

电磁场理论的数学方法

连汉雄 编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

七十年代以来,随着激光、光波技术、毫米波技术以及光纤通信、卫星通信、雷达、移动通信等的飞速发展,促使人们进一步去研究离散媒质(如目标识别)、各向异性媒质(如电光器件和磁光器件)、随机媒质、等离子体以及非线性媒质(如光纤中的非线性)中电磁场的复杂边值问题,从而极大地丰富了电磁场理论的数学方法。本书用泛函和算子理论总结了国内外在上述各领域的最新研究成果,并用算子理论阐明格林函数法和算子的谱理论;然后用复变函数阐明保角变换法、留数法和Wiener-Hopf法的实际应用;最后结合光波技术讨论曲线结构的模式理论和光多波导系统的模式耦合理论。

本书可作为高等学校工科电磁场与微波技术专业的研究生教材,亦可供从事光通信、激光、微波、应用物理、应用数学的科技人员和大专院校师生参考。

电磁场理论的数学方法

连汉雄 编著

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

地质出版社印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 12.25印张326千字
1990年2月第一版 1990年2月第一次印刷

ISBN 7-81013-291-1/TN·17

印数: 1—1800册 定价: 3.10元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986~1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本书系按原电子工业部制定的工科电子类专业教材 1986~1990 年编审出版规划, 由电磁场及微波技术教材编委会电磁场理论编审小组征稿、评选、审定、推荐作为高等学校工科电子类的研究生教材出版。责任编委为钱景仁教授。

本书由北京邮电学院连汉雄教授编著, 由中国科技大学钱景仁教授担任主审。参考时数为 80 学时。打“*”号部分可用于博士生教材, 其他部分可作为硕士生教材。

六十年代以来, 电磁场与微波技术专业的研究生所用的工程数学教材一般仍然沿用普通物理专业的数学教材。这类教材一般只能解决均匀各向同性媒质中时谐电磁场的边值问题。至今这些内容已显得有些陈旧乏味。

七十年代特别是八十年代以来, 随着光波技术、毫米波技术以及光纤通信、卫星通信、雷达、移动通信等的飞速发展, 使得人们需要进一步去研究离散媒质(如雷达中的目标识别、丛林通信等)、各向异性媒质(如电光器件、磁光器件等)、随机媒质(如等离子体、电离层、森林等)、有耗媒质(如生物电子学、隐形飞机等)以及非线性媒质(如光纤、大功率激光器等)中电磁场的复杂边值问题, 从而极大地丰富了电磁场理论的数学方法。目前, 上述每一个课题几乎都是这一领域的热门课题而受到国际上的普遍重视。

作者有幸在留美三年和回国四年的理论研究工作中涉及了上述大部分课题, 并在讲授博士生的工程数学中萌发出一种想法, 即试图用最少的篇幅总结七十年代以来发展起来的电磁场理论的几种主要数学方法; 与此同时, 按照电磁场理论编审小组的要求, 又应设法把七十年代以前已经使用的保角变换法、积分变换

法、变量分离法和格林函数法等包括在内而又不落俗套。如何把这些内容有机地贯穿在一起形成一套新颖的系统，颇费思索。在美国，研究生的培养既重视工程数学又重视泛函原理，这是由于工程数学的复杂性迫切需要用泛函的简洁语言来表达。这启发作者站在泛函的高度去总结这些复杂的工程数学方法。于是提出用两条线把全书的内容贯穿在一起：一条是沿着复变函数这条线发展到电磁场理论的保角变换法、留数法和 Wiener-Hopf 法，以求解诸如微带、介质波导的复杂边值问题；另一条是沿着泛函和算子理论这条线，阐明格林函数法、算子的谱理论、等离子体中场的算子法、离散媒质及各向异性媒质中场的算子法以及诸如光纤等媒质中非线性波的解析法（其中包括光纤中的自聚焦现象、孤子传输、受激喇曼散射、受激布里渊散射、四光子混合等的解析法。从数学的角度讲，其中包括特征曲线法、摄动法、函数变换法、逆散射法以及 Hirota 法等）。这样讲的好处在于可以用算子这一简洁的语言表达复杂的求解过程，得出尽量简单的解析解；同时按算子的逆求格林函数和用算子的谱理论（或叫算子的特征值与特征函数理论）讲授变量分离法，比传统的讲法更为普遍、深刻。考虑到模式理论仍然是个有力的工具，本教材专辟两章讨论曲线结构中的模式理论和光多波导系统中的模式耦合理论。四年博士生数学的教学实践证明，这些内容对硕士生和博士生的论文工作均起到一定程度的启发和引导作用，受到研究生们的普遍欢迎。

