

彈性柱體的扭轉理論

錢偉長 林鴻蓀
胡海昌 葉開沅

科學出版社

彈性柱體的扭轉理論

錢偉長 林鴻蓀
胡海昌 葉開沅

中國科學院力學研究所編輯

科學出版社出版

1956

彈性柱體的扭轉理論

著者 錢偉長 林鴻蓀 胡海昌 葉開沅
出版者 科學出版社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者 上海信誠印刷廠
總經售 新華書店

1956年4月第一版 書號：0433 字數：530,000
1957年8月第二次印刷 開本：787×1092 1/16
(滬) 1,881—2,512 印張：31 4/16 插頁：2

定價：(11)6.00元

序

本書總結了一百年來力學工作者在聖維南彈性柱體扭轉問題理論方面的工作，並且在某些方面補充和擴大了它的內容。

聖維南彈性柱體扭轉問題不僅在彈性力學方面是一個有名的重要問題，它結束了彈性力學的草創時代，開闢了新的豐富的聯系實際的工作園地，並且在數學上和很多實用物理問題關聯着，如靜電場理論、薄膜理論、流體力學中的一些問題等和扭轉理論都是可以互相比擬的。

本書的內容，包括了聖維南彈性柱體扭轉問題的各種準確數學分析解法、實驗解法、近似解法、數值解法。同時也敘述了各向異性的柱體的扭轉理論和變截面柱體扭轉理論。

本書列舉數以百計的具體例子，包括很多工程上常用的截面。具有這些截面的彈性柱體的扭轉問題都有具體的解法和數據，這些數據顯然對工程師將是有實用價值的。

聖維南彈性柱體扭轉問題除了在 1939 年曾由蘇聯基尼克院士寫過一本書外，其他各國學者都還沒有對這個問題詳細地敘述寫成專著。基尼克院士的著作最近業已再版，並在國內可以購到。

本書是作者們的集體工作，由錢偉長寫第一、二、九章，葉開沅寫第三、十一、十二章，胡海昌寫第四、五、六、十章，林鴻蓀寫第七、八章。在集體寫書方面，我們還缺乏經驗；雖然我們在統一系統、統一要求方面，已做了不少工作，但是，缺點恐怕是很難避免的。我們要求讀者們嚴肅地予以指正。

扭轉問題還有若干比較高級的問題，如薄殼柱體的扭轉，複合柱體的扭轉，約束扭轉，扭轉與拉伸的交互作用，大位移的扭轉問題，塑性扭轉，蠕變扭轉，扭轉振動和實驗等，都還沒有包括在本書範圍之內。這些問題將有另書處理。

錢 偉 長

1955 年 1 月 29 日

內 容 提 要

本書總結了一百年來力學工作者在聖維南彈性柱體扭轉問題理論方面的工作，並且在某些方面由作者們補充和擴大了它的內容。

本書的內容包括了聖維南彈性柱體扭轉問題的各种準確數學分析解法、實驗解法、近似解法、數值解法，同時也敘述了各向異性的柱體的扭轉理論和變截面柱體扭轉理論。

本書舉出了數以百計的具體例子，包括很多工程上常用的截面，對於具有這些截面的彈性柱體的扭轉問題，書中都有具體的解法和數據。

目 錄

第一章 緒論	1
§ 1.1 扭轉問題的範圍	1
§ 1.2 聖維南理論的發展	2
§ 1.3 聖維南扭轉問題的各種準確解法	6
§ 1.4 直線多角形截面的柱體扭轉理論的發展	7
§ 1.5 圓弧邊界截面柱體的扭轉理論的發展	9
§ 1.6 其他高次閉合曲線所形成的截面扭轉問題	11
§ 1.7 聖維南問題的近似解法	12
§ 1.8 自由扭轉問題的展望	17
參考文獻	17
第二章 彈性柱體的扭轉理論	22
§ 2.1 扭轉問題的性質	22
§ 2.2 聖維南湊合解法	25
§ 2.3 扭轉問題的位移	31
§ 2.4 調和函數的簡單通性	34
§ 2.5 Ψ , φ , ψ 三函數的簡單幾何性質	36
§ 2.6 稜角柱體的稜角線上各點在扭轉時的剪應力	38
參考文獻	40
第三章 湊合解法	41
§ 3.1 引言	41
§ 3.2 二次多項式應力函數	42
§ 3.3 三次多項式應力函數	44
§ 3.4 四次多項式應力函數	58
§ 3.5 四次以上的多項式應力函數	64
§ 3.6 包含負次數的多項式的應力函數	64
參考文獻	66
第四章 無窮級數解法	67
§ 4.1 引言	67
§ 4.2 矩形截面的柱體	68
§ 4.3 等腰直角三角形截面的柱體	73
§ 4.4 完整扇形截面的柱體	77
§ 4.5 任意扇形截面的柱體	81
§ 4.6 正交曲線坐標系下扭轉問題的通式	82

