数学研究生暑期数学中心讲座

流体力学

谢定裕

南开大学出版社

流 体 力 学

谢 定 裕 讲授

周显初 戴世强 整理

南 开 大 学 出 版 社

1 9 8 7

流 体 力 学

谢定裕　讲授

周显初　戴世强　整理

南开大学出版社出版
〔天津南开大学校内〕
新华书店天津发行所发行
河北新华印刷一厂印刷

1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷
开本：850×1168　1/32　印张：7.5　插页4
字数：19.6万　印数：1—4,600
统一书号：13301·41　定价：2.00元

序 言

1985年夏天，我应邀参加第2期数学研究生暑期教学中心，主讲流体力学课，事先准备了一份讲义，这本书基本上就是那份讲义。

因为听讲的学员都是数学研究生，所以这本《流体力学》是按讲授应用数学中的一门学科的宗旨而准备的。关于应用数学，国内外学者见仁见智、众说纷纭。在此，我想简略地谈谈我所了解的应用数学的内涵，从而说明在什么意义下流体力学是应用数学的一门学科。

要了解什么是应用数学，我要在这里提出所谓“应用数学的过程”。这一过程可用下面的图式来表述：

观测实验⟶建立数学模型⟶创造新数学或利用、发展旧数学⟶求得实际问题的解答⟶与观测、实验结果对照、比较、检验。

历史上最伟大的应用数学家当推牛顿，就他在科学上的最基本的贡献而论，按照上面的图式，相应的过程就是

天体运行的观测⟶牛顿定律⟶微积分的发明⟶行星运行规律的建立⟶符合观测结果。

在这一过程中可以发现，从千头万绪的自然现象中，掌握其本质要旨，建立合理而又可解的数学模型，是最困难而且也是最重要的工作。在牛顿的贡献中，牛顿定律的提出自然也是他的最高成就。

现代科学的迅速发展，已使一个个人很难独力完成某项有意义的工作的整个应用数学过程，何况绝大多数人也不是牛顿。所以，一个个人往往只能从事这一过程中的一个或两个环节的工作，这样的工作者就是应用数学工作者。然而，尽管我们只能做某一环节中的工作，却不应忘记这整个应用数学的过程，而且还应当明了应用数学过程中各个环节的相对重要性，从而认清：应用数学并不只是数学，并不就是数学。

这本《**流体力学**》就是依照上述精神、作为应用数学的一门学科撰写的。作为“应用数学的过程”的一个例子，流体力学有其独特的适当性，这特别可从如下三个方面来论述：

一、流体力学有长远的历史，有丰富的数学和物理内容，一直有重要的实际应用价值。

二、从数学的观点来看，流体力学的重要问题都是非线性的，因此，包含着许多数学上极富挑战性的问题，对数学的发展一直起着推动作用。

三、最近二十年在数学和理论科学方面新发展的两类重要研究课题——孤立子和浑沌，最初都来源于流体力学问题。由此可见，流体力学虽是一门老学科，却仍然极富

有青春的活力。

这本书虽是为数学研究生准备的，对象却并不限于数学研究生。对数学研究生而言，这本书提供了关于流体力学的入门知识，使他们能够从很浅近的物理基础起步，较快地进入流体力学的内堂，，并且开始接触到这门学科目前研究的前沿，但是他们若要继续从事流体力学研究工作，自然还需要自己再行补课，以充实物理方面的基础知识。这本薄薄的书在许多方面显然是过于简略的。对于流体力学专业工作者，尤其是工科大学的毕业生，这本《流体力学》会提供一些新的观点，介绍一些新的数学方法，指出一些科学研究的新方向。举例来说，用迁移方程为出发点来推导流体力学基本方程以及界面条件，在一般流体力学书中还不易见到；渐近方法对许多读者来说或许还不是十分熟悉，这里用流体力学中的一些例子作了简单介绍；孤立子和浑沌对许多工程技术人员来说或许也还是陌生的，这里也从流体力学角度作了比较系统的介绍。