还有一点要提及，近年来电磁场理论的数值方法发展很快，不少人因而忽视了数学方法。事实上这两种方法应该是相辅相成的，数值方法可以依靠计算机得到许多问题的精确解；数学方法则必须更多地依靠数学知识与技巧，推导出有清晰物理意义的解析解。就象中学生用计算器可以迅速得到解答的同时，还不应忽视基本计算方法的训练。因此，编著本书的目的之一就是希望大家继续重视数学方法。

承蒙主审钱景仁教授认真细致地审阅了本书，并提出了不少

宝贵意见，编审组组长楼仁海教授对本书的大纲提出过不少修改意见，饶克谨教授、杨铨让教授和全泽松教授也认真审阅过本书，北京邮电学院对本书的编写给予了很大的帮助和支持，在此一并表示诚挚的谢意。还应特别感谢我的导师学部委员叶培大教授，是他给我机会讲授博士生的工程数学，并指明这门课的方向。袁丽冰高工帮助誊写了原稿和画图，在此也一并表示谢意。

由于作者水平有限，时间仓促，书中还难免存在一些缺点和错误，殷切希望使用本书的师生和广大读者批评指正。

连汉雄

1988.4于北京邮电学院

目 录

第一部分 复变函数在电磁场理论中的应用

第一章 预备知识	1
1.1 引言	1
1.2 辐射条件与边缘条件	2
1.3 某些渐近展开式	7
1.4 开区域中场的模式表达式	12
1.5 鞍点法	14
第二章 保角变换法	21
2.1 保角变换法的基本原理	21
2.2 保角变换法应用举例	25
2.3 保角变换的技巧	33
2.4 多边形边界的许瓦兹 (Schwarz) 变换	40
第三章 留数法	45
3.1 引言	45
3.2 分支波导的模式匹配法	45
3.3 模式系数的直接求解法	50
3.4 留数法	54
第四章 Wiener-Hopf 法	60
4.1 引言	60
4.2 傅氏变换的某些特性	60
4.3 傅氏变换在复 α 平面上的特性	63
4.4 Wiener-Hopf 法	66
4.4.1 用格林函数法构成积分方程	67
4.4.2 导出 Wiener-Hopf 方程	70
4.4.3 $G(\alpha)$ 的因式分解	74
4.4.4 求解 Wiener-Hopf 方程	77
4.4.5 场的解	79

4.5	琼斯 (Jones) 法	81
4.6	一般化的因式分解与和式分解	83
4.7	另一种因式分解公式	87
4.8	Wiener-Hopf 法的应用	91
第五章	变形的 Wiener-Hopf 法	104
5.1	变形的 Wiener-Hopf 方程	104
5.2	带有介质负载的分支波导	107
第二部分 泛函原理及其在电磁场理论中的应用		
第六章	线性空间	117
6.1	线性矢量空间	117
6.2	希尔伯特 (Hilbert) 空间的正交系	119
6.2.1	内积空间	119
6.2.2	收敛与完备空间	120
6.2.3	线性流形 (Linear Manifolds) 和子空间	121
6.2.4	线性矢量空间的表示法——正交基	122
6.3	投影定理与线性泛函	124
6.4	线性算子·算子的逆·伴随算子	126
6.4.1	算子的表示法	127
6.4.2	算子的逆	129
6.4.3	伴随算子	134
第七章	格林函数法	136
7.1	引言	136
7.2	δ 函数	137
7.3	常微分算子的格林函数	142
7.4	二维偏微分方程的格林函数	144
7.5	两对易算子之和的逆	147
7.6	三维偏微分方程的格林函数	152
附录	各种坐标系中的 δ 函数	156
第八章	算子的谱理论	160
8.1	引言	160
8.2	算子的谱理论——对易算子, 自伴算子的 特征矢量	161
8.2.1	不变流形与不变子空间	161

