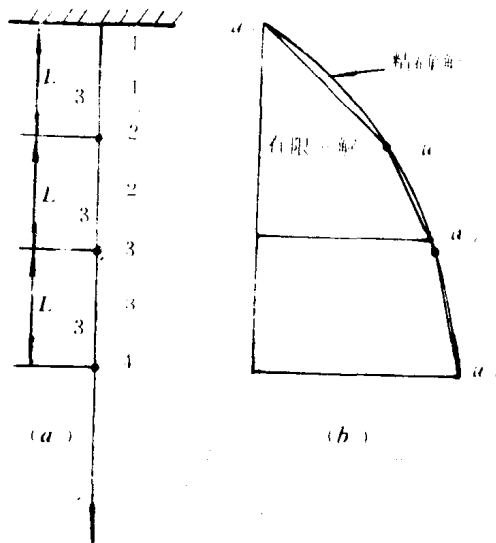


图 2.5

这种比较简单的结构用材料力学方法求解很方便, 无需用有限元法, 但为了说明有限元法的基本概念和求解步骤, 仍以这一简单问题作为引例。

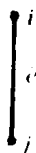


图 2.6

为此, 我们把杆件分为三个相同的单元, 四个节点[图 2.5(a)]。为了简化计算, 假定在每个单元内位移服从一定的简单规律, 称为假定位移模式, 一般取为多项式, 最简单的是一次式, 称为线性位移模式, 即

$$u_e = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (e)$$

而每个单元在其相互联接点即公共节点处具有相同的位移, 也就是说, 在节点处, 各有关单元不能脱开, 也不能嵌入。而单元内部的位移不管采用何种位移模式均是连续函数, 所以整个结构虽然分成许多单元, 仍然保持位移谐调。

对于任一单元 e ，其节点为 i, j (图 2.6)，相应的位移为 u_i, u_j ，如果 u_i, u_j 已知，则根据位移模式，立即可以确定单元上任一点的位移。

由于 i, j 均属于单元 e ，所以，其位移必满足式 (e) ，即

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

再求逆，即可得到

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (g)$$

再把 α_1, α_2 代回式 (e) ，得

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{x_j}{x_j - x_i} u_i - \frac{x_i}{x_j - x_i} u_j + \frac{x}{x_j - x_i} u_j - \frac{x}{x_j - x_i} u_i \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} & \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \\ &= [N]^e \{\bar{u}\}^e \end{aligned} \quad (h)$$

式中

$$[N]^e = [N_i(x) \quad N_j(x)] = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} & \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \quad (i)$$

称为 i 单元形函数

$$\{\bar{u}\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad \text{称为单元位移向量} \quad (j)$$

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^e &= \frac{\partial \{u_e\}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} & \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_j - x_i} & \frac{1}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [B]^e \{\bar{u}\}^e \end{aligned} \quad (k)$$

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) = E[B]^e \{u\}^e \quad (l)$$

一般地说，对于各个单元，则有

$$\{f\} = [N]\{\bar{u}\}^e, \{\varepsilon\} = [B]\{\bar{u}\}^e, \{\sigma\} = [D][B]\{\bar{u}\}^e$$

例如平面问题，

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

由式 (g) 可见：只要知道 u_i, u_j ，就可以求得单元内各点的位移。为此，现在首要的问题就是求得各单元的 u_i, u_j ，即把节点位移作为基本未知数。求得了位移以后，就可按式 $(k), (l)$ 求得应变和应力。

在有限元法中，只允许在节点上施加载荷，单元上的载荷都要等效的移置到相关的节点上。现在引用静力等效方法进行荷载移置。

每一杆单元的总载荷为 $qL/3$ ，每个节点上承受一半，即 $P_i = P_j = qL/6$ ，所以

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} qL/6 \\ qL/6 \end{Bmatrix} \quad (m)$$