书的内容的取舍不免受作者的爱好和研究兴趣的影响，本书相当大的一部分内容是根据作者十多年来在美国布朗大学应用数学系讲授流体力学的讲义整理而成。这里我要深切地感谢陈省身先生，他盛情邀请我参加这一教学中心，促使我将零散的讲义作一较有系统的整理。在讲课的过程中，南开大学和南开数学所的许多同事提供了种种方便，在此也愿对这些热心、勤劳的朋友表示诚挚的谢意。

最后，我还要感谢南开大学数学系周性伟教授和南开大学出版社的全体工作人员，特别是旭明先生，他们的辛勤劳动使这本书能在较短的时间内得以与广大读者见面。

谢定裕

目　　录

第1章 绪 论

§1 流体与连续介质

众所周知，一般物质有三态：固态，液态及气态。处于固态的物质叫固体；处于液态及气态的物质叫做**流体**。顾名思义，固体是固滞不流动的物质；而流体则是可流动的物质。以 H_2O 而言，冷冻为冰就成为固体，遇热化为水，甚至化为水汽就成为流体。

要区分固滞与流动，我们必须内定长度及时间的标准。以日常情况而言，我们所依据的典型长度不外是米或厘米；典型的时间不外是分或秒。在这样的时间范围内，冰看起来就是固体，而水及水汽是流体。但如果我们加长时间单位，不以分秒计，而以日月计，冰就不一定能算是固体。冰河的运动就是一例，冰河的流动速度可达每天 10 厘米至 10 米。

同样的，如果我们缩短时间单位到千分之一秒或万分之一秒，在日常情况下是流体的许多物质，也会表现出固体的性质。例如，流体一般是只能承受压力而不能承受张力的，但在那么短的时间中，水就可以承受高达十个大气压的张力。

因此，当我们说什么物质是流体时，我们一定要先有作为依据的典型长度及典型时间的概念。有时并不说明，那是因为大家已有默契的缘故。

即使在流体的范围之内，也要掌握典型长度与典型时间这一观念，因为在不同的典型长度及时间内，我们可以作不同的简化。这样才能以简驭繁，才能够分析自然界复杂的现象。以水为例，海洋学家与水利工程师分析的方法就不同。水利工程师与造船工程师的分析方法又略有不同。工程师与化学家或物理学家对水性的分析方法又有不同。这不仅是因为他们研究的目标不同，

而且是因为问题的典型长度与典型时间有很大的差异。

所以，当我们研究问题时，首先要弄清楚该问题的典型长度及时间，然后才能据此而决定我们应采用的分析方法。同样的，当我们建立模型、简化问题时，也要弄清楚其所能适用的长度及时间范围。这样我们才能知道所分析的问题是否与自然界的真实情况相符合。

许多流体可以当作连续介质来处理。

一个物体有许多性质。有的是全局性的，有的则因时间、地点而变，是局部性的。假定 $f_i(\boldsymbol{x}, t)$ 代表位于 $\boldsymbol{x}$ 的某物质在时间 t 的某种性质，它们都是 $(\boldsymbol{x}, t)$ 的连续函数，而且可微分多次，这样的物质就是一种**连续介质**。

这一定义相当含糊，但也只能如此。因为世界上没有绝对的连续介质。许多物质只是在某些情况下十分近似于连续介质。在这些情况下，我们将其当作连续介质来分析，不会引起多大的误差。