8.2.2 对易算子 (或称可交换算子).....	163
8.2.3 自伴算子的特征矢量	164
8.3 算子的谱表示法.....	165
8.3.1 基本概念	165
8.3.2 特征函数表示式的一般理论	169
8.3.3 用格林函数法求谱表示式	172
8.4 偏微分算子的谱表示法.....	177
8.4.1 二个对易算子之和的谱表示法	177
8.4.2 三个对易算子之和的逆	179
8.4.3 偏微分算子的谱表示法	180
第九章 等离子体中电磁场的新算子理论	183
9.1 引言.....	183
9.2 新的电磁场算子理论.....	184
9.3 $M_0(r)$ 的特征函数展开——正交基.....	185
9.3.1 麦氏方程的算子形式	185
9.3.2 正交基	188
9.3.3 $L_2(V)$ 空间中的正规模	194
9.4 时间演变方程.....	196
9.4.1 均匀各向同性稳态媒质中的振荡模式	197
9.4.2 均匀各向同性动态媒质中的振荡模式	199
9.4.3 非均匀各向同性动态媒质中的耦合振荡模式	200
*第十章 离散媒质及各向异性媒质中电磁场的算子理论.....	202
10.1 引言.....	202
10.2 离散介质棒填充空间中场的解析法.....	202
10.3 随机离散媒质中场的算子法.....	212
10.3.1 二维散射媒质.....	213
10.3.2 张量散射幅度.....	222
10.3.3 森林的有效张量介电常数.....	224
10.3.4 空间-频率相关函数	227
10.4 有耗各向异性介质波导的矢量变分式.....	231
10.4.1 算子的自伴性.....	232
10.4.2 变分公式.....	236
附录 亥姆兹矢量	239

第十一章 非线性波方程的解析法与光纤中的非线性	242
11.1 引言	242
11.2 非线性双曲型方程的特征曲线法	245
11.2.1 “后浪赶前浪”现象	245
11.2.2 特征曲线法	250
11.3 摄动法——非线性波远区场的解析法	257
11.3.1 摄动法与G-M变换	258
11.3.2 Burgers 方程与弱损耗传输	260
11.3.3 KdV方程与孤子传输	262
11.3.4 Hirota法与多孤子传输	264
11.3.5 薛定谔方程与自聚焦现象	270
11.3.6 非线性耦合波方程与受激喇曼散射	273
11.4 函数变换法	286
*11.5 逆散射变换法——非线性波初值问题的解析法	287
11.5.1 KdV方程的逆散射变换法	287
11.5.2 Lax Pair定理	304
11.5.3 非线性薛定谔方程的逆散射变换法	306
第三部分 模式理论	
第十二章 曲线结构中的模式理论	316
12.1 引言	316
12.2 曲线结构的正交坐标系	316
12.2.1 扭转坐标系	316
12.2.2 Serret-Frenet 框架	319
12.2.3 非正交坐标系	319
12.2.4 Tang 氏正交坐标系	320
12.2.5 应用举例	321
12.2.6 曲线结构正交坐标系中的麦氏方程	324
12.3 扭转的矩形波导中场的微扰法	325
12.3.1 扭转波导中的波动方程	327
12.3.2 微扰法	328
12.3.3 波动方程的解	329
12.3.4 扭转波导中的传播常数	331
12.4 弯曲介质平板波导中场的微扰法	332

12.4.1 微扰解.....	334
12.4.2 衰减常数.....	337
12.5 弯曲光纤中场的微扰法.....	338
12.5.1 弯曲光纤中的波动方程.....	339
12.5.2 微扰法.....	341
12.5.3 弯曲光纤中的传播常数.....	343
*12.6 螺旋光纤中场的微扰法.....	345
12.6.1 螺旋光纤中的波动方程.....	347
12.6.2 微扰法.....	349
12.6.3 螺旋光纤的双折射.....	352
12.6.4 螺旋光纤的特性.....	353
附录 (12-5-17) 式求解过程.....	356
第十三章 多波导系统的模式耦合理论	358
13.1 引言.....	358
13.2 光频多波导系统的模式耦合理论.....	358
13.2.1 耦合波方程的导出.....	358
13.2.2 耦合波方程的矩阵解法.....	362
13.2.3 应用举例.....	364
*13.3 各向异性多波导系统的模式耦合理论.....	366
13.4 带调制的各向异性多波导系统的模式耦合理论.....	368
13.4.1 耦合波方程的导出.....	368
13.4.2 矩阵方程的求解.....	372
参考文献	375