§ 4.7	共焦雙曲橢圓四邊形截面的柱體	84
§ 4.8	共焦雙曲橢圓二邊形截面的柱體	88
§ 4.9	共焦拋物線四邊形截面的柱體	91
§ 4.10	拋物線二邊形截面的柱體	94
§ 4.11	拋物線通徑二邊形截面的柱體	96
§ 4.12	雙極坐標系	99
§ 4.13	具二對稱軸的正交圓弧四邊形截面的柱體	100
§ 4.14	任意圓弧二邊形截面的柱體	107
§ 4.15	一類特殊的圓弧二邊形截面	113
§ 4.16	正交圓弧二邊形截面的柱體	116
§ 4.17	等厚有限角形截面與等厚等長十字形截面的柱體	118
§ 4.18	梯形截面的柱體	124
	參考文獻	128
第五章 保角映象法		129
§ 5.1	引言	129
§ 5.2	穆斯海里什維里方法的基本理論	129
§ 5.3	ζ 的無窮級數法	134
§ 5.4	穆斯海里什維里方法的應用	136
§ 5.5	$\omega(\zeta)$ 是多項式的場合	136
§ 5.5a	圓外長短輻旋輪線截面的柱體	136
§ 5.5b	再論兩種多項式的 $\omega(\zeta)$ 的場合	138
§ 5.6	$\omega(\zeta)$ 是有理式的場合	139
§ 5.6a	蒲氏雙紐線截面的柱體	139
§ 5.6b	上節的一個推廣	142
§ 5.7	$\omega(\zeta)$ 是無理式的場合	143
§ 5.7a	伯努利雙紐線截面的柱體	143
§ 5.7b	圓弧二邊形截面的柱體	145
§ 5.8	根據穆斯海里什維里法得出的近似解法	146
§ 5.9	正多角形截面的柱體	146
§ 5.10	保角映象在半無限平面上的方法	149
§ 5.11	有兩個裂縫的圓形截面的柱體	150
§ 5.12	截面是某對稱圖形的一半的場合	154
	參考文獻	160
第六章 多角形截面的柱體的扭轉		161
§ 6.1	引言	161
§ 6.2	屈列弗茲法	161
§ 6.3	一類特殊的多角形截面	165
§ 6.4	等寬無限 L 形截面的柱體	168
§ 6.5	無限 T 形截面的柱體	172

§ 6.6	C 形截面的柱體	176
§ 6.7	L, Γ , Π 形截面柱體的抗扭剛度	178
§ 6.8	30°—60°—90° 三角形截面的柱體	179
	參考文獻	186
第七章 近似解法		187
§ 7.1	能量原則	187
§ 7.2	黎茲方法	195
§ 7.3	黎茲方法處理機翼剖面問題	205
§ 7.4	黎茲方法的改進	212
§ 7.5	化為常微分方程法(康托洛維奇方法)	219
§ 7.6	屈列非茲方法及有關狄里赫列積分的討論	228
§ 7.7	放鬆邊界條件法	239
§ 7.8	函數空間法(一)狄里赫列及諾依曼問題	249
§ 7.9	函數空間法(二)彈性靜力學問題	258
§ 7.10	函數空間法(三)解及其導數在一點的上下界	262
§ 7.11	函數空間法與直接方法的關係	267
§ 7.12	對稱化法	270
§ 7.13	對稱化法——復連通域	274
§ 7.14	限制誤差法(一)一般原則	276
§ 7.15	限制誤差法(二)伽遼金方法	279
§ 7.16	限制誤差法(三)試點法、最小平方誤差法及部分區域法	284
§ 7.17	厚度參數法	288
§ 7.18	對單連通截面的抗扭剛度的另一些估計	292
§ 7.19	對複連通截面的抗扭剛度的另一些估計	297
§ 7.20	直線方法	300
	參考文獻	306
第八章 數值解法		308
§ 8.1	差分方程及格網	309
§ 8.2	依次消去法	316
§ 8.3	遞替法	323
§ 8.4	收斂的改善	329
§ 8.5	弛鬆法	336
	參考文獻	354
第九章 變截面圓柱體的扭轉		355
§ 9.1	變截面圓柱體的扭轉問題	355
§ 9.2	幾種簡單的問題	358
§ 9.3	貝塞爾函數所能處理的問題	360
§ 9.4	曲線坐標	364
§ 9.5	球面坐標中的各種解	366

