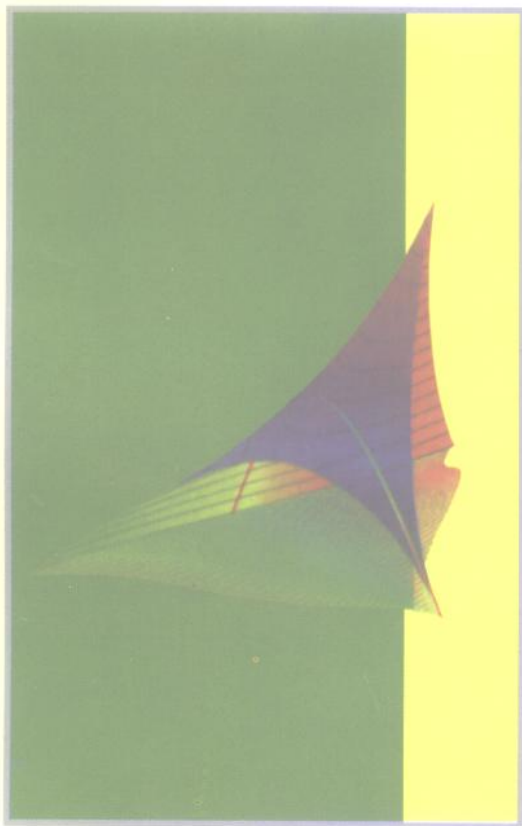


南开大学数学教学丛书

# 泛函分析

刘炳初 编著



科学出版社

南开大学数学教学丛书

# 泛函分析

刘炳初 编著

科学出版社

1998

## 内 容 简 介

本书是根据作者多年来在南开大学数学系讲授泛函分析课程的讲义基础上写成的。本书共分六章,第一章,距离空间与拓扑空间,第二章,赋范线性空间,第三章,有界线性算子,第四章,Hilbert 空间,第五章,拓扑线性空间,第六章,Banach 代数。本书可作为泛函分析的一本入门教材。每章未附有一定的习题。

本书可供高校数学系师生使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/刘炳初编著. -北京:科学出版社,1998.8

(南开大学数学教学丛书)

ISBN 7-03-006485-2

I. 泛… II. 刘… III. 泛函分析 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 29556 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

北 京 双 青 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1998年10月第一版 开本:850×1168 1/32

1998年10月第一次印刷 印张:6 3/4

印数:1—3 000 字数:175 000

定 价: 9.80 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

## 序

海内外华夏炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国,也就是“实现中国数学的平等和独立”<sup>〔1〕</sup>. 平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的,要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生. 这批人不在多,而在精,要层次高,也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

80年代中期,国家采纳了陈省身先生的几个建议. 建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生,需要建立数学专业的试点班. 经过胡国定先生等的努力,1986年在南开大学建立了数学专业的试点班. 这些作法取得了成功,并在基础学科的教学有了推广. 1990年在全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”. 其后南开大学数学专业成为基地之一. 从1986年到现在的10余年中南开数学专业是有成绩的,例如他们四次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一,一次团体第三. 在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖. 毕业生中的百分之八十继续攻读研究生,其中许多人取得了很好的成绩.

当然,取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开,是与国内外同行们的支持与帮助分不开的. 如杨忠道,王叔平,许以超,虞言林,李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订,或到南开任教等等. 有了这些指导、帮助与支持,南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验,并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材,编著者们长期在南开数学专业任教,不断地把自己的心得体会揉和到基础知识和

---

〔1〕 陈省身:《在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话》

基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材。所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的一点心血。这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力。

我们要感谢中国科学出版社主动提出将这套教材出版。这对编著者是件大好事。编著者虽然尽了很大努力，但一则由于编著者的水平所限，二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中，因此这套教材中缺欠和不足肯定存在。我们诚挚希望各位同行不吝指正，从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长，进而扬长避短，改进我们的教学。同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的教学经验以供他们参考，或许有益于他们的工作。

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们，同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助。办好南开的数学专业，办好所有学校的数学专业，把中国数学搞上去，使中国成为数学大国是我们的共同愿望！这个愿望一定能实现！