第一部分 复变函数在电磁场 理论中的应用

第一章 预备知识

1.1 引言

本书第一部分主要涉及线性各向同性媒质中简谐电磁场的复杂边值问题，即包含部分金属部分介质的开式或闭式区域内的电磁场边值问题。

在简谐电磁场边值问题的研究中，复变函数是个有力的工具。

首先，由于在某些特定情况下，电磁场的位函数满足二维拉普拉斯方程，解析函数的实部和虚部也满足拉普拉斯方程，因此，可以用解析函数的实部或虚部代表位函数。加上解析函数的坐标变换又是保角变换，这意味着用解析函数代表的位函数也具有保角变换特性。因此，可以把复杂边界通过保角变换，变换成简单的边界加以求解，这就是大家所熟知的保角变换法。而许瓦兹 (Schwartz) 变换则是把一个多边形的区域变换成上半平面。保角变换法曾被广泛应用于求解复杂边界条件下的静态场问题以及 TEM 波传输线的特性阻抗。由于这方面的论著很多，这里只想用少量篇幅涉及。

本书所要着重介绍的是过去较少引起注意的留数算法和由积分变换导出的 Wiener-Hopf 法。这两种方法和模式匹配法一起，成为当前求解电磁场复杂边值问题的有力工具。特别是 Wiener-Hopf 法，它不仅可以解决闭式区域的复杂边值问题，还可以解决开式区域的复杂边值问题，而且目前还在实际应用中

不断开拓和发展。

作为预备知识，本章简要地讨论下面经常要用到的一些基本概念和公式。这里要涉及到许多复变函数的概念，由于篇幅所限，不再叙述。幸好这些内容在有关书籍中都可以找到^[1]。

1.2 辐射条件与边缘条件

电磁场中的边值问题分两类：一类是闭式区域中的问题，这类问题的基本方程是麦氏方程、物质方程和边界条件；另一类是开式区域中的问题，这类问题除涉及上述基本方程外，还要涉及场的**辐射条件**与**边缘条件**。这些条件和边界条件一样，可以在特定条件下，确保解的唯一性，而它们的出发点仍然是麦氏方程。

若所有有限区域中的场源均包含在无限空间之中，则在无限远处的场必须受制于**辐射条件**，即：

(1) 若此空间是有损耗的，则无限远处的场满足

$$\Psi|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (1-2-1)$$

(2) 若此空间是无损耗的，则无限远处的场受制于 Sommerfeld 辐射条件：即场的任一横向分量 Ψ ，必须满足

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - i k \Psi \right) = 0 \quad (1-2-2)$$

式中 r 是从源点到观察点的距离， $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ 是媒质中的传播常数。从物理意义上讲，Sommerfeld 辐射条件表示，远离场源的场有一向外延迟的相位，且其幅度下降至少比 r^{-1} 要快。

还有一类边值问题是遇有锐利边缘的几何奇点，在这些点上，原则上讲，场要趋于无穷大。这时场变成不唯一，需要用边缘条件来确定场的唯一解答。**边缘条件**认为：在边缘的任一有限邻域内，其电磁储能必须为有限值，即当 V 紧缩到边缘的邻域内时

$$\int_V (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) dV \rightarrow 0 \quad (1-2-3)$$

对于平滑边缘, (1-2-3) 式中的 $dV = \rho d\rho d\phi dz$, 其中 (ρ, ϕ, z) 是边缘的本地柱坐标, 则由 (1-2-3) 式, 在边缘的邻域内, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 场 (E, H) 分量不可能比 $\rho^{-1+\tau}$ 增长更快, 其中 $\tau > 0$. τ 可以根据具体的边缘条件加以确定。

