严镇军 编

复变函数

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者在中国科学技术大学多年的教学实践中编写的。其内容包括：复数和平面点集、复变数函数、解析函数的积分表示、调和函数、解析函数的级数表示、留数及其应用、解析开拓、保形变换及其应用和拉氏变换九章。各章配备了较多的例题和习题，书末附有习题答案。

本书既注意引导读者用复数的方法处理问题，又随时指出复函和微积分中许多概念的异同点；在结构上既注意了它的完整性和系统性，又注意了它的使用性。具有由浅入深，逐渐深化，便于自学等特点。可供高等院校理科各系（除数学系）及工科对复变函数要求较高的各系各专业作为教材或参考书。

复 变 函 数

严镇军 编

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本：850×1168/32 印张：9 字数：232千

1995年1月修订版 1995年2月第2次印刷

印数：3001—8000册

ISBN7-312-00039-8/O・12

定价：6.00元

序

本书是在中国科学技术大学非数学系用的复变函数讲义的基础上编写的。该讲义自1978年起在中国科学技术大学内部经九届学生使用，使用期间修改过两次，这次成书又作了较大的修改。

考虑到复变函数这门课程的特点，在编写本书时，力图注意以下几点：

1．本书第一章“复数和平面点集”，虽是中学复数知识的复习和补充，编者力图一开始就引导学生注意用复数方法处理问题，掌握好复数运算，这对学好本课程是必要的。

2．由于复函在分析结构上几乎与微积分相同，它也是按照函数、极限、连续、导数、积分及级数的顺序建立起来的。而且定义形式和运算性质也相同（特别是关于极限、连续和导数），这就很容易给学生造成一个先入的印象：似乎整部复函只是把微积分中许多概念照搬而已。因此，在书中除了注意这些概念与微积分中有关概念的共性外，还特别注意突出在复情形下的固有特点，随时指出差异。

3．解析函数历来是以其内容完整著称的，本书相当一部分内容可以说是对解析函数的认识的逐步深化的过程，具体说就是解析函数的四个等价性概念，这也是历史上建立解析函数理论的不同观点。书中注意对每一次深化都有反映，随时总结提高。

4．多值函数历来是复函教学中的难点，书中对多值函数先采用限制辐角使其成为单值函数的办法处理，然后再初步介绍了与多值函数有关的一些概念，使读者较易接受。

5．复函方法，成功的解决了流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁场理论、热学及地球物理等学科方面的许多问题，为

了说明复函的应用，书中单辟一章讲调和函数和数学物理方程中的狄氏问题，并在保形变换中用较多的篇幅讨论了平面场问题。在许多章节中，还注意了与后续课程——《数学物理方程》的联系。

6．配备了较多的例题和习题，书末附有习题答案，供使用本书的教师和学生参考。

7．行文在注意其科学性与严密性的同时，力求通俗易懂，便于学生自学。

从1978年以来，使用过原讲义的教师提出了许多宝贵的意见，特别是我的同事中国科学技术大学数学系顾新身副教授细心地审阅了书稿，使本书得以避免一些不妥之处，编者谨向他们表示感谢。

严镇军

1987年2月

于中国科学技术大学

目　录

第一章　复数和平面点集

复变函数这门科学的一切讨论都是在复数范围内进行的．本章内容是中学复数知识的复习和补充．

§1.1　复　　数

1．复数的四则运算

复数的概念是为了解决数学本身发展过程中所遇到的矛盾而产生的．由于二次方程

$$x^2+1=0 \tag{1}$$

在实数范围内没有解．为了使这个方程有解，就把数的概念扩大，引进了虚单位

$$i=\sqrt{-1},$$

要求它能和普通的实数一道进行运算，服从实数范围内原来成立的那些基本运算法则，并满足条件

$$i^2=-1.$$

这样引进一个虚单位后，不仅方程（1）有了两个解 $x=\pm i$，而且（以后将要证明）任何代数方程的解都可以用 $a+bi$（a，b 为实数）这种样子的数表示出来．

我们把形如

$$z=x+iy$$

的数称为复数，其中 x 和 y 是任意实数，分别称为 z 复数的实部和虚部．记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

特别地，当 $\mathrm{Im}z=0$ 时，$z=\mathrm{Re}z+i0=x$ 是实数；当 $\mathrm{Re}z=0$ 且

$\mathrm{Im}z\neq 0$ 时，$z=i\mathrm{Im}z=iy$ 称为纯虚数。

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 相等，是指它们的实部和虚部分别相等，即

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

如果一个复数的实部和虚部都等于零，就称这个复数等于零，即 $0+i0=0$。

两复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为相互共轭的，如果其中之一用 z 表示，则另一个用 $\bar{z}$ 表示。显然实数的共轭仍为该实数。