编著者

于南开大学

1998年6月

# 目 录

序 .....	(iii)
<b>第一章 距离空间与拓扑空间</b> .....	(1)
§ 1 距离空间的基本概念 .....	(1)
§ 2 距离空间中的点集 .....	(8)
§ 3 完备距离空间 .....	(13)
§ 4 压缩映射原理 .....	(19)
§ 5 拓扑空间的基本概念 .....	(25)
§ 6 紧性 .....	(33)
§ 7 距离空间的紧性 .....	(35)
习题一 .....	(41)
<b>第二章 赋范线性空间</b> .....	(45)
§ 1 赋范空间的基本概念 .....	(45)
§ 2 空间 $L^p (p \geq 1)$ .....	(52)
§ 3 赋范空间进一步的性质 .....	(59)
§ 4 有穷维赋范空间 .....	(65)
习题二 .....	(68)
<b>第三章 有界线性算子</b> .....	(72)
§ 1 有界线性算子与有界线性泛函 .....	(72)
§ 2 Banach-Steinhaus 定理及其某些应用 .....	(79)
§ 3 开映射定理与闭图像定理 .....	(85)
§ 4 Hahn-Banach 定理及其推论 .....	(94)
§ 5 某些赋范空间上有界线性泛函的一般形式 .....	(101)
§ 6 自反性, 弱收敛 .....	(109)
§ 7 紧算子 .....	(116)
习题三 .....	(122)
<b>第四章 Hilbert 空间</b> .....	(127)

§ 1	内积空间的基本性质, 例	(127)
§ 2	正交性, 正交系	(133)
§ 3	Riesz 表示定理, Hilbert 空间的共轭空间	(144)
§ 4	Hilbert 空间中的自共轭紧算子	(149)
	习题四	(151)
<b>第五章</b>	<b>拓扑线性空间</b>	(154)
§ 1	拓扑线性空间的基本性质	(154)
§ 2	半范数, 局部凸空间	(166)
§ 3	弱拓扑	(175)
	习题五	(185)
<b>第六章</b>	<b>Banach 代数</b>	(189)
§ 1	定义与例	(189)
§ 2	正则点与谱	(191)
§ 3	极大理想与商代数	(195)
§ 4	交换 Banach 代数的基本定理	(198)
	习题六	(205)
	参考文献	(207)
	后记	(208)

# 第一章 距离空间与拓扑空间

## § 1 距离空间的基本概念

### 1. 定义与例

极限运算是数学分析中最重要的运算之一,我们来回忆分析中的极限概念: $\{x_n\}$ 是一个实数列, $x$ 是一个实数,如果对任意给定的 $\epsilon > 0$ ,存在自然数 $N$ ,当 $n > N$ 时, $|x_n - x| < \epsilon$ ,我们就说当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{x_n\}$ 以 $x$ 为极限. 在上面的定义中, $|x_n - x|$ 表示直线 $\mathbb{R}$ 上的点 $x_n$ 与点 $x$ 之间的“距离”,因此它可以重新叙述为:对任意给定的 $\epsilon > 0$ ,存在自然数 $N$ ,当 $n > N$ 时, $x_n$ 与 $x$ 之间的“距离”小于 $\epsilon$ . 类似地,平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时以点 $x = (\xi, \eta)$ 为极限可以定义为:对于充分大的自然数 $n$ ,点 $x_n$ 与点 $x$ 的“距离”可以任意小,不过这里点 $x_n = (\xi_n, \eta_n)$ 与点 $x = (\xi, \eta)$ 之间的距

离为 $\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2}$ .

从上面的例中可以看出,不论是 $\mathbb{R}$ 中的点还是 $\mathbb{R}^2$ 中的点,甚至任意集合中的点,只要在其中定义了距离,我们就可以用它来衡量两点的接近程度,就可以在其中定义极限. 事实上,在分析中当我们考虑用多项式序列一致逼近区间 $[a, b]$ 上的连续函数时,就曾用 $\max_{0 \leq t \leq 1} |p(t) - x(t)|$ 来表示多项式 $p(t)$ 与函数 $x(t)$ 之间的“距离”. 我们把“距离”最基本的性质抽象化就得到距离空间的概念.