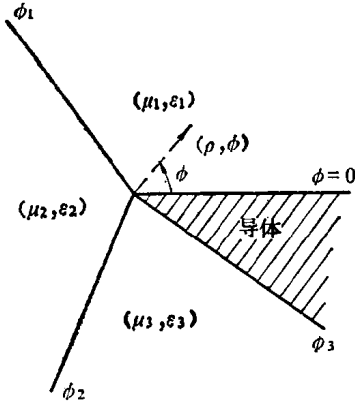


图 1-1 楔形导体的边缘条件

图1-1示出一楔形导体置于三种媒质 (μ_1, ϵ_1) , (μ_2, ϵ_2) , (μ_3, ϵ_3) 之中。这时可以按圆柱坐标 (ρ, ϕ, z) 写出其麦氏方程, 然后将边缘场展成 ρ 的级数, 使其系数只是 ϕ 和 z 的函数。由于边缘附近的场在 $\rho \rightarrow 0$ 时, 其增长速度不可能比 $\rho^{-1+\tau}$ 更快, 故边缘附近的场可以写成

$$\left. \begin{aligned} E_\rho &= \rho^{-1+\tau} [a_0^{(j)} + a_1^{(j)}\rho + a_2^{(j)}\rho^2 + \dots] \\ E_\phi &= \rho^{-1+\tau} [b_0^{(j)} + b_1^{(j)}\rho + b_2^{(j)}\rho^2 + \dots] \\ E_z &= \rho^{-1+\tau} [c_0^{(j)} + c_1^{(j)}\rho + c_2^{(j)}\rho^2 + \dots] \\ H_\rho &= \rho^{-1+\tau} [A_0^{(j)} + A_1^{(j)}\rho + A_2^{(j)}\rho^2 + \dots] \\ H_\phi &= \rho^{-1+\tau} [B_0^{(j)} + B_1^{(j)}\rho + B_2^{(j)}\rho^2 + \dots] \\ H_z &= \rho^{-1+\tau} [C_0^{(j)} + C_1^{(j)}\rho + C_2^{(j)}\rho^2 + \dots] \end{aligned} \right\} \quad (1-2-4)$$

式中 $j = 1, 2, 3$, 分别代表三个区域中的场。

将 (1-2-4) 式代入麦氏方程和下列边界条件:

$$E_\rho, E_z|_{\phi=0, \phi_3} = 0$$

$$E_\rho, E_z \text{ 在 } \phi = \phi_1, \phi_2 \text{ 两边连续} \quad (1-2-5)$$

$$H_\rho, H_z \text{ 在 } \phi = \phi_1, \phi_2 \text{ 两边连续}$$

可以得出30个线性方程，这些方程来自等式两边 ρ 的同幂项相等。

为使这30个方程有非零解，要求满足下列两个条件之一：

(1) 条件A

$$a_{(j)}^{(j)} = b_{(j)}^{(j)} = c_{(j)}^{(j)} = C_{(j)}^{(j)} = 0, \quad j=1, 2, 3$$

$$F_\mu(\tau) = 0 \quad (1-2-6)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad F_\mu(\tau) = & \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \left[\sin \tau \phi_2 \sin \tau (\phi_3 - \phi_2) \right. \\ & \left. - \frac{\mu_2 \cos \tau \phi_2 \cos \tau (\phi_3 - \phi_2)}{\mu_3} \right] \\ & - \left(\tan \tau \phi_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \cot \phi_1 \right) \\ & \times \left[\cos \tau \phi_2 \sin \tau (\phi_3 - \phi_2) \right. \\ & \left. + \frac{\mu_2 \sin \tau \phi_2 \cos \tau (\phi_3 - \phi_2)}{\mu_3} \right] \end{aligned}$$

在这一条件下，边缘条件为

$$\left. \begin{aligned} H_r &= O(\rho^{-1+\tau}) \\ H_z, E &= O(\rho^\tau) \end{aligned} \right\} \rho \rightarrow 0 \quad (1-2-7)$$

这里 τ 为方程 $F_\mu(\tau) = 0$ 的最小正值解，故它对应于边缘奇异场的上界； t 代表横向分量。

(2) 条件B

$$A_{(j)}^{(j)} = B_{(j)}^{(j)} = C_{(j)}^{(j)} = c_{(j)}^{(j)} = 0$$

$$F_\mu(\tau) = 0 \quad (1-2-8)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad F_\mu(\tau) = & \left(1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \left[\cos \tau \phi_2 \cos \tau (\phi_3 - \phi_2) \right. \\ & \left. - \frac{\epsilon_2 \sin \tau \phi_2 \sin \tau (\phi_3 - \phi_1)}{\epsilon_3} \right] \\ & - \left(\cot \tau \phi_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tan \tau \phi_1 \right) \end{aligned}$$

$$\times \left[\sin \tau \phi_2 \cos \tau (\phi_3 - \phi_2) + \frac{\epsilon_2 \cos \tau \phi_2 \sin \tau (\phi_3 - \phi_2)}{\epsilon_3} \right]$$