§ 9.6 球面坐標所能處理的各種問題	369
§ 9.7 橢圓及雙曲線坐標中的各種解	375
§ 9.8 橢圓及雙曲線坐標所能解決的問題	378
§ 9.9 拋物線坐標中的各種解	386
§ 9.10 雙極坐標中的各種解	389
§ 9.11 在橫軸上的雙極坐標問題	394
§ 9.12 圍一圓孔道的圓柱體的扭轉	396
§ 9.13 維勒斯的幾個漸近解	404
§ 9.14 柏許爾的半空圓柱體的近似解	406
§ 9.15 關於變截面圓柱體的扭轉問題的其他工作	407
參考文獻	409
第十章 各向異性柱體的扭轉	410
§ 10.1 直線型各向異性狀態	410
§ 10.2 直線型各向異性柱體的扭轉理論	412
§ 10.3 正交各向異性和各向同性柱體扭轉問題間的相似性	414
§ 10.4 各向異性和各向同性柱體扭轉問題間的相似性	416
§ 10.5 圓柱型各向異性柱體扭轉問題的一般理論	418
§ 10.6 圓柱型各向異性柱體扭轉問題的一般解法	421
參考文獻	424
第十一章 比擬法(一)	425
§ 11.1 引言	425
§ 11.2 薄膜比擬法的理論	425
§ 11.3 皂膜比擬法	434
§ 11.4 皂膜比擬法實驗的裝置和測量的方法	434
§ 11.5 皂膜比擬法實驗的結果	441
§ 11.6 皂膜比擬法實驗的討論	452
§ 11.7 光學裝置的皂膜比擬	456
§ 11.8 液體界面比擬法	461
§ 11.9 液體界面比擬法的實驗結果	462
參考文獻	464
第十二章 比擬法(二)	466
§ 12.1 流體動力學比擬	466
§ 12.2 電比擬法的介紹	470
§ 12.3 電比擬法的理論	470
§ 12.4 電比擬法實驗的裝置和量度的方法	472
§ 12.5 電比擬法的實驗結果	474
§ 12.6 用電解槽幫助保角變換解扭轉問題	479
參考文獻	483
內容索引	485
人名索引	490

第一章

緒論

§1.1 扭轉問題的範圍 人類在很早的時期就遇見了扭轉問題。當我國祖先在三千年前利用轆轤從井下取水的時候，就遇見了設計扭軸的問題。轆轤設計的成功，證明了他們對於柱體在扭轉時的規律是有一定程度的認識的。此外如車軸的應用（約在殷盤庚以前），水輪的發明（約在漢靈帝時）都指出我國祖先對於軸的扭轉問題有了日益深化的認識。

扭轉在現代工業裏佔有重要的地位，它幾乎成爲一切機械設計和結構設計的主要部分。自從人類利用軸的轉動爲傳遞一切運動的主要辦法之後，扭轉就突出地成爲機械設計的不可缺少的部分。此後人類開始利用電力，而發電機和電動機主要就是利用輪軸的轉動來進行工作的。當這些機械和電機的負荷日益增大時，精確的軸或柱體的扭轉問題的理論知識也就日益受人注意。

在一切金屬結構裏扭轉也是主要問題之一，尤其在考慮動力設計和結構的穩定設計時，常常把扭轉的因素看作首要的問題。當然我們絕不是說，木結構沒有扭轉問題，我們只是說金屬結構一般受有更大的載荷，扭轉的問題更加重要而已。世界上有不少懸索橋的事故是當扭轉振動在山谷氣流作用下的不斷擴大而發生的。在遠洋船體的結構裏，扭轉問題也常常爲考慮船體結構穩定的不可缺少的部分。飛機機翼和機身的結構裏，扭轉所生的應力常常產生破壞性的事故。

