现代数学基础丛书

测度论基础

朱成熹 著

科学出版社

现代数学基础丛书

测度论基础

朱成熹 著

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书是概率统计专门化以及有关专业的基础读物．内容包括测度论的一些基础知识，特别是概率论、数理统计所常用的测度论基础知识．只要了解数学分析与实变函数论的知识就能阅读本书．第一章集和类；第二章 σ 域上测度的构造；第三章可测函数；第四章积分；第五章乘积测度空间；第六章广义测度．每章后都附有习题，以帮助理解本书内容．

读者对象为高等学校数学系高年级师生以及有关专业科技工作者．

现代数学基础丛书

测 度 论 基 础

朱成熹 著

责任编辑 刘嘉善

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1983 年 9 月第一版　开本：850×1168　1/32

1983 年 9 月第一次印刷　印张：7 1/16

印数：0001—10,600　字数：183,000

统一书号：13031·2367

本社书号：3243·13—1

定价：1.35 元

2008/12

前　言

随着科学技术的发展，研究随机现象的概率论、随机过程论、数理统计和信息论等学科日益深入到各个科学领域．柯尔莫哥罗夫公理系的提出使得测度论成为概率论和数理统计严格的理论基础．因此，不少高等院校都把测度论作为概率统计专门化的基础课列入教学计划．本书是在作者为南开大学数学系概率论专门化所写的“测度论”讲稿的基础上，逐步修改而成的．在选材上，既考虑到关于测度论方面的基础内容，更主要的是吸收了有关概率论，过程论，数理统计等方面所常用的测度论基础知识．同时为了自学的方便，本书力图简明易懂，自成体系，只要有高等数学和实变函数论的一些基本知识就能阅读．

我要向在编写本书过程中给我许多指导和帮助的王梓坤教授表示感谢．我还要感谢刘文、魏文元、欧阳克智和王文豪等同志，他们对本书的内容提供了宝贵的意见．由于作者水平有限，书中一定还存在缺点和错误，恳请批评指正．

朱成熹

1982.7.20

目　　录

第一章 集和类

§1.1 基本概念

集(或集合)是一种不可以精确定义的数学基本概念，所以我们只能给予一种描述性的说明. 所谓“集合”是指具有某种性质，并可以互相区别的事物(或元素)所汇集成的总体. 不含任何点的集，称为空集，常以 ϕ 表之. 今后我们所讨论的集合永远是指某一给定的集合 Ω 的子集合，Ω 本身和空集 ϕ 也看作 Ω 的子集合. 为简便计，我们把 Ω 叫做空间，它的子集合就叫做集，常以大写字母 A，B，C，…(或带有附标如 A_1，A'… 等)表之；Ω 的元素叫做点，以小写的 ω (或带有附标，如 ω_1，ω_2，…，ω' 等)表之；由集所构成的集合叫做集类(或集系)，简称类，以草体字如 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，$\mathscr{F}$ 等表之.

如果点 ω 在集 A 中，称 ω 属于 A，以 $\omega\in A$ 表之，反之，以 $\omega\bar{\in}A$ 记 ω 不在 A 内，或 ω 不属于 A. 如果对于任意点 $\omega\in A$ 都有 $\omega\in B$，就称集 A 包含在集 B 之中，以 $A\subset B$ 记之. 如果 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，以 $A=B$ 记之. 集和类之间类似于点和集之间，只有属于与不属于的逻辑关系，类和类之间类似于集与集之间，只有包含与不包含的逻辑关系. 点和类之间没有任何上述逻辑关系. 但注意点 ω 和单点集 $\{\omega\}$ 的区别，前者是点，后者是集，点 ω 与某一类 $\mathscr{A}$ 无上述逻辑关系，但 $\{\omega\}$ 与 $\mathscr{A}$ 就有属于与不属于的逻辑关系了. 任何集都包含空集.

为简单计，我们常以 $\{\omega:\pi(\omega)\}$ (或 $\{A:\pi(A)\}$) 表示满足某种关系 $\pi(\cdot)$ 的一切点 ω (对应地，集 A) 的全体. 例如，

(甲) $\Omega=R^1=(-\infty,+\infty)$，$\{\omega:0\leqslant\omega\leqslant1\}=[0,1]$ 区间集.