设有两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$，它们的四则运算规则定义如下：

加法和减法：z_1 及 z_2 的和与差分别为

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

及

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

乘法：z_1 和 z_2 相乘，可以按多项式的乘法法则来进行，只须将结果中的 i^2 代之以 -1，即

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

特别地，当 $z=x+iy$ 时，有

$$z\bar{z}=x^2+y^2.$$

通常称非负实数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的模，记为 $|z|$。于是可写成下式

$$z\bar{z}=|z|^2.$$

除法：z_1 除以 $z_2\neq 0$ 的商定义为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{|z_2|^2}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}.$$

读者很容易利用乘法运算规则直接验证，这样定义的除法运算是乘法运算的逆运算。即有

$$z_2\cdot\frac{z_1}{z_2}=z_1.$$

从上面的运算规则可见，复数运算满足下列规律：设 z_1，z_2，z_3是复数，则

$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$（交换律）；

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$，

$(z_1\cdot z_2)z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$（结合律）；

$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$（分配律）.

全体复数引进了上述相等关系及算术运算后称为复数域。在复数域中，两个复数是不能比较大小的，这是复数与实数的一个不同之处。

例 1 对于两复数 z_1，z_2，求证 $z_1z_2=0$ 的充要条件是 z_1与z_2中至少有一个为零。

证 1）设 $z_1=0$，由乘法法则，得

$$z_1z_2=(0+0i)(x_2+iy_2)=0.$$

2）设 $z_1z_2=0$ 且 $z_2\neq0$。则 z_2^{-1} 存在，于是由 1）可得

$$(z_1z_2)z_2^{-1}=0\cdot z_2^{-1}=0.$$

另一方面，有

$$(z_1z_2)z_2^{-1}=z_1(z_2z_2^{-1})=z_1\cdot1=z_1.$$

比较以上两式，可知 $z_1=0$。

由上例的结论可知，两个都不为零的复数的乘积必不为零，这给复数运算带来很大的方便。我们知道，并非数学中所研究的对象都有这一性质。例如，矩阵的乘法就不具备这个性质。

2．共轭复数

共轭复数的运用，在复数运算上有着重大意义。先把它的一些运算性质罗列如下：

1）$\overline{\overline{z}}=z$。

2）$z+\overline{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\overline{z}=2\mathrm{Im}z$。

3）$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$。

4) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$。

5) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2=|z|^2$。

这些性质都不难证明，留给读者做练习。此外，由性质2）的第二个式子可知，复数 z 是实数的充要条件是$z=\bar{z}$；由第一个式子得知，z 是纯虚数的充要条件是$z=-\bar{z}$，且$z\neq 0$。

例 2 设 $z=x+iy, y\neq 0, y\neq \pm i$。证明：当且只当 $x^2+y^2=1$ 时，$\dfrac{z}{1+z^2}$是实数。

证 $\dfrac{z}{1+z^2}$是实数等价于

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即 $$z+z\bar{z}^2=\bar{z}+\bar{z}z^2,$$

亦即 $$(z-\bar{z})(1-z\bar{z})=0$$

因 $y\neq 0$，故 $2iy=z-\bar{z}\neq 0$，从而

$$1-z\bar{z}=0,\quad |z|^2=1.$$

即 $$x^2+y^2=1.$$

由于上述推导的每一步都是可逆的，故命题得证。

例 3 求$f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$的实部、虚部及模。

解 因为

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}$$

$$=\frac{1+z-\bar{z}-z\bar{z}}{1-z-\bar{z}+z\bar{z}}=\frac{1-x^2-y^2+2yi}{(1-x)^2+y^2}$$

所以 $$\mathrm{Re}f(z)=\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2},$$

$$\operatorname{Im} f(z)=\frac{2y}{(1-x^2)+y^2}.$$

因 $$|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}=\frac{(1+z)(1+\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}$$

$$=\frac{1+z+\bar{z}+z\bar{z}}{1-z-\bar{z}+z\bar{z}}=\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2},$$

所以 $$|f(z)|=\sqrt{\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x^2)+y^2}}.$$

