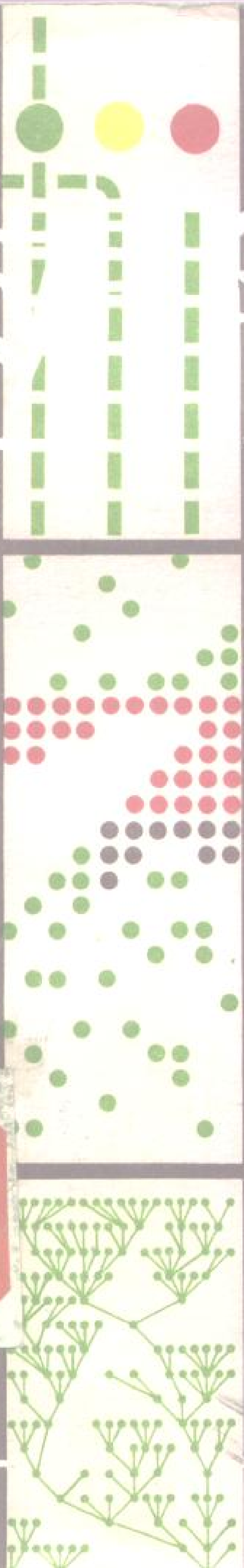
# 应用随机过程引论



胡 迪 鹤

中国科学院科学基金资助的课题

哈尔滨工业大学出版社

# 应用随机过程引论

胡 迪 鹤



哈尔滨工业大学出版社

## 内 容 简 介

本书用简单的数学工具和通俗的语言，论述在实际中应用较广的几类随机过程。诸如随机徘徊、分枝过程、泊松过程，更新过程、马尔可夫过程、平稳过程和鞅过程。凡学过微积分和初等概率论的读者，均可阅读此书。

本书可供理科、工科、财经、师范院校的高年级大学生、研究生和教师参考；亦可供有关的科技工作者参考。


**应用随机过程引论**

胡 迪 鹤

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

黑龙江省教育厅印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 10,375 字数 250,000

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷

印数 1—10,000

书号 13341·2 定价 1.80元

# 序　言

随机过程论，是现代概率论中一个重要课题，国内外已有大量专著及教材论及它。但是，在国内，使用较浅的数学工具且适用面较广的随机过程论教材很缺。特别是，既能作为数学系大学生选修课教材，又能作为工科院校、师范院校及财经院校有关研究生课程使用的随机过程论教材更少。正因为如此，作者把近年来给工科院校、师范院校及财经院校的有关研究生及进修教师讲授的“应用随机过程引论”整理成此书。凡学过初等概率论及微积分的读者，基本上可自学此书。

本书主要包括：随机徘徊、分枝过程、生灭过程、更新过程、排队过程、可数状态的马氏过程、平稳过程及鞅过程。本书只对上述诸随机过程作些简单介绍，更深刻的理论，不可能涉及，但论证却力求精确。

赵达纲副教授对本书提出过许多宝贵意见，谨此致谢。

限于作者学识浅薄，缺点错误在所难免，敬请读者不吝指教。

胡　迪　鹤

1984年于武汉大学

# 目　　录

# §1 随机徘徊

本书是在初等概率论的基础上写的。假定读者已学过初等概率论，因此，对初等概率论中一些基本概念及术语，不再解释。例如：试验、事件、随机变量、分布、密度函数、分布函数、特征函数、期望（均值）和方差……等等。

我们使用的一些主要符号，都是一般概率论教材中常用的。例如：$P(A)$表示事件$A$的概率，$P(A|B)$表示事件$A$对事件$B$的条件概率，$A\subset B$（或$B\supset A$）表示事件$A$含于$B$（或事件$B$包含事件$A$），$A=B$表示事件$A$、$B$相等，$A\cap B$、$A\cup B$、$A-B$表示事件$A$与$B$的交、并、差，有时亦用$P(A,B)$表示$P(A\cap B)$，即表示$A$与$B$之交的概率，而用$P(A或B)$表示$P(A\cup B)$，即表示$A$与$B$之并的概率。若$X$是一个随机变量，则用$\mathbf{E}(X)$和$\mathrm{Var}(X)$表示$X$的期望与方差，……等等。