（乙）$\Omega = R^2$ 是实平面，$\{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ = 以原点为中心，1 为半径的圆集.

（丙）$\Omega = (-\infty, +\infty)$，$\{(a, b]: -\infty < a \leqslant b < +\infty\}$ 表 $(-\infty, +\infty)$ 上一切右闭左开的区间集全体所构成的集类.

集的基本运算

（I）交. 我们把下面集，称为集 A 与 B 的交集

$$A \cap B = \{\omega: \omega \in A \text{ 同时 } \omega \in B\},$$

有时也简记为 AB. 一般情形，对任意非空参数集 T，我们定义交集为

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{\omega: \omega \in A_t, \text{ 对每个 } t \in T \text{ 同时成立}\}.$$

（II）和与直和. 我们把集

$$A \cup B = \{\omega: \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

称为集 A 与 B 的和. 进而，若 $A \cap B = \phi$，则称 $A \cup B$ 为 A 与 B 的直和，以 $A + B$ 表之. 一般情况，定义和集为

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{\omega: \omega \text{ 至少属于某一个 } A_t, t \in T\}.$$

进而，若对任意 $t, s \in T$ 且 $t \neq s$ 时，$A_t \cap A_s = \phi$，这时我们记 $\bigcup_{t \in T} A_t$ 为 $\sum_{t \in T} A_t$.

（III）差与余. 我们把

$$A - B = \{\omega: \omega \in A \text{ 但 } \omega \bar{\in} B\}$$

称为集 A 与 B 之差集，特别 $A = \Omega$，称 $\Omega - B$ 为 B 的余集，以 B^c 记之.

易证下列关系式成立：

$$(A^c)^c = A, \tag{1.1}$$

$$A \subset B \Longleftrightarrow A^c \supset B^c, \tag{1.2}$$

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)^c = \bigcap_{t \in T} A_t^c, \tag{1.3}$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)^c = \bigcup_{t \in T} A_t^c, \tag{1.4}$$

$$A - B = AB^c, \tag{1.5}$$
$$A \cup B = A + (B - A) = A + A^c B.$$

一般情形有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n, \tag{1.6}$$

其中

$$B_n = A_0^c \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n (n \geqslant 1).$$
$$(A_0 = \phi)$$

(IV) 上极限. 我们把下面集，称为集列 $\{A_n: n \geqslant 1\}$ 的上极限集

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega: \omega \text{属于无穷多个 } A_n (n \geqslant 1)\}.$$

易证:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} A_K. \tag{1.7}$$

(V) 下极限. 我们把集

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega: \omega \text{ 至多不属于有穷多个 } A_n (n \geqslant 1)\}$$

称为集列 $\{A_n: n \geqslant 1\}$ 的下极限集. 易证:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{K=n}^{\infty} A_K, \tag{1.8}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n. \tag{1.9}$$

(1.1)—(1.9) 式可根据定义证之，下证 (1.7) 式成立，其余证法类似. 由于

$$\omega \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Longleftrightarrow \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n (n \geqslant 1)$$

$$\Longleftrightarrow \text{对每个 } n \geqslant 1, \text{存在一个 } K_n(\omega) \geqslant n$$

使得 $\omega \in A_{K_n(\omega)}$

$$\Longleftrightarrow \text{对每个 } n \geqslant 1, \ \omega \in \bigcup_{K=n}^{\infty} A_K$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} A_K.$$

从而证明了 (1.7) 式.

(VI) 极限. 如果

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n,$$

则称集列 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ 的极限集存在,并以 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表此极限集.

定义 1.1 若集列 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ 具有性质: 对每个 $n \geqslant 1$, $A_n \subset A_{n+1}$ (或 $A_{n+1} \subset A_n$), 则称 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ 是不减的(对应地, 不增的),简记为 $A_n \uparrow$ (对应地, $A_n \downarrow$). 不减的或不增的集列,统称为单调集列.