例 4　试证明实系数多项式的根共轭存在。

证　设 z_0 是 n 次多项式

$$p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

的根，其中各系数 a_1，a_2，…，a_n 都是实数。由共轭复数的性质，有

$$p(\bar{z}_0)=(\bar{z}_0)^n+a_1(\bar{z}_0)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\bar{z}_0+a_n$$

$$=\overline{z_0^n}+\bar{a}_1\overline{z_0^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\bar{z}_0+\bar{a}_n$$

$$=\overline{z_0^n+a_1z_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z_0+a_n}=\overline{p(z_0)}=0.$$

这就证得 $\bar{z}_0$ 也是 $p(z)$ 的根。

例 5　设 z_1，z_2 为任意复数，证明

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

证　由共轭复数的性质，有

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1.$$

而 $$z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=z_1\bar{z}_2+(\overline{z_1\bar{z}_2}=2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

所以 $$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

3．复数的几何表示、模与幅角

在平面上取定直角坐标系 Oxy，命坐标为 (x, y) 的点与复数 $z=x+iy$ 相对应，显然，对于每一个复数，平面上唯一的

一个点与之相应；反之，对于平面上的每一个点有唯一的复数与之相应。这就是说，复数的全体和平面上的点之间建立了一一对应关系。当平面上的点被用来代表复数时，我们就把这个平面叫做复数平面。复平面上 x 轴上的点代表实数，故 x 轴称实轴。y 轴上的点（除坐标原点）代表纯虚数 iy ($y\neq 0$)，故 y 轴也称为虚轴。以后我们对复数和平面上的点将不加区别，代表复数 z 的点，就称点 z。例如说点 $3+2i$ 也是指这个复数。按照表示复数的字母 z，w，…，把相应的复平面简称为 z 平面，w 平面……。

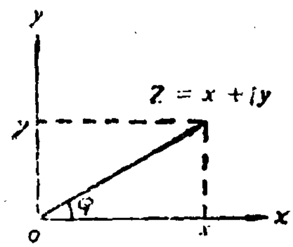

图 1.1

复数 z 也可以用平面上的一个自由向量来表示，这个自由向量在实轴和虚轴上的投影分别为 x 和 y，它的起点可以是平面上任意一点。如果起点是原点，则向量的终点即是平面上的点 z，点 z 的位置也可以用它的极坐标 r 和 φ 来确定（图 1.1）：

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x},$$

r 就是复数 z 的模，φ 称为复数 z 的辐角，记作

$$r=|z|,\qquad \varphi=\operatorname{Arg}z.$$

关于辐角有两点必需注意：

1）对于任一复数 $z\neq 0$ 有无穷多个辐角。我们约定，以下用 $\arg z$ 表示 $\operatorname{Arg}z$ 中的某一个确定的值，必要时将指出是那一个值。对于 $\operatorname{Arg}z$ 的任何一个确定值 $\arg z$，则

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2n\pi \text{（n 为任意整数）}$$

给出了 z 的全部辐角。又把落在 $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ 这个范围内的值称为辐角的主值，也记作 $\arg z$。显然，主值 $\arg z$ 是由 z 唯一确定的。例如，在正、负实轴上辐角的主值分别是 0 及 π；在上、下半虚轴上辐角的主值分别是 $\pi/2$ 及 $-\pi/2$；一般地根据辐角主值

范围的规定，可得

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & (z\ \text{在第一、四象限内}) \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & (z\ \text{在第二象限内}) \\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & (z\ \text{在第三象限内})\end{cases}$$

2）当 $z=0$ 时，辐角是无意义的。

知道了复数 $z(\neq 0)$ 的模 r 和辐角 φ 后，这个复数也就完全确定了。因

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

故
$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。$$

这就是复数的三角表示。例如：

$$-2i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)。$$

利用欧拉（Euler）公式：

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

还可以把复数写成指数形式

$$z=re^{i\varphi}。$$

例如：$-2i=2e^{-i\pi/2}$，$1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$，$i=e^{i\pi/2}$。

两个指数形式（或三角形式）的复数 $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ 及 $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ 相等的充要条件是

$$r_1=r_2,\qquad \varphi_1=\varphi_2+2k\pi$$

其中 k 为任意正负整数或零。而两个复数共轭的条件则可以用关系

$$|\bar{z}|=|z|,\qquad \arg\bar{z}=-\arg z\ (\arg z\neq\pi)$$

来表示。

现在说明复数四则运算的几何意义，先讲加减法的几何意义。两个复数相加减时，其实部和虚部分别相加减，因此代表复数的向量应按平行四边形法则或三角形法则相加减，如图 1.2 所示。

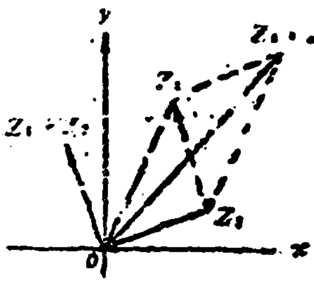

图 1.2

由图 1.1 及图 1.2，可以得到关于复数模的几个重要不等式

1）$|x|=|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$,

$|y|=|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$.