无论是空气或水都是由分子构成，一般分子的直径大概是 3×10^{-8} 厘米。以空气而言，在标准状态下，每一立方厘米中大约有 2.7×10^{19} 个分子，也就是说，分子与分子之间的平均距离大约是 3×10^{-7} 厘米。所以若以这种距离作为典型长度，空气自然就不是什么连续介质。但如果以 1 厘米、甚至 10^{-4} 或 10^{-5} 厘米的长度来看，每一单位体积中已有千千万万个分子。任何时候取出一单位体积，其分子总数与其平均数值不会相差多大。在这种意义上，我们可以合理地讨论密度这一概念，而且密度 ρ 也可当作是一连续函数。用数学式子表示，就是：

$$\rho=\lim_{\Delta\to}\frac{\Delta M}{\Delta V}, \tag{1.1}$$

其中 M 是质量，V 是体积。这里 ΔV 之趋近于零，当然不是真的为零，而是说就连续介质观点来看，ΔV 已可当作是零。在水中，分子之间几乎相互接触，可是仍有不少空隙，所以，把水当

作连续介质也只是一种近似。

我们还要讨论$\frac{\partial\rho}{\partial t}$这样的概念。以一般气体而言，其分子运动速度是在$10^4$～$10^5$厘米/秒之间，其碰撞频率大约是每秒$10^{10}$次。每一分子本身又在旋转及振动，其旋转频率与振动频率分别大约是10^{11}赫及10^{13}赫。在液体中，分子不太旋转，其碰撞频率及振动频率分别大约是10^{12}赫及10^{13}赫。由此可知，如果我们所用的单位时间要小到10^{-10}秒，那么，像ρ那样的值就会极不规则，很难当作是时间的连续函数，自然也无法考虑$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$那样的概念了。可是，如果单位时间是在$10^{-8}$秒以上，则平均的$\rho$仍可定义为数学上的连续函数。当然，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to}\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \tag{1.2}$$

式中的Δt也是以10^{-8}秒左右为界。

上面所说的都是我们常见的流体。现在再举一例。太阳在太空中可说是够孤零零的了，太阳的半径约为7×10^{10}厘米，而太阳系的半径约为6×10^{14}厘米，可是，与太阳距离最近的恒星却在4×10^{18}厘米之外。我们所处的银河系约有2×10^{11}个类似于太阳的恒星，银河系的半径约有4×10^{22}厘米。如以10^{22}厘米为典型长度，以10^8年为典型时间，这整个星系的运动也未尝不可当作连续介质来作近似分析。

以一般流体而言，如问题的典型时间或典型长度太小，我们就不得不放弃连续介质这一概念，而考虑个别分子的运动。但把流体当作连续介质来分析所得的一些结果，仍有参考价值，往往只要加以修正后就可推广应用。用连续介质的概念来讨论分析流体力学的主要原因有两个：

1. 连续介质的许多性质是连续函数，可应用微积分、微分方程等重要数学工具。

2．连续介质的概念不但可以简化分析，而且在缺乏微观理论的情形下（如液体），几乎是唯一可采取的途径。

§2 迁移方程

我们先来讨论**一般性的迁移方程**。

在连续介质中取任一区域V，其边界为A。在这一区域中，令被迁移量的密度为，$\psi(x, t)$，它随位置x及时间t而变化。V中总的被迁移量是$\int_V \psi(x,t)\mathrm{d}V$。

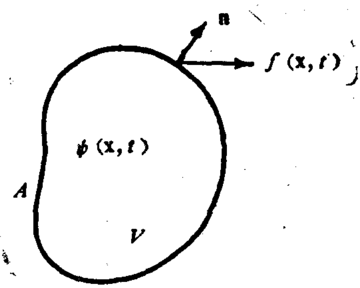

图 2.1

令$\boldsymbol{f}(x, t)$为被迁移量的通量密度，也就是单位时间内流过单位面积的被迁移量。$\boldsymbol{f}$的方向就是流动的方向。单位时间内流出区域V的被迁移量为$\int_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{f}(x,t)\mathrm{d}\sigma$，式中$d\sigma$是面积元，$\boldsymbol{n}$是封闭曲面$A$的单位外法矢。

被迁移量可能在连续介质中不断产生(或消失)．令$S(x, t)$为被迁移量的源密度，也就是单位时间内在单位体质中所产生的被迁移量.如以厘米为长度单位,秒为时间单位,则$\psi,\boldsymbol{f}$及S的量纲分别为