下面我们开始研究这一节的主题——随机徘徊。

随机徘徊，是一类直观意义很强的重要的随机过程。由于本书只对随机过程作些简略介绍，所以本节对随机徘徊，也只介绍一些直线上的整数格子点上的随机徘徊的基本知识。

这类随机徘徊，直观上可描述如下：设有一质点在直线上的整数格子点上运动，每隔一个单位时间运动一次，每次运动的长度为一整数。若在时刻$n$质点处于位置$i$，则在时

刻 $n+1$，处于位置 $j$ 的概率为 $p_{i,j}\equiv p_{0,j-i}$ 不依赖 $n$ 和起始位置 $i$，只依赖运动的长度 $j-i$，此处 $p_{0,k}\geqslant 0$,($k=0$, $\pm 1$, $\pm 2,\cdots$), $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_{0,k}=1$。若令 $X_n$ 为时刻 $n$ 该质点所处的位置，($n\geqslant 0$)，则 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 描述了该质点的运动轨道。通常称 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 为直线上整数格子点 $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 上的随机徘徊。

根据这一直观描述，很自然地会给出其数学定义如下：

定义1·1. 设 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 为一串相互独立的具有下列公共分布的随机变量

$$P(\xi_n=k)=p_k \quad (n\geqslant 1,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$p_k\geqslant 0 \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k=1$$

令

$$X_n=X_0+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n, \quad (n\geqslant 1)$$

$X_0$ 为该质点的初始位置，$X_0$ 亦为整值随机变量，且与 $\{\xi_n\}$ 独立，则称 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 为直线上整数格子点上的随机徘徊。令 $p_{i,j}(n)=P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i)$，由定义知 $p_{i,j}(n)$ 不依赖 $n$ 和 $i$ 而只依赖 $j-i$，故可记 $p_{i,j}(n)$ 为 $p_{i,j}$，这时有 $p_{i,j}=p_{j-i}$ 称 $p_{i,j}$ 为 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的转移概率。

特别地，若直线上整数格子点上的随机徘徊 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的转移概率 $p_{i,j}$ 满足

$$p_{i,j}=\begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=i-1 \\ 0 & |j-i|\neq 1 \end{cases} \tag{1·1}$$

$p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p+q=1$，则称 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 为贝努利（Bernoulli）随机徘徊。更特别地，若贝努利随机徘徊中的 $p=q=\frac{1}{2}$，则称此贝努利随机徘徊为对称的贝努利随机徘徊或简单随机徘徊。

为什么把满足（1·1）的随机徘徊称为贝努利随机徘徊呢？因为若 $\{\sigma_n, n\geqslant 0\}$ 是一串贝努利试验，即 $\{\sigma_n, n\geqslant 0\}$ 是一串相互独立的试验，每次试验恰有两个结果，不妨说是“成功”和“失败”。假定每次试验出现“成功”的概率为 $p$，出现“失败”的概率为 $q=1-p$，令

$$X_n=X_0+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n \quad (n\geqslant 1), \quad X_0\equiv 0$$

$$\xi_n=\begin{cases} 1 & \text{当第 } n \text{ 次试验出现“成功”} \\ -1 & \text{当第 } n \text{ 次试验出现“失败”} \end{cases}$$

则 $X_n$ 代表前 $n$ 次试验中成功多于失败的次数，$\{X_n, n\geqslant 0\}$ 就是一个贝努利随机徘徊。

设 $p_{i,j}$ 是直线上整数格子点上的随机徘徊 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的转移概率。记 $I=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$

$$\begin{cases} p_{i,j}^{(0)}=\delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i\neq j \text{ 时} \end{cases} \\ p_{i,j}^{(1)}=p_{i,j} \\ p_{i,j}^{(n)}=\sum\limits_{\substack{i_1=-\infty \\ \vdots \\ i_{n-1}=-\infty}}^{\infty} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j} \end{cases} \tag{1·2}$$

则有

**命题1·1.** 对任意 $i,j\in I$，有

$$p_{i,j}^{(n+m)}=\sum_{k\in I}p_{i,k}^{(n)}p_{k,j}^{(m)} \quad (n\geqslant 0, \ m\geqslant 0) \tag{1·3}$$

$$\sum_{j\in I} p_{i,j}^{(n)}=1 \quad (n\geqslant 0) \tag{1·4}$$

$$p_{i,j}^{(n)}=p_{0,j-i}^{(n)} \quad (n\geqslant 0) \tag{1·5}$$

证. 由于 $p_{s,t}^{(l)}\geqslant 0$, $(l\geqslant 0,\ s,t\in I)$, 所以由 (1·2), 并应用有限重的正项级数可交换求和次序的法则可得

$$p_{i,j}^{(n+m)}=\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}\sum_{k\in I}\sum_{j_1\in I}\cdots\sum_{j_{m-1}\in I}$$