**定义** 设 $X$ 是任一非空集,对 $X$ 中任意两点 $x, y$ 有一实数 $d(x, y)$ 与之对应且满足

- 1)  $d(x, y) \geq 0$ ; 且 $d(x, y) = 0$ , 当且仅当 $x = y$ ;
- 2)  $d(y, x) = d(x, y)$ , (对称性);



3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ . (三角形不等式).

称  $d(x, y)$  为  $X$  中的一个距离, 定义了距离  $d$  的集  $X$  称为一个距离空间, 记为  $(X, d)$ , 在不引起混乱的情形下简记为  $X$ .

下面给出距离空间的一些例子, 其中有些在分析中起着很重要的作用.

例 1 设  $X$  是  $n$  元实数组全体, 定义

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2},$$

其中,  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ .

我们证明  $(X, d)$  是一个距离空间, 为此我们需要验证  $d$  满足距离的三条公理. 1), 2) 显然成立, 关键是证明三角形不等式成立, 我们先证明以下 Cauchy 不等式: 对任意实数  $a_k, b_k (k=1, \dots, n)$ , 我们有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

事实上, 任取实数  $\lambda$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + \lambda b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^n a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

上面等式左端是  $\lambda$  的一个二次三项式, 于是它的判别式不大于 0, 即 Cauchy 不等式成立.

现在证明三角形不等式成立, 由 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left[ \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= \left[ \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

设  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n); z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  是任意三点, 在上不等式中命  $a_k = (\xi_k - \zeta_k), b_k = (\zeta_k - \eta_k)$ , 则

$$\left[ \sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \sum_{k=1}^n (\xi_k - \zeta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \sum_{k=1}^n (\zeta_k - \eta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

即

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

所以  $(X, d)$  是一个距离空间, 以后把这个空间简记为  $\mathbb{R}$ ; 本节开头提到的  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$  都是  $\mathbb{R}$  的特殊情形.

**例 2** 考虑区间  $[a, b]$  上所有连续函数集, 设  $x(t), y(t)$  是  $[a, b]$  上任意两个连续函数, 定义

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|,$$

由于  $x(t) - y(t)$  也是  $[a, b]$  上的连续函数, 因此有最大值. 距离公理 1), 2) 显然成立. 设  $x(t), y(t), z(t)$  是  $[a, b]$  上任意三个连续函数, 则  $\forall t \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| \\ &= d(x, z) + d(z, y), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \\ &\leq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

$[a, b]$  上的连续函数全体赋以上述距离  $d$  是一个距离空间, 记它为  $C[a, b]$ .

**例 3** 空间  $s$ .

考虑实数列  $\{\xi_k\}$  的全体. 设  $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\}$  是两个实数列, 定义

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

上式右边的  $\frac{1}{2^k}$  是一个收敛因子, 保证级数收敛, 距离公理的 1), 2) 显然成立, 为证三角形不等式, 考虑  $(0, \infty)$  上的函数

$$\psi(t) = \frac{t}{1+t},$$

易见  $\psi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ , 所以  $\psi(t)$  是单增的. 由此, 设  $x = \{\xi_k\}$ ,  $y = \{\eta_k\}$ ,  $z = \{\zeta_k\}$ . 由于

$$|\xi_k - \eta_k| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|,$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &= \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &\quad + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}. \end{aligned}$$

在上不等式两边乘  $\frac{1}{2^k}$  并求和, 则得

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

这个距离空间记为  $S$ .

#### 例 4 空间 $S$ .

与例 3 类似, 设  $E \subset \mathbb{R}$  是一个 Lebesgue 可测集,  $0 < m(E) < \infty$ , 考虑  $E$  上几乎处处有穷的可测函数全体, 其中凡几乎处处相等的函数看成是同一元. 定义

$$d(x, y) = \int_E \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt.$$

与例 3 的证明类似, 这是一个距离空间, 把这个空间记为  $S$ .

通过以上几个例子我们看到, 为了验证一个赋以函数  $d$  的非空集是一个距离空间, 只需证明  $d$  满足距离的三条公理, 通常比较困难的是证明三角形不等式. 一个距离空间可以是任意一个非空集, 只要其中定义了满足距离三条公理的函数  $d$  即可. 事实上,

任意非空集都可以赋以一个距离使其成为一个距离空间.