引理 1.1 单调集列的极限存在,且

(i) 若 $A_n \uparrow$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,

(ii) 若 $A_n \downarrow$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

证 (i) 由 $A_n \uparrow$, 即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots,$$

故 $\bigcap\limits_{K=n}^{\infty} A_K = A_n$, 所以

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{K=n}^{\infty} A_K = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} A_K = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n,$$

再由 (1.9) 可得

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \supset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在且等于 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 类似可证 (ii). 证完.

由于集类是集的集合, 因而我们可以定义集类的上述各种运算. 例如,集类 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 的"和"运算,"交"运算为

$$\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2 = \{A : A \in \mathscr{A}_1 \text{或} A \in \mathscr{A}_2\},$$
$$\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \{A : A \in \mathscr{A}_1 \text{同时} A \in \mathscr{A}_2\},$$
等等.

§ 1.2 几个重要的集类

定义 1.2 (i) 若非空集类 $\mathscr{F}$ 满足:

(I) 对"差"运算封闭: 若 $A, B \in \mathscr{F}$, 则 $A - B \in \mathscr{F}$,

(II) 对"和"运算封闭: 若 $A, B \in \mathscr{F}$, 则 $A \cup B \in \mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ 是环.

(ii) 若 $\mathscr{F}$ 是环,并且空间 $\Omega \in \mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ 是域(或代数).

(iii) 若 $\mathscr{F}$ 是环,并且存在一个不相交列 $\{G_n : n \geqslant 1\} \subset \mathscr{F}$, 使得 $\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$ (不要求一定有 $\Omega \in \mathscr{F}$), 则称 $\mathscr{F}$ 为半域.

显然, $\mathscr{F}$ 是域 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F}$ 是半域 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F}$ 是环,但反之不真.

引理 1.2 若 $\mathscr{F}$ 是环,则必 $\phi \in \mathscr{F}$, 并且对"有限交"及"有限和"运算也封闭.

证 由 $\mathscr{F}$ 的非空性知, 存在一个集 $A \in \mathscr{F}$, 根据对"差"运算的封闭性可得 $\phi = A - A \in \mathscr{F}$; $\mathscr{F}$ 对"交"的封闭性, 可由关系式

$$A \cap B = (A \cup B) - [(A - B) + (B - A)] \qquad (1.12)$$

及 $\mathscr{F}$ 对"和"与"差"运算的封闭性而得. 对"有限和"及"有限交"的封闭性,可由对"和"及"交"的封闭性并应用归纳法得到. 证完.

引理 1.3 $\mathscr{F}$ 是域等价于 $\mathscr{F}$ 非空且对"余"及"交"(或"和")运算封闭.

证 设 $\mathscr{F}$ 是域,则 $\Omega \in \mathscr{F}$,对于任意 $A \in \mathscr{F}$,由 $\mathscr{F}$ 对"差"封闭,故 $A^c = \Omega - A \in \mathscr{F}$, 即 $\mathscr{F}$ 对"余"运算封闭. 再由引理 1.2 知 $\mathscr{F}$ 对"交"运算也封闭. 反之,设 $\mathscr{F}$ 非空 且对"余"及"交"封闭,则由 (1.5) 及 (1.4) 知: 对任意 $A, B \in \mathscr{F}$ 有

$$A - B = A \cap B^c \in \mathscr{F},$$

$$A\cup B=(A^c)^c\cup(B^c)^c=(A^c\cap B^c)^c\in\mathscr{F}.$$

故知 $\mathscr{F}$ 是环. 利用引理 1.2 可得 $\Omega=\phi^c\in\mathscr{F}$. 所以 $\mathscr{F}$ 是域. 证完.

定义 1.3 若非空集类 $\mathscr{F}$，满足:

(I′) 对“余”运算封闭: 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $A^c\in\mathscr{F}$；

(II′) 对“可数和”运算封闭: 若 $\{A_n:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F},$$

则称 $\mathscr{F}$ 是 σ 域(或称 σ 代数).

若 $\mathscr{F}$ 满足 (II′) 及定义 1.2 中条件 (I)，则称 $\mathscr{F}$ 为 σ 环.

易证，$\mathscr{F}$ 是 σ 域的充要条件是，$\mathscr{F}$ 是 σ 环且 $\Omega\in\mathscr{F}$.

