集合论初步

〔美〕P. W. 齐纳　R. L. 约翰逊 著

科学出版社

集合论初步

〔美〕P. W. 齐纳 R. L. 约翰逊 著

麦卓文 麦绍文 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书以不完全的公理化方法系统而又详尽地阐述了集合论的基本概念和基本理论.如基础逻辑知识、集合、关系、函数、有穷集、无穷集、基数等。书中还简要地介绍了有序集、序数、选择公理及罗素悖论等。

该书通俗易懂，思路清晰，结构紧凑，文字流畅。可供中学教师、高年级中学生以及自学青年学习时参考，亦可供高等院校数学专业的师生及有志于学习现代数学的科技工作者阅读。

P.W.Zehna R.L.Johnson
ELEMENTS OF SET THEORY
Allyn and Bacon, Inc.,1962

集合论初步

〔美〕P. W. 齐纳 R. L. 约翰逊 著

麦卓文 麦绍文 译

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

贵州新华印刷厂排版

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年4月 第一版 开本：787×1092 1/32

1986年4月第一次印刷 印张：5 5/8

印数：0001—7,000 字数：124,000

统一书号：13031·3137

本社书号：4109·13—1

定价：1.05元

译 者 的 话

集合论是现代数学的基础，过去，我国高等学校一般没有开设集合论基础课程，只是在有关专业基础课程中简略介绍。现在，随着中学数学教材的现代化，已把部分集合论知识下放到中学．因此，为适应高等学校教学、中学数学教师的进修以及科技工作者学习现代数学的需要，我们翻译了这本书．

本书作者有丰富的教学经验，因此这本书写得由浅入深、循序渐进而又有一定的严格性．这本书可以用作教学参考书，亦可以用来自学．

由于我们的水平不高，在译文和译注中都难免有错误及不妥之处，请广大读者批评指正．

序　　言

我们应邀为国立科罗拉多学院高年级学生和初级研究班学生，组织和讲授的这本集合论课程是根据从事大学课程研究的各个委员会的报告，根据我们自己在数学研究和教学方面的经验，以及我们在与中学教师正式和非正式集会时所得到的资料编写而成的．这门课程可供一学期每周三小时的教学使用，适合于向那些在一定程度上熟悉实数系和初等实函数的学生讲授．对于某些学生，这门课程是他们学习其他必修课程的先决基础，而对于另一些学生，这门课程就是他们的课目表中最后的一门课程．这门课程对于上述两类学生来说，很可能是第一次接触现代数学．而且，我们的许多学生是中学教师，他们面临着在自己的班级中讲授集合论的某些方面的问题，又要回到大学来扩充他们在这个题材方面的知识．

虽然，现代数学的各种课程可以并且经常被用来满足上述要求，但我们觉得，无论哪一种都不会比以各种不同形式出现于数学的所有题材中的集合论更为基本的了．如果要设置一门课程来满足我们所说过的各类学生的需要，那它就必须含有某种明显的成分．如果它是用来作为其它课程的先决基础，则应给学生提供那些在以后的应用中有机会使用的具体工具和技巧．在这方面，特别强调函数的概念及有关的课题是适宜的．为了无愧于现代数学的名称，这门课程就应该使读者懂得现代数学并不是仅仅用新方法去讲旧的东西．我们觉得，超穷基数概念是说明这点的一个好例子（当然不只

一个）．最后，我们认为，作为数学的中心分支、且具有自己的假设的集合论，是研究公理的结构和研究证明的性质的理想媒介．

种种想法促使我们以这样一种方法（把具有逻辑结构的数学系统这样的题材作为重点，来发展集合论的基本工具），采用基数及其运算的有系统的扩展作为我们这门课程的中心论题．显然，我们的课程应当超过文氏图的处理水平．同时，学生的背景和水平使我们不得不把课程的深度明显地限制在只会使用公理结构的程度．所需要的是这样一种半公理性的叙述：强调注意假设和严格性，但不会达到妨碍学生的进步，或者更糟，使他们对现代数学产生消极态度的地步．

在寻找这门课程的合适教科书时，我们发现，那些可用的教科书一般有两种类型：一种是有相当完整的公理化论述，它远远超出了我们这门课程的要求；而另一种极端情况是，只能找到一些介绍性的材料，其中大多数对于我们的目的来说，全都是太简单或太基本了．因而，在我们的学生鼓励下，我们开始重新整理我们自己的教学笔记，以弥补这个明显的缺陷．这些笔记已收入在本书中．