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},k}p_{k,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{m-1},j}$$

$$=\sum_{k\in I}\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}\sum_{j_1\in I}\cdots\sum_{j_{m-1}\in I}$$

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},k}p_{k,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{m-1},j}$$

$$=\sum_{k\in I}\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},k}$$

$$\cdot\sum_{j_1\in I}\cdots\sum_{j_{m-1}\in I}p_{k,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{m-1},j}$$

$$=\sum_{k\in I}p_{i,k}^{(n)}p_{k,j}^{(m)}$$

$$\sum_{j\in I}p_{i,j}^{(n)}=\sum_{j\in I}\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}$$

$$=\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-2},i_{n-1}}\sum_{j\in I}p_{i_{n-1},j}$$

$$=\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-2},i_{n-1}}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\sum_{i_1\in I} p_{i,i_1}$$

$$=1$$

显然（1·5）对 $n=0$ 和 $n=1$ 成立。设（1·5）对$n=k$成立，则由

$$p_{i,j}^{(k+1)}=\sum_{t\in I}p_{i,t}^{(k)}p_{t,j}^{(1)}$$

$$=\sum_{t\in I}p_{0,t-i}^{(k)}\,p_{t-i,j-i}^{(1)}$$

$$=\sum_{s\in I}p_{0,s}^{(k)}p_{s,j-i}^{(1)}$$

$$=p_{0,j-i}^{(k+1)}$$

归纳法完成，所以（1·5）对一切 $i,j\in I$，$n\geqslant 0$皆成立。

定义1·2． 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是直线上的整数格子点上的随机徘徊，$I=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$，$p_{i,j}$（$i,j\in I$）是其转移概率，令

$$f_{i,j}^{(0)}=0\quad (i,\ j\in I)$$

$$f_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}\quad (i,\ j\in I)$$

$$f_{i,j}^{(n)}=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\ \sum_{i_2\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}$$

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}$$

（$n\geqslant 2$，$i,j\in I$） $\{j\}$ 表示恰含 $j$ 的单点集合，称$f_{i,j}^{(n)}$为 $\{Xn,n\geqslant 0\}$ 的“自 $i$ 出发经$n$步初达 $j$”的转移概

率。

由 $f_{i,j}^{(n)}$的定义及条件概率的计算可得

$$P(X_{m+1}\neq j,\cdots,X_{m+n-1}\neq j,X_{m+n}=j\mid X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}P(X_{m+1}=i_1,\cdots,X_{m+n-1}=i_{n-1},$$

$$X_{m+n}=j\mid X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}P(X_{m+n}=j\mid X_{m+n-1}=i_{n-1},\cdots,$$

$$X_{m+1}=i_1,X_m=i)\cdot P(X_{m+n-1}=i_{n-1},X_{m+n-2}$$

$$=i_{n-2},\cdots,X_{m+1}=i_1\mid X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}P(X_{m+n}=j\mid X_{m+n-1}=i_{n-1})$$

$$\cdot P(X_{m+n-1}=i_{n-1},X_{m+n-2}=i_{n-2},\cdots,X_{m+1}$$

$$=i_1\mid X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}p_{i_{n-1},j}\cdot P(X_{m+n-1}=i_{n-1},X_{m+n-2}$$

$$=i_{n-2},\cdots,X_{m+1}=i_1\mid X_m=i)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}=f_{i,j}^{(n)}$$

而上式左端的直观的概率意义正是：随机徘徊 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ "自 $i$ 出发经 $n$ 步初达 $j$" 的转移概率。仿之可证 $p_{i,j}^{(n)}=P(X_{n+m}=j\mid X_m=i)$，故 $p_{i,j}^{(n)}$的直观意义是"自 $i$ 出发经

$n$ 步到达 $j$ ” 的概率。

命题1·2. 对任何 $n\geqslant 1$, $i$, $j\in I$, 有

（1） $f_{i,j}^{(n)}=f_{0,j-i}^{(n)}$

（2） $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)}\leqslant 1$

（3） $p_{i,j}^{(n)}=\sum\limits_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n-k)}$