定理 1.1 设 $\mathscr{F}$ 是域，则下述五种可数集运算的封闭性是相互等价的:

(i) “可数和”运算封闭;

(ii) “可数交”运算封闭;

(iii) “可数直和”运算封闭;

(iv) “不减极限”运算封闭;

(v) “不增极限”运算封闭.

证 设 $\{A_n:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}$，由 $\mathscr{F}$ 是域，故 $\{A_n^c:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}$ 且 $\{B_n:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}$，其中

$$B_n=A_0^c\cap A_1^c\cap\cdots\cap A_{n-1}^c\cap A_n\quad(n\geqslant 1),\ A_0=\phi.$$

若 (i) 成立，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c\in\mathscr{F}$，再由 $\mathscr{F}$ 是域. 故 $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)^c\in\mathscr{F}$，利用 (1.3)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)^c\in\mathscr{F}$$

即 (ii) 成立. 反之，若 (ii) 成立，利用 (1.4) 可得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)^c\in\mathscr{F},$$

即 (i) 成立. 从而 (i) 与 (ii) 等价.

(i) 与 (iii) 的等价性，可由 (1.6) 式 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ 及 $\{B_n: n \geqslant 1\} \subset \mathscr{F}$ 得证.

若 (iv) 成立，由引理 1.2 知不减集列

$$\left\{\bigcup_{K=1}^{n} A_K : n \geqslant 1\right\} \subset \mathscr{F},$$

根据引理 1.1，当 $n \to \infty$ 时

$$\bigcup_{K=1}^{n} A_K \uparrow \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \in \mathscr{F},$$

即 (i) 成立. 反之，若 (i) 成立，设 $\{A_n; n \geqslant 1\}$ 是不减集列由引理 1.1 当 $n \to \infty$ 时

$$A_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

故 (iv) 成立. 从而 (i) 与 (iv) 等价. 类似 (i) 与 (iv) 的等价性证明，可证 (ii) 与 (v) 的等价性. 证完.

由定理 1.1 可知，当我们要验证某集类 $\mathscr{F}$ 是否是 σ 域时？只须验证 $\mathscr{F}$ 是否是域，同时还须验证定理中所述五种可数集运算之一是否封闭？其中 (iii) 或 (iv) 或 (v) 较之 (i) 和 (ii) 易于验证. 另一种情况，当我们已知 $\mathscr{F}$ 是 σ 域时. 则 $\mathscr{F}$ 对“余”，“差”及 (i)—(v) 等集运算的封闭性都可应用.

例 1　$\mathscr{F} = \{A: A \subset \Omega\}$ (Ω 的一切子集全体)是 σ 域. 易见，以 Ω 为空间的任何其他的 σ 域都包含在它之中. 因而它是空间 Ω 上“最大”(集数最多)的 σ 域. 常以 $S(\Omega)$ 表之.

例 2　$\mathscr{F} = \{\Omega, \phi\}$ 是 σ 域. 由引理 1.2 知，任何域(从而任何 σ 域)都含有 Ω 和 ϕ. 故 $\mathscr{F} = \{\Omega, \phi\}$ 是以 Ω 为空间的“最小”(集数最少)的 σ 域和域.

例 3　$\Omega = (-\infty, +\infty)$

$$\mathscr{F} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i]: -\infty < a_i \leqslant b_i \leqslant a_{i+1} \leqslant b_{i+1} < +\infty;\right.$$

$$i=1,2,\cdots,n-1,\ n>1\Big\}$$

是半域而不是域，更不是σ域.

σ域是个重要的概念，它是测度论的基础之一，但它的结构一般是很复杂的，在应用中很不方便. 下面关于λ类及π类的概念和定理对我们掌握σ域，特别是，对我们掌握某些集类$\mathscr{C}$的最小σ域（将在下节谈到）颇有帮助.

定义 1.4 非空集类$\mathscr{C}$

(i) 若它对"交"运算封闭，则称$\mathscr{C}$为π类

(ii) 若它对"单调极限"运算封闭，则称$\mathscr{C}$为单调类.