扭轉問題在彈性體力學裏佔有重要的地位，它給予我們測定材料的剪切模數的主要根據。它是彈性體力學中有準確解答的平面問題中的主要問題。利用扭轉理論，我們還可以找到像彈簧這樣複雜問題的簡單的近似解。

柱體的扭轉問題，一般可以按柱體的截面形狀和柱體的末端條件，分成若干不同性質的問題。當柱體末端的軸向位移不受任何限制時，我們稱爲自由扭轉問題；這問題首先是由聖維南在整整一百年前提出的^[1]，因此也稱爲聖維南問題。自由扭轉問題基本上是一個二維問題。當柱體很長時，在柱體中段的部分，不論末端的軸向位移是否受有限制，一般都可以近似地作爲自由扭轉問題考慮；末端軸向位移的影響，一般只集中在末端附近。當柱體不很長時，或當柱體是一個開口的薄殼柱體時，

末端軸向位移的限制就非常重要,這種問題我們稱為約束扭轉問題,它是彈性力學中的一個三維問題。約束扭轉問題的精確解是比較困難的,一般都用近似的解法。

柱體的截面是單連通的或是複連通的,對柱體的扭轉問題說來,會有一定的分別。一般可以說,單連通截面柱體的解法比較簡單,複連通截面柱體的解法就比較複雜。

變截面圓柱體的扭轉問題,也是二維問題,但是它和等截面柱體的自由扭轉問題完全不同。此外在結構裏,也還時時遇見各向異性柱體的扭轉問題和複合柱體的扭轉問題。

薄殼柱體的扭轉問題,由於航空結構的廣泛應用,在最近十幾年來受到人們的重視。我們有時把薄殼柱體按加勁和未加勁分成兩類。當然加勁的薄殼柱體扭轉問題,一般要複雜得多,並且也重要得多。

柱體由扭轉所發生穩定問題和振動問題也是有很大實用價值的。

在本書中,我們將只限於討論自由扭轉問題和變截面圓柱體問題。換句話說,我們只討論二維的扭轉問題。關於扭轉的其他問題,將歸納在計劃中的另一書內。

§1.2 聖維南理論的發展 扭轉問題經過了物理學家和數學家長期的論爭研究和實驗測定之後,終於在 1853 年 2 月為法國的彈性體力學家聖維南指出了正確的數學處理的途徑。人們為了紀念這個在彈性體力學發展史上的劃時代的工作,就把這問題,稱為聖維南問題。在聖維南以前,從各方面的重視看來,一定有很多科學家在這個問題上用過功夫。但是由於年代久遠,當時的文獻傳流不廣,因此,很多工作到現在已經被埋沒而無可考查了。

最先注意到各向同性材料的柱體在受到扭轉力矩而發生扭轉問題的是庫倫 (1784)^[2]。他進行了關於細絲扭轉振動的實驗並進行了數學的分析。他假定了扭轉的角度和扭轉力矩成正比。從實驗的結果,他指出了圓柱體的扭轉力矩和扭轉角的比率是和圓柱體半徑的四次方成正比的。用現代的習慣說,假如 α 是每單位長度柱體扭轉的角度, G 是材料的剪切模數, I 是圓柱體截面繞軸心的極慣性矩,則扭轉力矩 M 應該等於 αGI 。此後七十多年裏對於這個問題曾進行了廣泛的探討實驗和研究。和聖維南同時代的韋爾賽姆^[3],曾在他的扭轉論 (1855) 裏比較詳細地敘述了這七十多年裏的扭轉問題的研究工作。