证.（1） 由 $f_{i,j}^{(n)}$的定义及 $p_{i,j}^{(k)}=p_{0,j-i}^{(k)}$ $(k\geqslant 0, i, j\in I)$ 可得

$$
\begin{aligned}
f_{i,j}^{(n)} &= \sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j} \\
&= \sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}} p_{0,i_1-i}p_{i_1-i,i_2-i}\cdots p_{i_{n-1}-i,j-i} \\
&= \sum_{s_1\in I-\{j-i\}}\cdots\sum_{s_{n-1}\in I-\{j-i\}} p_{0,s_1}p_{s_1,s_2}\cdots p_{s_{n-1},j-i} \\
&= f_{0,j-i}^{(n)}
\end{aligned}
$$

（2）从概率的观点上看，（2）式显然成立。因为前面已经证明：

$$f_{i,j}^{(k)}=P(X_{m+1}\neq j, \cdots, X_{m+k-1}\neq j, X_{m+k}=j \mid X_m=i)$$

若令

$$A_j(m,k)=\{X_{m+1}\neq j,\cdots, X_{m+k-1}\neq j, X_{m+k}=j\} \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

则 $A_j(m,1)$, $A_j(m,2)$, $\cdots$, $A_j(m,n)$是两两互斥的事件。

因此若令 $B_j(m, n)=\bigcup_{k=1}^{n} A_j(m,k)$，则有

$$1\geqslant P(B_j(m, n)|X_m=i)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_j(m, k)|X_m=i\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} P(A_j(m,k)|X_m=i)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)}$$

（2）获证。

（3）下面对 $n$ 作归纳法来证明（3）。当 $n=1$ 时，$f_{i,j}^{(1)}\,p_{j,j}^{(0)}=f_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}^{(1)}$，此即（3）对$n=1$成立。设（3）对 $n=k$ 成立，往证（3）对 $n=k+1$ 亦成立。事实上，由命题1·1及归纳法假设有

$$p_{i,j}^{(k+1)}=\sum_{t\in I} p_{i,t}\,p_{t,j}^{(k)}=\sum_{t\in I} p_{i,t}\sum_{s=1}^{k} f_{t,j}^{(s)}\,p_{j,j}^{(k-s)}$$

但是，由定义1·2有

$$\sum_{t\in I-\{j\}} p_{i,t}\,f_{t,j}^{(s)}=f_{i,j}^{(s+1)}$$

以此式代入前式并再一次应用归纳法假设有

$$p_{i,j}^{(k+1)}=\sum_{s=1}^{k}\ \sum_{t\in I} p_{i,t}\,f_{t,j}^{(s)}\,p_{j,j}^{(k-s)}$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{t\in I-\{j\}} p_{i,t}\,f_{t,j}^{(s)}+p_{i,j}\,f_{j,j}^{(s)}\right)p_{j,j}^{(k-s)}$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left(f_{i,j}^{(s+1)}+p_{i,j}f_{j,j}^{(s)}\right)p_{j,j}^{(k-s)}$$

$$=\sum_{m=2}^{k+1}(f_{i,j}^{(m)}\ p_{j,j}^{(k+1-m)})+p_{i,j}p_{j,j}^{(k)}$$

$$=\sum_{m=2}^{k+1}f_{i,j}^{(m)}p_{j,j}^{(k+1-m)}+f_{i,j}^{(1)}p_{j,j}^{(k)}$$

$$=\sum_{m=1}^{k+1}f_{i,j}^{(m)}p_{j,j}^{(k+1-m)}$$

此即（3）对 $n=k+1$ 亦成立。命题证毕。

定义1·3． 设 $f_{i,j}^{(n)}$、$p_{i,j}^{(n)}$如前所定义，令

$$g_{i,j}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}p_{i,j}^{(k)}\qquad(n=0,1,\cdots,\ i,j\in I)$$

$$g_{i,j}^{*}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{i,j}^{(k)}\qquad(i,j\in I)$$

$$g^{(n)}=g_{0,0}^{(n)}\qquad(n=0,1,\cdots)$$

$$g^{*}=g_{0,0}^{*}$$

$$f_{i,j}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,j}^{(n)}\qquad(i,j\in I)$$

$$f^{(n)}=f_{0,0}^{(n)}\qquad(n=0,1,\cdots)$$

$$f^* = f^*_{0,0}$$

上述诸量皆具有明显的概率意义。$g^{(n)}_{i,j}$的概率意义是：随机徘徊从 $i$ 出发，到时刻 $n$ 为止，曾在 $j$ 逗留过的总次数的平均值；$g^*_{i,j}$的概率意义是：随机徘徊从 $i$ 出发，在整个过程中，曾在 $j$ 逗留过的总次数的平均值；$f^{(n)}_{i,j}$是随机徘徊从$i$出发，恰巧在时刻 $n$ 初达 $j$ 的概率；$f^*_{i,j}$是随机徘徊从$i$出发，在整个过程中总要到达 $j$ 的概率。