在这一条件下，边缘条件为

$$\left. \begin{aligned} E_z &= O(\rho^{-1+\tau}) \\ E_x, H &= O(\rho^\tau) \end{aligned} \right\} \rho \rightarrow 0 \quad (1-2-9)$$

其中 τ 为 $F_z(\tau)=0$ 的最小正值解。

现将上述两个边缘条件列于表1-1。

图 1-1所示结构的边缘条件

表 1-1

型 式	E_z	H_z	E_x, H_x	τ 值满足*
A	$O(\rho^\tau)$	$O(\rho^{-1+\tau})$	$O(\rho^\tau)$	$F_z(\tau) = 0$
B	$O(\rho^{-1+\tau})$	$O(\rho^\tau)$	$O(\rho^\tau)$	$F_z(\tau) = 0$

* τ 为方程的最小正值解，它对应于边缘奇异场的上界； τ 代表场的横向分量。

在一般情况下，边缘场是型式A和型式B的组合。下面结合实例加以讨论。

图 1-2示出几种常见的边缘结构。由于只涉及介电媒质，故 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 。代入(1-2-6)式，得型式A的解答为

$$\left. \begin{aligned} H_z &= O(\rho^{-1+\pi/\phi_3}) \\ H_x, E &= O(\rho^{\pi/\phi_3}) \end{aligned} \right\} \rho \rightarrow 0 \quad (1-2-10)$$

将 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 代入(1-2-8)式，可得型式B的解答。然后比较型式A和型式B的解答，看哪一个解答随 $\rho \rightarrow 0$ 时的增长更快就取那一个解答。其最后的结果如下：

对于图1-2(a)

$$\left. \begin{aligned} E_z, H_z &= O(\rho^{-1/3}) \\ E_x, H_x &= O(\rho^{2/3}) \end{aligned} \right\} \rho \rightarrow 0 \quad (1-2-11)$$

对于图1-2(b)至(c)

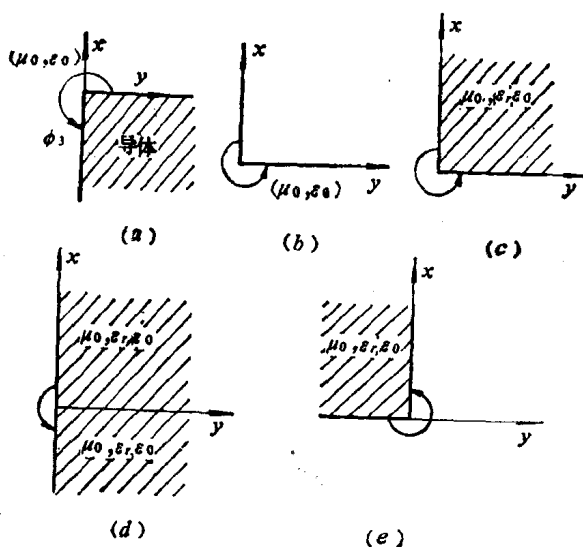


图 1-2 常见的几种边缘结构

$$\left. \begin{aligned} E_t &= O(\rho^{-1+\tau}) \\ H_t &= O(\rho^{-1/2}) \\ E_z, H_z &= O(\rho^{\min(1/2, \tau)}) \end{aligned} \right\} \rho \rightarrow 0 \quad (1-2-12)$$

式中 τ 值各异, 从图1-2(b)至(e)依次分别为

$$\tau = 1/2$$

$$\tau = \begin{cases} (1/2) + \left(\frac{1}{\pi}\right) \arcsin \left[\frac{\epsilon_r - 1}{2(\epsilon_r + 1)} \right] & \text{若 } \epsilon_r > 1 \\ (1/2) - \left(\frac{1}{\pi}\right) \arcsin \left[\frac{1 - \epsilon_r}{2(\epsilon_r + 1)} \right] & \text{若 } 1 > \epsilon_r > 0 \end{cases}$$

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \right)^{1/2}$$

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\frac{3\epsilon_r + 1}{2(\epsilon_r + 1)^2} \right]^{1/2}$$

上述所有反正弦函数只在0至 $\pi/2$ 之间取主值。