我们的论述是公理化的，但决不是完全的．我们仅使用那些通过教学试验后发现学生能够掌握的，而且还足以达到我们的具有一定程度的严格性的目的的那些公理．当严格性被抛弃时，我们都力图忠实地向读者指出．谁要想打破直观性和严格性的这样一种平衡时，就要冒某些内容包括得太多，而另一些内容又不足的危险．我们可以说，这里所提出的材料曾在好几个班级中使用过，而且获得不同程度的成功，其中有些班级几乎全部由中学教师组成．从那些继续学习和进行教学的学生的反应看来，是令人鼓舞的．

我们不为第一章逻辑的论述太简要，而且也许不合适而

辩解。按更早的原稿的意见，这一章本打算一概删掉的。不过，我们很快又发现，讲授一些这种类型的材料是有必要的，而我们正好收入了其后各章需要用到的那么多的材料。在第一章中，没有做出认真的努力来说明导出的逻辑概念，因为我们有赖于在其后的材料中广泛地说明这些概念。

在第二章介绍集合概念和它们的运算之后，对于利用集合的基本定理进行证明的问题给予了认真的关注。在第三章，将广泛地论述函数和有关的论题。在这里要说明第二章所讲的有关集合论的概念，对随后第四章所讨论的集合等价性是不可缺少的。因为，有时需要作出极大的努力来证明，而且我们还收入了通常是留给读者去思考的好些细节，因此完成这几章的进度必然是缓慢的。但是，这样缓慢的进度是有益的。我们已经发现，对于初学的学生，当要求他们自己动手证明时，他们特别感激在手头有详尽的证明可作为楷模。

在第四章明确了等价性概念之后，才紧接着在第五章介绍基数，给出基数的算法，并协调前面各章的结果。当读者读完这几章时，他会发现符号体系的个数和抽象程度在逐步地增加。之所以这样做至少有两个原因。第一个原因是，一般说来，数学的、特别是集合论的魅力和精髓正在于它的符号体系和抽象性。以任何其它方式介绍数学对于学生都不是很清楚的，事实上，甚至还会使学生对于现代数学的构成产生虚假的印象。第二个原因是，虽然我们认真地努力保持初级一点的水平，但我们觉得，应力求使学生学完这些材料后，其水平有所提高。同时，也认识到，如果包含太多的抽象内容，就会有达不到我们自己的教学目的的危险。所以，在介绍它们以前，我们都努力诱导和讨论每个定义和主要的结果。

由于在第五章完成了本书的主要目的，在第六章，我们

转而扼要地讨论有序集和其他课题。这门课程的长短和范围，不允许我们涉及这些问题的许多细节，但我们希望，这种讨论能有助于充分开阔眼界，唤起强烈的好奇心，以便激励部分读者进一步学习。

P. W. 齐纳

R.L. 约翰逊

致读者的前言

这本书所包含的数学类型可能大大不同于你以前学过的任何一种．如果是这样，那么下面的关于怎样学习这些资料的建议可能会对你有所帮助，正如这些建议对我们自己的学生曾有所帮助一样．

我们建议你一定要记住每一个定义，当它一出现时就记住．我们并不贬低理解的重要性，而关于每个定义，书中都将有例子和讨论去帮助你理解．但是因为每个论题是如此地依赖于先前的论题，我们发现定义的记忆将会加快你的进步．

当读到每一个新定理时，你先停一停，并尽自己的最大努力去证明这个定理．当然，你不会在每种情况下都成功的（特别是在较前的课题上），但是这种努力将会使你看出先前的资料的重要性．那么，在读完课文中给出的证明之后，你就会确信，我们所用过的证明方法是清楚的．如果我们的证明与你自己的证明不同，这或者表明你的证明是一个与我们的证明等价的证明，或者你的证明需要更正．

在大多数章节的末尾给出的练习，其目的不仅是给出使用这些定义和定理的实践，而且也是给你一些机会去作一些独立思考．一定要细心地做完这些练习的每一条题目．

最后，当一章学习完时，对本章所包含的定义、公理和定理作一个摘要，并用粗略证明和举出例子的方法，检查你对每一项内容的理解，在第 158 页我们提供了一个符号索引帮助你对资料进行摘要，并提供简易的参考．

目　　录

译者的话

序言

致读者的前言

第一章　导言和基本逻辑 …………………………………… (1)