$[\psi]$=〔被迁移量〕/厘米^3，　$[f]$=〔被迁移量〕/(厘米^2·秒)，

$[S]$=[被迁移量]/(厘米^3·秒)．

很显然，V中被迁移量的增长等于产生的与流进的被迁移量的和，所以我们可写出如下的**迁移方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \psi(x, t)\mathrm{d}V + \int_A \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_V S(x,t)\mathrm{d}V. \qquad (2.1)$$

在一般情况下，连续介质中的物理量可用一连续可微的函数

来表示。因此利用Gauss定理，可得

$$\int_A \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\mathrm{d}V.$$

因为 V 是任意的，所以可得**迁移方程的微分形式**：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{f}=S. \tag{2.2}$$

这里，我们特别提出两点：

1. 方程(2.1)或(2.2)只是表达一种明显的道理，用于任何对象都可以，并没有特殊的物理内涵。当我们指定被迁移量后，方程(2.1)及(2.2)才有明显的物理意义。

2. $S(\boldsymbol{x},t)$ 可以是广义函数，例如 δ 函数，也可以是一种面源，只发自边界 A 或者其它特定的表面或界面。

§3 连续性方程与运动方程

在迁移方程(2.1)或(2.2)中，如令被迁移量为质量，就可得到质量守恒方程。令 ρ 为流体的密度，则迁移方程中的 ψ 现在就是 ρ。用 $\boldsymbol{v}$ 表示流体质点的速度，质量通量密度就是 $\rho\boldsymbol{v}$，也就是说迁移方程中的 $\boldsymbol{f}$ 现在就是 $\rho\boldsymbol{v}$。在经典情形下，质量不会产生也不会消灭，所以 $S=0$。因此，方程(2.1)及(2.2)就变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}V+\int_A\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=0 \tag{3.1}$$

及

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{3.2}$$

上式就是一般所谓的**连续性方程**。这一方程表示了连续介质中的质量守恒原理。值得一提的是，所谓流体质点也是在连续介质的意义上叫做质点，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ 是指在 $\boldsymbol{x}$ 处，t 时刻的流体质点的运动速度。

下一步，令迁移方程中的被迁移量为动量，在固定区域 V 中的动量为

$$\boldsymbol{p}=\int_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V,$$

因为质量微元为 $\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$，所以迁移方程中的 $\boldsymbol{\psi}$ 现在就是 $\rho\boldsymbol{v}$。如果我们采用直角坐标系，则 ψ 在 x_i 方向的分量就是 ρv_i。动量是由流体质点所载运，所以相应的动量通量密度 $\boldsymbol{f}$ 现在就是 $\rho v_i \boldsymbol{v}$。现在我们来讨论迁移方程中相应的源密度 S。这里，我们必须引进有关的物理学知识。根据 Newton 定律，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}, \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 是动量，$\boldsymbol{F}$ 是外加的力。由此可见，力是动量的源。因此 S 就应是力源。大致来说，就区域 V 中的物质而言，有些力是作用在每一物质质点上的，例如地心引力，这种力我们称之为彻体力或体积力，用 $\rho \boldsymbol{b}$ 来表示。另外有些力作用在区域 V 的边界上或表面上，例如，身体浸在水中可感受到的水压，这种力叫作面力。我们用 $\boldsymbol{S}$ 来表示这种面力源密度。$\boldsymbol{S}$ 的量纲是单位面积上的力。

根据以上的讨论，我们可将方程(2.1)写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v_i \mathrm{d}V+\int_A \rho v_i \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int_V \rho b_i \mathrm{d}V+\int S_i \mathrm{d}\sigma \tag{3.4}$$

或者，写成矢量形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \boldsymbol{v}\mathrm{d}V+\int_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma=\int_V \rho \boldsymbol{b}\mathrm{d}V+\int_A \boldsymbol{S}\mathrm{d}\sigma. \tag{3.5}$$