在這些年代裏,彈性體力學的基本理論還沒有穩固的基礎,那時對於各向同性體究竟有二個獨立的彈性係數,抑或只有一個彈性係數的問題,尚在爭辯不休!而這樣

一個根本問題的決定，却要依靠扭轉振動的可靠理論和可靠的測定。因此扭轉問題，就成為當代彈性力學工作者的注視的中心。

自從庫倫的實驗和分析公佈以後，庫倫的公式幾乎為一般研究扭轉問題的人習用了五十多年；他們都假定柱體在扭轉時，不論是什麼形狀的截面，截面的平面總是可以保持平面。直到1829年時，柯希^[4]用他所發展的彈性力學普遍理論，研究了長方形截面柱體的問題，得到了扭轉力矩 M 等於 $4\alpha G I_x I_y / l$ 的結論。這裏的 I_x, I_y, I 分別是一般截面（取為 x, y 平面）對 x 軸、對 y 軸和對中心軸的慣性矩。他的結果，雖然只是近似的，但是正像聖維南^[5]在十年後（1839）所指出的那樣，代表了一個新的觀念；即是柱體截面在扭轉時，並不能保持平面，一定會發生高低不平的凹凸現象。這種截面凹凸的觀念在聖維南的正確的扭轉理論裏是一個主要的物理觀念。我們在這裏必需要指出，當時這樣懷疑的人是很多的，譬如海姆^[6]和賽格尼茲^[7]就研究了柱體在扭轉時，各條長纖維的拉長問題。不過這些看法把每個長纖維都孤立了起來，所以就得不到什麼有用的結果。

在這個時代裏，各方面都進行了很多實驗，這些實驗指出了那個時期中各種理論的缺點，引導着理論走向正確的道路。譬如希爾和拉格葛蘭^[8]的實驗指出了庫倫的定律和實驗並不完全符合，建議採用靜力扭轉測定的辦法。沙伐^[9]進行了關於長方形、正方形和三角形截面柱體的扭轉試驗。杜來^[10]的實驗和沙伐的實驗指出，如果用舊理論從實驗結果計算剪切模數，則從正方形截面柱體的扭轉試驗所得的數值，只有從圓形柱體扭轉試驗所得的數值的80%。

我們在這裏必須指出，在那些年代裏，扭轉實驗最有成績的、規模最大的、在實驗技術上最精確可靠的是俄國的實驗物理學家庫潑弗爾^[11]。他在聖彼得堡中央物理試驗所進行的扭轉測定工作所得到的結果，直到現在還公認是最傑出的紀錄。他測定了關於鐵、銅、鉛、銀、金各種金屬絲的扭轉模數，注意了溫度對於扭轉模數的影響。他是第一個在科學論文裏提出了這類實驗在什麼溫度下進行的人。他的實驗結果肯定地決定了各向同性體的彈性力學應有兩個獨立的彈性係數。他的工作受到了“彈性體力學和材料強度學史”作者托得亨脫爾和皮爾遜^[12]的稱譽，他們認為庫潑弗爾的測量工作是歷史上最認真和最可靠的。

1) 庫潑弗爾是聖彼得堡的中央物理試驗所的創造人。該所在1849年成立，直屬財政部。該所在庫潑弗爾領導下進行了不少度量衡標準試驗的工作。庫潑弗爾的實驗論文，大部分發表在該所刊行的 *Compte Rendu Annual*, 1850年號到1861年號。庫潑弗爾著有“俄國中央物理試驗所關於金屬彈性的實驗研究”一書。但只在1860年刊行了第一卷。原定的第二第三卷未能刊出，庫潑弗爾即在1865年逝世。

聖維南在柯希和其他力學家的理論工作基礎上，和實驗數據的指示下，在 1847 年起提出了一系列的關於扭轉的論文^[13]。這些論文裏分析了柯希的失敗的教訓，成功地列出了扭轉問題的一般方程，提出了軸向截面位移 w 作為主要的未知函數，指出了扭轉問題的解就是尋找在截面中關於方程

$$\nabla^2 w = 0 \quad (1.1)$$

的解，並且在截面邊界上應該適合邊界條件¹⁾

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right)dx - \left(\frac{dw}{dx} - \alpha y\right)dy = 0. \quad (1.2)$$

(1.1) 是平衡條件，(1.2) 是柱體側面的邊界條件。聖維南解決了長方形截面和橢圓截面的扭轉問題。

聖維南在此後幾年裏曾在這方面繼續深入研究工作，在 1853 年 2 月在哲學數學會上提出關於長方截面柱體扭轉的簡單報告^[14]。在同年 6 月在法國科學院提出有名的扭轉理論總結論文^[11]。這論文在 1855 年刊出，奠定了一百年來扭轉理論研究工作的基礎。