1.1　历史摘述…………………………………………………… (1)

1.2　集合论在数学中的作用…………………………………… (3)

1.3　逻辑语句和变元…………………………………………… (6)

1.4　语句连接词和真值表……………………………………… (8)

1.5　重言式和推理……………………………………………… (15)

1.6　数学证明…………………………………………………… (19)

第二章　集合及其性质 ……………………………………… (21)

2.1　不可定义项………………………………………………… (21)

2.2　子集和其他导出项………………………………………… (26)

2.3　补集………………………………………………………… (31)

2.4　并集和交集………………………………………………… (33)

2.5　全集和文氏图……………………………………………… (38)

2.6　关于集合的定理…………………………………………… (43)

第三章　集合和函数…………………………………………… (51)

3.1　引言………………………………………………………… (51)

3.2　有序偶……………………………………………………… (51)

3.3　笛卡儿积集………………………………………………… (53)

3.4　关系………………………………………………………… (55)

3.5　分划………………………………………………………… (62)

3.6　函数………………………………………………………… (68)

3.7　函数的类型………………………………………………… (73)

3.8 二元运算…………………………………………………… (78)
3.9 函数的复合…………………………………………………… (79)
3.10 函数的限制…………………………………………………… (84)
第四章 有穷集和无穷集 …………………………………… (86)
4.1 引言…………………………………………………… (86)
4.2 集合的等价…………………………………………………… (87)
4.3 无穷集…………………………………………………… (90)
4.4 可数集…………………………………………………… (92)
4.5 可数集的例子…………………………………………………… (102)
4.6 不可数集…………………………………………………… (106)
第五章 基数 …………………………………………………… (113)
5.1 一般说明…………………………………………………… (113)
5.2 集合基数的定义…………………………………………………… (114)
5.3 有序基数…………………………………………………… (116)
5.4 基数的加法和乘法…………………………………………………… (125)
5.5 基数的幂…………………………………………………… (130)
第六章 结尾 …………………………………………………… (139)
6.1 一般说明…………………………………………………… (139)
6.2 有序集…………………………………………………… (140)
6.3 相似性和良序集…………………………………………………… (144)
6.4 序数…………………………………………………… (148)
6.5 选择公理…………………………………………………… (151)
6.6 罗素悖论…………………………………………………… (153)
附录…………………………………………………… (156)
符号索引 …………………………………………………… (158)
部分练习答案 …………………………………………………… (161)

第一章　导言和基本逻辑

1.1　历史摘述

集合或汇合的概念大概是和数的概念一样原始.事实上，正如我们将会看到的那样，两者不是完全无关的。例如，一般认为，当一个小孩听到“二”这个字时，他就会想到一个由他所体验过的两个事物组成的集合。因此，把某些事物汇合成一个单一的整体的想法，似乎就是非常自然的了。二十世纪的数学家从这个简单的概念引出的数学成果是很多的，而人们可能在几百年以前，就曾期望在这个领域中能有一些发现。然而，一直到了十九世纪后期，德国数学家乔治·康托(George Cantor 1845—1918)才提出把集合作为数学实体的最早的形式处理。

康托在其分析研究中得出这样一点结论：即似乎必须超出通常的有穷的理解，把数的概念一般化。他需要一个把“实在的无穷”引进数学的概念*。当康托在这方面进一步研究时，他发现，不仅能把无穷数的概念形式化，而且还能把无穷数分成各种不同的类型！只要知道象高斯(Frederick Gauss在1831年）那样的数学家都拒绝实在无穷的概念，并且认为这样的想法在数学中是不能允许的，那就会明白康托的这种态度在他同时代的数学世界中是多么大胆啊！而且，

* 在这个导言中，我们以纯粹非形式的方式使用“集合”、“有穷”、“无穷”这些词.在这点上，我们请读者信赖自己对这些词的直觉理解.

古希腊学者及其以后的大多数数学家都认为，无穷概念只适合于神学及哲学的研究，而与数学无缘.

确实，在康托的著作之前出现过各种“无穷”概念. 然而，这个“无穷”是由极限的研究得来的.这个研究是十八，十九世纪期间数学研究的中心课题之一. 例如，一般认为当x的值越来越小的时候，表达式$1/x^2$的值就变大，并会超出有限的界.事实上,我们今天所用的数学缩写，即“$\lim\limits_{x\to 0}1/x^2=\infty$”，反映已接受了这种无穷的看法. 但决不能认为是这个概念导出了一个真正的无穷. 恰恰相反，使用象“当x接近零时，$1/x^2$变为无穷”这样的符号表示和各种短语，是想作为:“给定任一正数k，可以找出一个正数h，使得当$0<|x|<h$时，$1/x^2>k$”这个精确概念的缩写.