在一般情况下，面力常可写为

$$S_i=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j \tag{3.6}$$

式中 n_j 是 $\boldsymbol{n}$ 在 x_j 方向的分量。为书写方便起见，我们常常省略 $\sum_{j=1}^{3}$，而作求和约定：凡是有重复指标出现就表示对该指标求和。因此，式(3.6)可写成

$$S_i = \sigma_{ij} n_j,$$

代入方程(3.4)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v_i \mathrm{d}V + \int_A \rho v_i v_j n_j \mathrm{d}\sigma = \int_V \rho b_i \mathrm{d}V + \int_A \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}\sigma. \tag{3.7}$$

因为区域 V 是任意的，应用 Gauss 定理之后就可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho b_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}. \tag{3.8}$$

利用方程(3.2)，方程(3.8)变为

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = b_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}. \tag{3.9}$$

如果我们以 σ 来代表 σ_{ij} 这一张量，方程(3.9)也可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\sigma, \tag{3.10}$$

方程（3.9）或（3.10）就是所谓的**运动方程**。

这里要指出一点：在方程(2.1)，(3.1)及(3.4)中，$\int_V$ 是指对固定在空间的区域 V 积分，所以 $\int_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V$ 是指时刻 t 正好在区域 V 中的所有流体质点所具有的动量。在下一时刻 $t+\Delta t$，在这一区域 V 中，已有些不同的流体质点进入 V，也有些原来的质点流出。这也是为什么方程(3.3)与(3.4)的形式不完全相同，方程(3.4)要多一项 $\int_A \rho v_i \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$。如果我们一直追随同一流体质点，就不用对方程(3.3)进行修正。

以 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 作为随着流体质点的时间微分算子，从方程(3.3)引伸，可得到

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\sigma. \tag{3.11}$$

比较方程(3.10)与(3.11)，可知

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right), \tag{3.12}$$

$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$也常叫做物质导数。

从另一方面来看，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$是指在时刻$t$刚好在空间位置$\boldsymbol{x}$的流体质点的速度。所以$\frac{\partial u}{\partial t}$是指$\frac{1}{\Delta t}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)]$的极限值。在$t+\Delta t$时刻，在空间位置$\boldsymbol{x}$的质点一般而言并不是在时刻$t$处于位置$\boldsymbol{x}$的质点。这种$(\boldsymbol{x},t)$的描述方式就如一架固定不动的电影摄影机，对准某一十字街口，只管进入镜头的人马车辆而不管它们的来龙去脉。这种描述叫做 **Euler 描述**。

另外一种描述是跟随某一固定的流体质点描述。每一流体质点予以一个标志，犹如人有姓名，车有牌照一样。因为流体质点充满三维空间的某一区域，所以可用一个三维矢量ξ来表示，时间用τ表示。这种(ξ,τ)的描述叫做 **Lagrange 描述**。$\boldsymbol{v}(\xi,\tau)$表示ξ这一流体质点在τ时刻的速度。$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \tau}$是流体质点的加速度。

因为流体是充满空间某个区域的连续介质，而且质点不可能同时占据两个位置，所以$(\boldsymbol{x},t)$与(ξ,τ)之间有一一对应关系。它们的关系如下：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\xi,\tau), \tag{3.13}$$

$$t=\tau. \tag{3.14}$$

逆关系为

$$\xi=\xi(\boldsymbol{x},t), \tag{3.15}$$

$$\tau=t. \tag{3.16}$$

方程(3.13)的意义就是：$\boldsymbol{x}(\xi,\tau)$正是流体质点ξ在τ（或者t）时刻的空间位置，且t就是τ。可是$\frac{\partial}{\partial t}$与$\frac{\partial}{\partial \tau}$却并不相同。因为速度是指同一流体质点在单位时间内位移的变化，所以