例 4 $\mathscr{C}=\{(a,b]:-\infty<a\leqslant b<+\infty\}$是$\pi$类而不是单调类. 这是因为任意$-\infty<a_i\leqslant b_i<+\infty\ (i=1,2)$有

$$(a_1,b_1]\cap(a_2,b_2]=\begin{cases}\phi, & \text{当 } b_1\leqslant a_2 \text{ 或 } b_2\leqslant a_1 \text{ 时},\\ (a^*,b^*], & \text{其他},\end{cases}$$

其中$a^*=\max(a_1,a_2)$，$b^*=\min(b_1,b_2)$.

显然，$\phi=(a,a]\in\mathscr{C}$所以$(a_1,b_1]\cap(a_2,b_2]\in\mathscr{C}$，故知$\mathscr{C}$是$\pi$类. 但

$$\left(0,1-\frac{1}{n}\right]\uparrow(0,1)\bar{\in}\mathscr{C}.$$

故知$\mathscr{C}$不是单调类.

根据定理 1.1 可导得：$\mathscr{F}$是σ域的充要条件是$\mathscr{F}$既是单调类，又是域（简称单调域）. 对σ环亦有类似结论.

定理 1.2 $\mathscr{F}$是σ环的充要条件为$\mathscr{F}$是环同时又是单调类（简言之为单调环）.

证 若$\mathscr{F}$是单调环，设

$$\{A_n:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}.$$

由环的有限加性知

$$\left\{\bigcup_{K=1}^{n}A_K:n\geqslant 1\right\}\subset\mathscr{F},$$

而

$$\bigcup_{K=1}^{n} A_K \uparrow \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K.$$

再由单调类的定义知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F},$$

所以 $\mathscr{F}$ 是 σ 环。

反之，设

$$\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \mathscr{F} \text{ 且 } A_n \uparrow A,$$

由引理 1.1 知

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

若 $\mathscr{F}$ 是 σ 环，则对"可数和"运算封闭，故

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

所以 $\mathscr{F}$ 对单调"不减极限"运算封闭.

设 $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \mathscr{F}$ 且 $A_n \downarrow A$，则 $A_1 - A_n \uparrow A_1 - A$，由 $\mathscr{F}$ 是 σ 环，对"差"运算封闭，故

$$\{A_1 - A_n : n \geqslant 1\} \subset \mathscr{F}.$$

由前证知 $A_1 - A \in \mathscr{F}$，从而由 $A_1 \in \mathscr{F}$ 及对"差"封闭可得

$$A = A_1 - (A_1 - A) \in \mathscr{F}.$$

故 $\mathscr{F}$ 对单调"不增极限"运算封闭.

另一方面，由"可数和"运算的封闭性可导得"有限和"运算的封闭性. 因此，$\mathscr{F}$ 是 σ 环，则 $\mathscr{F}$ 必是环.

综上所述，我们证明了 σ 环必是单调环. 证完.

定义 1.5 若非空集类 $\mathscr{F}$ 满足条件:

(λ_1) 空间 $\Omega \in \mathscr{F}$;

(λ_2) "真差" 封闭: 若 $\{A, B\} \subset \mathscr{F}$ 且 $A \subset B$，则 $A - B \in \mathscr{F}$;

(λ_3) "不减极限" 封闭: 若 $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \mathscr{F}$ 且 $A_n \uparrow A$，则 $A \in \mathscr{F}$;

则称 $\mathscr{F}$ 为 λ 类.

定理 1.3 $\mathscr{F}$ 是 σ 域的充要条件为 $\mathscr{F}$ 既是 λ 类，又是 π 类.

证 若 $\mathscr{F}$ 是 σ 域，则 $\mathscr{F}$ 是域并且 $\mathscr{F}$ 对"可数和"运算封闭，根据定理 1.1 得知 $\mathscr{F}$ 既是 λ 类，又是 π 类.