聖維南的總結論文，詳盡地研究了扭轉問題的物理性質和數學理論，解出了像圓、橢圓、方形、長方形、等邊三角形和一些雙對稱邊界等截面的柱體扭轉問題；同時用代數方程表示了近似的曲邊方形、曲邊長方形截面的柱體問題。聖維南在這些問題裏注意到這一些截面的剪應力極大點，都位置在邊界離圓心最近的地方。但是這個結論在聖維南編訂納維的“應用力學”時^{[II, 10]²⁾}，就指出了不是普遍正確的。他指出在 I 形梁上，剪力極大點雖然也在邊界上，但不在邊界離圓心最近之處。

在同一總結報告裏，聖維南也研究了空心截面的柱體問題。他處理了相似橢圓所包容的空心截面；他並指出當內外邊界都是折線構成時解答的困難所在。

在 1858 年，聖維南說明了當圓柱體扭轉時，不論扭轉軸通過圓心，抑或不通過圓心，只要它們都平行於圓柱體的軸向，則單位長度扭轉的角度、剪應力和扭轉力矩都是不變的。

聖維南的工作是這樣的詳盡細緻，每一結果都盡可能地和實驗對證。他算出一切數字的結果，作出了圖解，對技術上的運用有很多方便。

聖維南的工作肯定了各向同性體彈性力學只有二個彈性係數的爭論。肯定了

1) 這條件和 (2.73) 是相當的。

2) [II, 10] 指第二章的參考文獻 [10]；以下仿此。

半世紀來泊松、柯希、納維等對於彈性力學的基礎理論的正確部分，提出了以後在彈性力學和材料力學發展史上有決定性作用的所謂“聖維南原則”。這個原則用現在的語言可以這樣說：若在物體上任一局部作用一個平衡力系，則該平衡力系在物體內所引起的應力，隨着對於該局部的距離加大而急速地減小。這個原則的普遍的數學嚴格證明直到今天還是一個懸案。聖維南的工作也提出了今天在彈性力學裏引用最廣泛最有效的方法，就是湊合法。聖維南的湊合法指出在解彈性力學的問題時，首先掌握的應該是該問題的主要的物理本質，我們可以根據這些主要的物理性質，簡化數學問題到這樣簡單的地步，尚足以適應其他次要的因素。

克來勃許^[II. 6]在 1862 年提出了關於共焦橢圓所包截面的柱體扭轉問題的解法。克來勃許是第一個用曲線坐標解聖維南問題的人。此後凱爾文^[II. 11]運用了複變函數方法，解出了任意兩組正交曲線所組成的曲線四邊形截面的扭轉問題。凱爾文詳細地研究了扇形截面的扭轉問題。他也指出扭轉問題在數學形式上，和非粘性液體在一個等角速轉動的柱體中運動的問題相等。因此，在凹入的稜角上，剪應力是無窮大，在凸出的稜角上，剪應力等於零。

布賽乃斯克^[III. 12]在 1871 年指出了聖維南問題的另一個流體力學比擬。他引進了應力函數 Ψ ，扭曲函數 φ 和共軛扭曲函數 ψ ，這裏

$$\Psi = \psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2); \quad (1.3)$$

於是扭轉問題可以寫成

$$\nabla^2 \Psi = -2, \quad (1.4)$$

而 Ψ 在邊界上等於常數，一般等於零。求得了 Ψ 在截面內各點之值後，扭轉力矩等於

$$M = 2Ga \iint \Psi \, dx \, dy, \quad (1.5)$$

積分是遍及於全截面的。

布賽乃斯克指出 (1.4) 式所代表的解，和粘性液體在指定截面的管內作片流定常流動的解一樣。 Ψ 等於常數的曲線就是剪應力曲線，並且在等 Ψ 曲線垂直方向的 Ψ 值變化率就等於該點的剪應力。在這裏，布賽乃斯克證明了剪應力極大之點永遠在邊界上；但是他却並未指出剪應力極大值之點永遠在邊界離中心最近之處¹⁾。