**例 5 离散空间  $D$ .**

设  $X$  是任一非空集, 在  $X$  中定义  $d$  如下:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

不难验证  $d$  是一个距离, 从而  $(X, d)$  是一个距离空间, 称这个空间为离散空间, 用  $D$  表示.

这样看来我们可以随意地定义距离, 特别地, 距离不是唯一的, 即使同一集也可以引进不同的距离, 从而得到不同的距离空间. 例如在  $[a, b]$  区间上所有连续函数集中, 如果我们定义

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

不难验证  $d_1$  是一个距离, 于是我们得到一个新的距离空间, 我们认为这个空间与例 2 中的空间  $C[a, b]$  是两个不同的距离空间. 实际上, 距离的定义是任意的, 但是在每一个具体场合下, 选择这样或那样的距离总是依据所研究的极限过程的需要引进的, 关于这一点下面我们还要继续讨论.

**2. 收敛性**

在距离空间中, 我们可以像在数学分析中一样定义极限的概念.

**定义** 设  $\{x_n\}$  是距离空间  $(X, d)$  中的一个点列,  $x_0$  是  $X$  中一点, 如果当  $n \rightarrow \infty$  时,  $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$ , 则称当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\{x_n\}$  以  $x_0$  为极限, 或当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\{x_n\}$  收敛于  $x_0$ . 记为

$$x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty),$$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

下面我们证明有关极限的两个简单性质.

**定理 1.1** 设  $\{x_n\}$  是距离空间  $X$  中的收敛点列, 则

- 1)  $\{x_n\}$  的极限是唯一的;
- 2) 如果  $x_0$  是  $\{x_n\}$  的极限, 那么  $\{x_n\}$  的任一子列  $\{x_{n_k}\}$  必收敛且

以  $x_0$  为极限.

证. 1) 设  $x_n \rightarrow x_0, x_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$ , 则对  $\forall \epsilon > 0$ , 存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}; d(x_n, y_0) < \frac{\epsilon}{2},$$

于是由三角形不等式, 当  $n > N$  时

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) &\leq d(x_n, x_0) + d(x_n, y_0) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

由于  $\epsilon$  是任意的, 所以  $d(x_0, y_0) = 0, x_0 = y_0$ .

2) 设  $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $d(x_n, x_0) < \epsilon$ , 选取  $K$ , 使得当  $k > K$  时  $n_k > N$ , 则当  $k > K$  时,  $d(x_{n_k}, x_0) < \epsilon$ , 即  $x_{n_k} \rightarrow x_0 (k \rightarrow \infty)$ . 证完

**定理 1.2** 设  $(X, d)$  是距离空间, 则

$$\begin{aligned} &|d(x, y) - d(x_1, y_1)| \\ &\leq d(x, x_1) + d(y, y_1), \quad (x, y, x_1, y_1, \in X). \end{aligned}$$

证. 由三角形不等式

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_1) + d(x_1, y) \\ &\leq d(x, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y), \end{aligned}$$

由于  $x, y$  与  $x_1, y_1$  的地位是对称的, 所以

$$|d(x, y) - d(x_1, y_1)| \leq d(x, x_1) + d(y, y_1).$$

证完

由定理 1.2 可以看出, 在距离空间中, 当  $x_n \rightarrow x_0$  及  $y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$  时, 必有  $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x_0, y_0) (n \rightarrow \infty)$ .

我们看一看前面列举的几个具体的距离空间中收敛性的涵义.

在空间  $\mathbb{R}^n$  中, 易见空间的收敛就是按坐标收敛.

在  $C[a, b]$  中, 如果  $d(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 即

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

于是对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $\forall t \in [a, b]$ , 有

$$|x_n(t) - x_0(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| < \epsilon.$$

即函数列  $\{x_n(t)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于函数  $x_0(t)$ . 反之, 如果  $\{x_n(t)\}$  一致收敛于  $x_0(t)$ , 则  $d(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ .

总之,  $C[a, b]$  的收敛是函数列在  $[a, b]$  上的一致收敛, 大家都知道这种收敛在分析中有重要的作用.

我们证明空间  $S$  中的收敛等价于函数列依测度收敛.