命题1·3. 对定义1·3中定义的诸量，有下列关系

(1) $g^{(n)}_{i,j} \leqslant g^{(n)}_{0,0}$ （对一切 $n \geqslant 0$，$i,j \in I$）

(2) $g^* = \dfrac{1}{1-f^*}$ $\left(约定\dfrac{1}{0} = \infty\right)$

证。（1）由命题1·1有

$$p^{(k)}_{i,j} = p^{(k)}_{0,j-i} = p^{(k)}_{i-j,0} \qquad (k \geqslant 0,\ i,j \in I)$$

所以由 $g^{(n)}_{i,j}$的定义有

$$g^{(n)}_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}_{i-j,0} = g^{(n)}_{i-j,0}$$

因此，为了证明（1）对一切 $i,j \in I$ 成立，只须证明(1)对 $j=0$，$i \neq 0$ 成立。用命题1·2 (3) 有

$$g^{(n)}_{i,0} = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}_{i,0} = \sum_{k=1}^{n} p^{(k)}_{i,0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=0}^{k} f^{(k-t)}_{i,0}\ p^{(t)}_{0,0}$$

上式第二个等式用了 $i\neq 0$，$p_{i,0}^{(0)}=\delta_{i,0}=0$，上式第三个等式用了命题1·2（3）。把上式交换求和次序可得

$$g_{i,0}^{(n)}=\sum_{t=0}^{n}\sum_{k=t}^{n}f_{i,0}^{(k-t)}\ p_{0,0}^{(t)}$$

$$=\sum_{t=0}^{n}p_{0,0}^{(t)}\sum_{m=0}^{n-t}f_{i,0}^{(m)}$$

而由命题1·2（2）有

$$\sum_{m=0}^{n-t}f_{i,0}^{(m)}\leqslant 1$$

所以

$$g_{i,0}^{(n)}\leqslant\sum_{t=0}^{n}p_{0,0}^{(t)}=g_{0,0}^{(n)}$$

（1）证毕。

（2）由命题1·2（3）有

$$p_{0,0}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_{0,0}^{(k)}p_{0,0}^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}f_{0,0}^{(k)}p_{0,0}^{(n-k)}\qquad(n\geqslant 1)$$

（因为 $f_{i,j}^{(0)}=0$）

把上式两边对 $n$ 从1到 $m$ 求和后两边再加1得

$$g^{(m)}=\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}f_{0,0}^{(k)}p_{0,0}^{(n-k)}+1$$

$$=\sum_{k=0}^{m} f_{0,0}^{(k)} \sum_{n=k}^{m} p_{0,0}^{(n-k)}+1$$

$$=\sum_{k=0}^{m} f_{0,0}^{(k)} g_{0,0}^{(m-k)}+1$$

$$=\sum_{k=0}^{m} f^{(k)} g^{(m-k)}+1 \quad (m\geqslant 1) \tag{1·6}$$

令 $m\to\infty$ 得

$$g^{*}=1+\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} f^{(k)} g^{(m-k)}$$

$$\geqslant 1+g^{*}\sum_{k=0}^{N} f^{(k)} \qquad (\text{对一切} N\geqslant 1)$$

因此

$$g^{*}\geqslant 1+g^{*}f^{*} \tag{1·7}$$

这就证明了当 $f^{*}=1$ 时 $g^{*}=\infty$，亦即 $f^{*}=1$ 时（2）成立。

另一方面，由（1·6）有

$$1=g^{(m)}-\sum_{k=0}^{m} f^{(k)} g^{(m-k)}=g^{(m)}-\sum_{k=0}^{m} g^{(k)} f^{(m-k)}$$

$$\geqslant g^{(m)}-g^{(m)}\sum_{k=0}^{m} f^{(m-k)}$$