布賽乃斯克也指出了在空心柱體的內外邊界上， Ψ 的邊界值應是兩個不同的數值。

1) 見 §2.4 末的討論。

布賽乃斯克^[15] 認識到這樣的扭轉問題, 和空心柱體的温度分佈問題相等。

此後, 有不少人發現實心柱體的扭轉問題和其他物理問題可以相比擬。如: (1) 非粘性液體在柱體中因均勻渦旋而生的運動 (格林希爾)^[16], (2) 柱體中電流所成的矢位量 (海維賽特^[17]、斯特魯脫^[18]), (3) 平面邊界的薄膜在橫載荷下的橫位移 (普朗都爾^[19]) 等。

布賽乃斯克的工作, 給扭轉問題大大的推進了一步。自此以後, 聖維南問題在根本理論上沒有重大的進展。人們都集中力量來進行為各種截面求得各種的解法, 特別是那些準確數學分析所難於處理的截面, 就要求得近似的解答。

當然, 我們不能說, 聖維南問題就一些進展也沒有了。譬如, 聖維南^[20] 在 1879 年曾提出了許多截面的扭轉力矩 M 可以寫成下列形式:

$$M = XAG\alpha/I, \quad (1.6)$$

這裏的 A 是截面的面積, I 是極慣性矩, X 是由截面形狀所決定的常數, 那些截面邊界一般是凸出形狀的都可以近似地為 0.025。在 1924 年, 尼古拉^[21] 證明了抗扭剛度的最大極限為

$$\frac{M}{\alpha G} \leq 4 I_x I_y / I. \quad (1.7)$$

在 1928 年, 梅賽爾^[22] 證明了, 實心柱體的平均剪應力 τ_m 是

$$\tau_m = 2G\alpha r_m, \quad (1.8)$$

這裏的 r_m 是截面的平均半徑, 它等於截面的面積被邊界長度除所得之商。

波雅^[VII: 21] 在 1947 年用對稱化法 (參見 §7.12) 嚴格地證明了聖維南在 [1] 中提出的一個斷言: 在所有具有同樣大小面積的各種截面中, 圓截面具有最大的抗扭剛度。

§1.3 聖維南扭轉問題的各种準確解法 一百年來人們對聖維南扭轉問題在各種截面下的解法, 進行了很多的工作, 尤其那些和工程問題特別有關的截面, 工作更多。這些工作曾由柏許爾^[23]、希琴斯^[24] 進行過總結。蘇聯基尼克^[25] 也曾有過關於扭轉問題的專書出版。

在一般處理扭轉問題的方法中, 最普遍的約有下列三類:

(1) 聖維南的湊合法 湊合法即是從拉普拉斯方程之已知解 ψ , 求出該解所代表的截面邊界方程 $\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$ 。這裏的 C 是任意常數, ψ 即共軛函數。

這法是聖維南所廣泛引用的。本書第三章主要介紹用湊合法找到的某些代數方程所表示的截面的扭轉問題。

(2) 拉梅的級數法 這法係克來勃許^[11.6]所首先運用來解扭轉問題的。本法所處理的截面，是兩組互相正交的曲線所構成的曲線四邊形。因此我們用拉梅的曲線坐標來解這些問題就有突出的方便。這裏包括矩形柱體用富里哀級數的解法。本書第四章就是特別為介紹這些方法而寫的。

(3) 保角映象解法 一般將截面映象到上半平面或是一個單位圓內，於是應力函數或共軛函數就可以用標準的複變函數分析方法使合於指定的邊界條件。這些方法包括用泊松積分，用格林函數，或用薛瓦茲變換等。在這些保角映象的方法中，以蘇聯的穆斯海里什維里法^[V.3]最有名。本書第五章就是介紹這些方法的。

在處理具體問題時，我們可以將截面分成各種幾何類型來研究：(1) 直線所包圍的截面，但並不閉合；(2) 閉合的直線多角截面；(3) 圓形或幾個圓所包含的截面；(4) 其他閉合的高次曲線所包含的截面。