设  $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ , 则对于任意的  $\sigma > 0$ , 由于

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &= \int_E \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} dt \\ &\geq \int_{\{t \in E, |x_n(t) - x_0(t)| \geq \sigma\}} \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} dt \\ &\geq \frac{\sigma}{1 + \sigma} m\{t \in E: |x_n(t) - x_0(t)| \geq \sigma\}. \end{aligned}$$

所以, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $m\{t \in E: |x_n(t) - x_0(t)| \geq \sigma\} \rightarrow 0$ , 即  $\{x_n\}$  在  $E$  上依测度收敛于  $x_0(t)$ .

反之, 设  $\{x_n(t)\}$  在  $E$  上依测度收敛于  $x_0(t)$ . 则对  $\forall \epsilon > 0$  及  $\forall \sigma > 0$ , 由于

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &= \int_E \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} dt \\ &\leq \frac{\sigma}{1 + \sigma} mE + \int_{\{t \in E, |x_n(t) - x_0(t)| \geq \sigma\}} \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} dt \\ &\leq \frac{\sigma}{1 + \sigma} mE + m\{t \in E: |x_n(t) - x_0(t)| \geq \sigma\}, \end{aligned}$$

先选取  $\sigma$ , 使  $\frac{\sigma}{1 + \sigma} mE < \frac{\epsilon}{2}$ , 再对上述  $\sigma$  选取自然数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $m\{t \in E: |x_n(t) - x_0(t)| \geq \sigma\} < \frac{\epsilon}{2}$ . 于是当  $n > N$  时,

$$d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

即  $d(x_n, x_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

最后,在离散空间  $D$  中,  $\{x_n\}$  收敛于  $x_0$ , 当且仅当, 从某一下标开始  $\{x_n\}$  为常驻列  $\{x_0\}$ .

事实上, 如果  $x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty)$ , 取  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , 则存在  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $d(x_n, x_0) < \frac{1}{2}$ , 由此当  $n \geq N$  时,  $x_n = x_0$ , 反之显然.

### 3. 距离空间的连续映射, 等距

设  $(X, d), (X_1, d_1)$  是距离空间,  $f: X \rightarrow X_1$  是一个映射,  $x_0 \in X$ , 如果  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $d(x, x_0) \leq \delta$  的一切  $x \in X$ ,

$$d_1(f(x), f(x_0)) < \epsilon,$$

则称映射  $f$  在  $x_0$  点连续, 如果  $f$  在  $X$  上的每一点连续, 则称  $f$  在  $X$  上连续.

从上定义可以看出, 距离空间的连续映射是分析中大家熟知的连续函数的推广.

如果对任意  $x, y \in X$ ,

$$d_1(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

则称  $f$  是一个等距映射.

一个等距映射一定是一个连续映射, 并且是一个 1-1 映射, 但不一定是映上的.

对于两个距离空间  $(X, d), (X_1, d_1)$ , 如果存在一个映上的等距映射  $f: X \rightarrow X_1$ , 则称  $(X, d)$  与  $(X_1, d_1)$  等距.

从距离空间的观点来看, 两个等距的距离空间没有本质的差别, 因此, 今后我们将把两个等距的距离空间看成是同一空间.

## § 2 距离空间中的点集

### 1. 开集与闭集

设  $(X, d)$  是一个距离空间, 记

$$S(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\},$$

其中  $r > 0$  是一个实数, 称  $S(x_0, r)$ , 为以  $x_0$  为中心,  $r$  为半径的开

球.

对于空间  $\mathbb{R}$ , 开球  $S(x_0, r)$  是直线上一个以  $x_0$  为中心,  $r$  为半径的开区间, 在空间  $\mathbb{R}^2$  中,  $S(x_0, r)$  是平面上以  $x_0 = (\xi_0, \eta_0)$  为中心,  $r$  为半径的开圆盘, 而在离散空间  $D$  中, 开球  $S(x_0, \frac{1}{2})$  只是一个点的单点集  $\{x_0\}$ !

在上述开球的定义中把“ $<$ ”换成“ $\leq$ ”, 称这个集是以  $x_0$  为中心,  $r$  为半径的闭球, 记为  $\bar{S}(x_0, r)$ .

设  $A$  是距离空间中任一集, 如果存在一个开球  $S(x_0, r)$ , 使得  $A \subset S(x_0, r)$ , 称  $A$  是有界集.