2）$|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|$.

3）$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$（三角形两边和≥第三边）.

4）$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$（三角形两边差≤第三边）.

在 3）及 4）的两个不等式中，等号当且只当 z_1 和 z_2 有相同的辐角才成立．这时三角形成为退化的（即三点共线）．这两个不等式还可以用代数方法证明。由前面例 5 的结果及 1）的第一个不等式，得

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\\&\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2|\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|\\&=(|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

所以 $$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

4）中的不等式可类似证明。

利用 3）的不等式及数学归纳法，读者可自行证明：

5）$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

再强调指出，$|z_1-z_2|$ 在几何上就是点 z_1 和 z_2 之间的距离．因此，对任意固定的复数 z_0 和实数 $\rho>0$，由条件

$$|z-z_0|=\rho$$

所确定的复数集合，就是以 z_0 为中心 ρ 为半径的圆周．集合 $\{z||z-z_0|<\rho\}$ 则表示上述圆周的内部（不包括圆周），集合

$\{z||z-z_0|>\rho\}$ 则是上述圆周的外部。

利用复数的指数形式作乘除法不仅比较简单，而且有明显的几何意义。设有两个复数

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1}=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$

$$z_2=r_2e^{i\varphi_2}=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

那末
$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\&\quad+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\\&=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.\end{aligned}$$

这就是说，两个复数的乘积是这样一个复数：它的模等于原两复数模的乘积，它的辐角等于原来两复数辐角之和。即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2. \tag{2}$$

由于第二个等式的两边各是无穷多个数，应这样来理解：对于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，一定有 $\mathrm{Arg}z_1$ 及 $\mathrm{Arg}z_2$ 的各一值与它相应，使得等式成立；反过来也是这样。

由上讨论得知，把表示 z_1 的那个向量转动一个角度 φ_2，并将长度"放大" r_2 倍，就得到代表 z_1z_2 的向量。应该注意，当 $r_2<1$ 时，所谓"放大"其实是缩小（图1.3）。例如，复数 $e^{i\theta}$ 的模为1，辐角为 θ。因此把向量 z 转动一个角就得到向量 $e^{i\theta}z$。特别地，由于 $i=e^{i\pi/2}$，所以向量 iz 是一个与向量 z 垂直，且与 z 长度相等的向量。

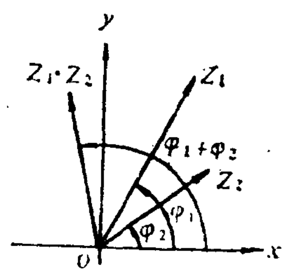

图 1.3

对于除法，同样有公式

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

即
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

对于后一个等式应与前面（2）中第二个等式一样理解。

下面举几个例题说明如何利用复数表示平面曲线。

例1 试将圆的方程

$$A(x^2+y^2)+mx+ny+C=0$$

改写成复数形式，其中 A，m，n，C 为实常数，且 $A\neq 0$。

解 令 $z=x+iy$，则有

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

及 $$x^2+y^2=z\bar{z}.$$

将以上三式代入圆的方程，得复数方程

$$Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0, \tag{3}$$

其中 $B=\dfrac{1}{2}(m+ni)$。

从这个例子可以看出，任何一条用隐式方程 $F(x,y)=0$ 表示的平面曲线，都可表示为复数方程

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0.$$

下面讨论方程（3）（设 A，C 为实常数，$A\neq 0$，B 是复数）．把它改写成

$$z\bar{z}+\frac{\bar{B}}{A}z+\frac{B}{A}\bar{z}+\frac{B\bar{B}}{A}=\frac{B\bar{B}}{A^2}-\frac{C}{A},$$

即 $$\left(z+\frac{B}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{B}}{A}\right)=\frac{|B|^2-AC}{A^2}.$$

亦即 $$\left|z+\frac{B}{A}\right|^2=\frac{|B|^2-AC}{A^2}.$$

由此可见，当 $|B|^2-AC>0$ 时，复方程（3）表示一个圆，其圆心为 $-\dfrac{B}{A}$，半径为 $\sqrt{\dfrac{|B|^2-AC}{A^2}}$；当 $|B|^2=AC$ 时，方程（3）表示一个点；当 $|B|^2-AC<0$ 时，方程（3）是一个虚