反之，若 $\mathscr{F}$ 是 λ 类，同时又是 π 类，则由 (λ_1)，(λ_2) 及 $A\subset\Omega$ 可得：对任意 $A\in\mathscr{F}$ 都有

$$A^c=\Omega-A\in\mathscr{F},$$

故 $\mathscr{F}$ 对"余"运算封闭. 又由 $\mathscr{F}$ 是 π 类，所以 $\mathscr{F}$ 对"交"运算封闭，根据引理 1.3 得知 $\mathscr{F}$ 是域，再由 $\mathscr{F}$ 满足 (λ_3) 及定理 1.1 可知 $\mathscr{F}$ 对"可数和"运算封闭，从而证明了 $\mathscr{F}$ 是 σ 域. 证完.

定理 1.4 若 $\mathscr{F}$ 是 λ 类，则 $\mathscr{F}$ 必是单调类.

证 由 (λ_3) 知 $\mathscr{F}$ 对单调"不减极限"运算封闭，故只须证 $\mathscr{F}$ 对单调"不增极限"运算封闭，即可得 $\mathscr{F}$ 是单调类. 为此，设

$$\{A_n:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F} \text{ 且 } A_n\downarrow A.$$

则 $A_1-A_n\uparrow A_1-A$，根据 (λ_2) 及 $A_1\supset A_n(n\geqslant 1)$ 可知

$$\{A_1-A_n:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}.$$

再利用 (λ_3) 即得

$$A_1-A\in\mathscr{F},$$

而 $A_1-A\subset A_1$ 且 $A_1\in\mathscr{F}$. 由 (λ_2) 从而得到

$$A=A_1-(A_1-A)\in\mathscr{F}.$$

这就证明了 $\mathscr{F}$ 对单调"不增极限"运算封闭.

系 1 若 $\mathscr{F}$ 满足定义 1.5 中条件 (λ_1) 及 (λ_2)，则条件 (λ_3) 等价于 (λ_4) 对单调"不增极限"运算封闭.

证 根据定理知，由 (λ_3) 可导得 (λ_4).

反之，设

$$\{A_n:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F} \text{ 且 } A_n\uparrow A.$$

故 $A_n^c\downarrow A^c$，但由 (λ_1) 及 (λ_2) 知

$$\{A_n^c:n\geqslant 1\}\subset\mathscr{F},$$

若 (λ_4) 成立，则 $A^c\in\mathscr{F}$. 从而 $A=(A^c)^c\in\mathscr{F}$，这就证明了 (λ_3) 成立.

系 2 $\mathscr{F}$ 是 λ 类的充要条件是 $\mathscr{F}$ 是单调类，同时满足条件 (λ_1) 及 (λ_2).

证 由定理显然.

下面我们对本节引进的几个重要集类以及它们的相互关系作一个小结，以简图示意如下:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{域} \arrow[r, Rightarrow] & \text{半域} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & & & \text{环} \arrow[r, Rightarrow] & \pi\text{类} \\
\sigma\text{域} \arrow[uur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \sigma \arrow[r, phantom] & \text{环} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & & & \text{单调类} & \\
 & \lambda \arrow[r, phantom] & \text{类} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

此关系反之不真. 并列者(例如，半域、σ 环、λ 类)也不能相互导得. 这一切希读者构造反例说明之. 但有下面等价关系成立:

$$\sigma\text{域} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma\text{环}+\text{空间} \\ \lambda\text{类}+\pi\text{类} \\ \text{域}+\text{单调类} \end{cases}$$

$$\sigma\text{环} \Longleftrightarrow \text{环}+\text{单调类}.$$

§ 1.3 最小 σ 域，λ-π 类方法

引理 1.4 设 T 是非空的参数集，S 表某一集运算，如果集类 $\mathscr{A}_t (t \in T)$ 对每个 $t \in T$ 都对 S 运算封闭，则类 $\bigcap\limits_{t \in T} \mathscr{A}_t$ 也对 S 运算封闭.

证 因集的基本运算只有“$\cup$”,“$\cap$”,“$\subset$”三种，其它运算都可经此“组合”而成，故只须对此三种运算证明即可. 只验证 S 运算是“可数和”运算的情况，其余读者自己验证之. 设对每个 $t \in T$，$\mathscr{A}_t$ 对“可数和”封闭且

$$\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \bigcap_{t \in T} \mathscr{A}_t,$$

要证