设  $G \subset (X, d)$ ,  $x \in G$ , 如果存在开球  $S(x, r) \subset G$ , 称  $x$  是  $G$  的一个内点, 如果  $G$  中每一点都是它的内点, 称  $G$  是一个开集, 对于空间的一点  $x$ , 包含  $x$  的任一开集称为  $x$  的一个邻域, 每一个开球  $S(x_0, r)$  是一个开集.

实际上,  $\forall x_1 \in S(x_0, r)$ , 则  $d(x_0, x_1) < r$ , 于是  $r - d(x_0, x_1) > 0$ , 取  $r_1 = r - d(x_0, x_1)$ . 则因为  $\forall x \in S(x_1, r_1)$ ,  $d(x_1, x) < r_1$ , 由三角形不等式

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) \\ &< d(x_0, x_1) + (r - d(x_0, x_1)) = r. \end{aligned}$$

所以  $S(x_1, r_1) \subset S(x_0, r)$ , 即  $S(x_0, r)$  是开集.

称开集  $S(x_0, r)$  为  $x_0$  的一个球邻域.

**定理 2.1** 设  $X$  是距离空间, 则  $X$  中的开集具有以下基本性质.

- 1) 全空间  $X$  与空集  $\emptyset$  是开集,
- 2) 任意个开集的并集是开集,
- 3) 任意有穷多个开集的交集是开集.

证. 1) 显然.

设  $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ , 其中  $\forall \alpha \in I, G_\alpha$  是开集,  $\forall x \in G$ , 则存在  $\alpha_0 \in I$ , 使得  $x \in G_{\alpha_0}$ , 由于  $G_{\alpha_0}$  是开集, 存在开球  $S(x, r) \subset G_{\alpha_0}$ , 从而  $S(x, r) \subset G$ , 即  $G$  是开集, 2) 得证. 以下证明 3).



设  $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$ , 其中每一个  $G_k (k=1, \dots, n)$  是开集,  $\forall x \in G$ , 对于每一个  $k$ , 存在开球  $S(x, r_k)$ , 使得

$$S(x, r_k) \subset G_k, (k=1, 2, \dots, n).$$

取

$$r = \min_{1 \leq k \leq n} \{r_k\},$$

则  $S(x, r) \subset S(x, r_k) \subset G_k (k=1, 2, \dots, n)$ . 即

$$S(x, r) \subset G. \quad \text{证完}$$

设  $A$  是距离空间中的任意一集, 用  $A^\circ$  表示所有  $A$  的开子集的并集, 称  $A^\circ$  为集  $A$  的内部. 由定理 2.1,  $A^\circ$  是开集, 并且是包含在  $A$  中的最大的开集.

设  $A$  是距离空间  $X$  中的点集,  $x_0 \in X$ , 如果  $\forall \epsilon > 0$ , 球  $S(x_0, \epsilon)$  中都包含  $A$  的点, 即

$$S(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

称  $x_0$  为集  $A$  的接触点, 集  $A$  的接触点的全体称为  $A$  的闭包,  $A$  的闭包记为  $\bar{A}$ , 显然  $A \subset \bar{A}$ . 但是,  $A$  的接触点不必属于  $A$ .

如果  $\forall \epsilon > 0$ , 球  $S(x_0, \epsilon)$  中总包含  $A$  中不同于  $x_0$  的点, 称  $x_0$  是  $A$  的极限点. 显然,  $A$  的极限点必是  $A$  的接触点, 反之则不然.

以下是闭包的基本性质.

**定理 2.2** 设  $A, B$  是距离空间  $X$  的子集, 则

- 1)  $A \subset \bar{A}$ ;
- 2)  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ ;
- 3)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;
- 4)  $\bar{\emptyset} = \emptyset$ .

证. 1), 4) 显然.

由 1),  $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$ , 所以为证明 2), 只需证明  $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}, \forall x_0 \in \bar{A}$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ , 球  $S(x_0, \epsilon)$  中含有  $\bar{A}$  中点, 设  $y_0$  是这样的一点, 则  $\delta = \epsilon - d(x_0, y_0) > 0$ , 且  $S(y_0, \delta)$  中含  $A$  中点. 而  $S(y_0, \delta) \subset S(x_0, \epsilon)$ , 所以