§1.4 直線多角形截面的柱體扭轉理論的發展 多角形截面柱體，在結構鋼材上是常常遇到的。如 L、T、I、Π 等形的截面，都可以近似地當作多角形截面。因此多角形截面柱體的扭轉問題，在聖維南提出了長方形和等邊三角形截面柱體的解後，就成為這一百年來的扭轉問題中心工作。考脫爾^[VI.1]在 1908 年首先利用複變函數提出了多角形問題的一種解法。他求得了 L 形截面柱體的抗扭剛度的近似解，他的 L 形是等厚度的和不等腿長的 L。到 1920 年屈列弗茲^[VI.2]建立了一個求解多角形截面的扭轉問題的一般方法，給數學方法求解多角形柱體創造了一定的基礎。他把多角形的內部用保角映象的方法映象到上半平面的平面上，這樣就使屈列弗茲求得了表示 $\frac{d^2 f}{dz^2}$ 的複數積分，這裏 $f(z)$ 是 $z = x + iy$ 的複扭曲函數，即 $f = \phi + i\psi$ 。而這種積分式就是現在大家稱為屈列弗茲積分式的。在這個積分裏，包括着一些反映各種不同多角形的常數。在理論上，求得屈列弗茲積分的結果後，再連續積分兩次，就可以求得複扭曲函數。但是，這樣連續積分的工作是很艱巨的，只有少數多角形求得了明顯的結果。屈列弗茲求得了一個等厚而無限長腿的 L 形截面的複扭曲函數。他指出了在內凹角點上的應力的重要性，他在 1922 年的工作^[26]裏，計算了內凹角為圓角的 L 形（仍是無限長腿而等厚的）上的最大應力。這種研究引導着達森 (1923)^[27]，津村 (1920)^[28] 等一系列的工作，處理了等長等厚腿的 L 形的扭轉問題。

錫米敦^[VI.3]在1930年利用屈列弗茲法解決了無限 T 形（柄和緣不等厚）、無限 U 形（翼和底不等厚）和等厚等長的 L 形等多角形的扭轉問題。他用這些結果來近似地計算等厚而又有限長腿的直角多角形柱體，如 T 形、L 形等。他把這些結果和有名的弗潑爾父子^[29]經驗公式作了比較，定出了弗潑爾公式的改正值。

緊接着錫米敦的工作，索柯尼科夫^[VI.4]在1932年用調和函數理論解決了無限等厚 T 形截面的扭轉問題。他指出了聖維南問題是狄里赫列問題的一個特例，所以應該可以用泊松積分求得完全解。索柯尼科夫利用這個原理處理了無限等厚 T 形。但是賽斯^[VI.5]認為索柯尼科夫的方法是比較複雜的，他認為屈列弗茲的方法在處理多角形問題上有他的優點，為了證明這點，賽斯計算了一系列的多角形圖形，如長方形、無限不等厚 T 形和一條有限腿一條無限腿的 L 形。不過賽斯的計算有些部分是錯誤的。同樣在1934年，大久保^[VI.6]用屈列弗茲法處理了 C 形截面的扭轉問題。

以上關於直角多角形柱體的解將在第六章內詳細介紹。

在長方形方面，自從聖維南的工作以後，哥茲克（1909）^[30]曾利用聖維南的雙富里哀級數解中求得了近似表示式，計算了扭轉力矩、最大應力的數值。

在三角形方面，自從聖維南求得了等邊三角形的解後，在1919年，伽遼金^[IV.3]利用坐標軸的轉動和應力分佈的對稱性，求得了等腰直角三角形的軸向位移函數的解。從位移函數求得了應力、扭轉力矩和扭曲函數。當然我們要指出在1915年時，列賓松^[IV.2]亦曾求得過直角等腰三角形的應力函數。石橋（1931）^[31]曾依據伽遼金的結果進行了詳細的計算。

喀洛索夫^[32]在1924年曾從長方形的橫豎兩種解重合在一起，求得了直角等腰三角形的共軛扭曲函數，還近似地求得了其他直角三角形的解。

關於三角形的解將在第四章內進行介紹。

津村^[33]在1933年和賽斯^[34]在1934年先後指出屈列弗茲積分式在正多角形的情況下，可以大大簡化。這種簡化的可能，只要將正多角形的內部映象在單位圓的內部就可以看出來的。津村求得了新的複扭曲函數的公式，新的剪應力公式，同時計算了一些正多角形的最大剪應力；他的結果證明和正三角形、正方形及正六角形的實驗結果是完全符合的。這些結果，連正八角形的實驗結果合在一起，得出了某些有用的扭力矩和扭率的公式。賽斯的結果是用 Γ 函數和橢圓函數表示的。

賽斯^[VI.7]在1934年曾用拉甫所得的一個屈列弗茲積分式求得了關於等腰三角