假定有一个实在的无穷数，它并不是通过使用极限来指定的. 为什么在我们的数系中不允许有称为“无穷”、并能通过对应的极限关系，具有它所期望的特性的数呢？答案之一是：如果这样做，我们会失去数系运算中的一些有价值的性质. 例如，“无穷”这个数（我们敢写为“∞”吗？)的一个自然特性是：给定任一实数a，我们应有$a+\infty=\infty$. 然而在实数系中加法的一个重要性质是消去律，即如果a、b和c是实数，且$a+c=b+c$，则$a=b$. 注意，如果我们把∞包括在实数内，那我们就失去了这个消去律. 因为如果我们设$a=1$，$b=2$而$c=\infty$. 若是消去律仍正确的话，就会得出$1=2$，这是我们所不能接受的.

从这些摘述来看，康托的著作不能为其同时代人所普遍接受是毫不奇怪的了. 然而由于他的工作的进展，由于那些发现了这个理论的广泛应用的其他数学家们也加入了这一工作，这门学科的重要性就变得更明显了. 其后，这个研究领域就被称为“集合论”.

具有讽刺意味的是，大约在康托的集合论开始为人们所接受的时候，通过对这门学科的更深入的研究发现了称之为悖论的某些矛盾．有人可能认为，因为人们接受集合论早就是勉强的，这个发现就可能敲响了这门学科的丧钟．然而，人们对集合论的兴趣竟然达到了这样的高峰，以至象希尔伯特(Hilbert)，弗兰凯尔(Fraenkel)和蔡梅罗(Zermelo)这些数学家都开始认真地研究产生这些悖论的原因，并且在致力于解决这些问题的过程中，获得了种种出色的发现．自悖论首次出现后的六十四年间，布拉利-福蒂(Burali-Forti)于1897年，在解决这个问题方面取得了进展．但到本书写作之时，有些问题仍然没有解决．

1.2 集合论在数学中的作用

从1900年至今这段时期数学的进展至少可以说是显著的．集合论在所谓现代数学的发展中起过不小的作用，事实上，也可以说是现代数学的各个分支的基础．集合论中悖论的出现还帮助了通常称为数学基础的这一数学领域的发展．在这个数学领域里，所有数学的公理都要被严格地考查．从更直接的观点来看，我们现在认为几乎所有的数学分支都是研究某类东西的集合．这样，几何学就是研究点的集合，代数则是研究数（或它的原型）的集合以及这些集合的运算．数学分析主要涉及到各种函数，而函数正如我们将要看到的，只不过是一种特殊类型的集合而已．我们把集合论看作是现代数学的统一者和简化者．因为集合的语言和性质被广泛地应用于数学的各个完全不同的分支，所以它是一个统一者；因为依据集合的本来的性质，它是把对象的汇合作为一个整体来处理的，因此提供了一套处理那些整体的方便的记号，

所以集合又起着简化者的作用.

另一方面，也可以把集合论看作是具有它自己的特殊假定和结构的一个数学分支，因此，为了它本身的缘故也应该研究集合论. 事实上，在回答学生常常提出来的关于为什么要研究集合论这样的问题时，我们就可以说：首先，而且最重要的是因为它是数学. 如果读者在研究数学时还不曾遇到需要与使用集合论的情况，那么他不大可能在更进一步研究时，还不会遇到这种需要和应用. 这本书的主要目的是，向读者叙述被公认为是现代数学最显著成就的康托的数的一般化理论，为什么能够通过对集合及其性质的研究来完成.

为了达到我们所声称的目的，必须首先考查作为数学对象的集合的结构. 在这方面，主要有两条相近的途径. 我们在前面曾经提到过在康托的著作发表之后不久，就产生了集合论的某些悖论，其中一些悖论是由于康托的定义和假设的高度直觉性而产生的. 也就是说，当详细考查其中一些假设，而这些假设又正是以公理汇合方式作成时，就可能会导出矛盾的命题来. 消除这些悖论的尝试导致产生不同的公理系统，正如我们所曾经指出的那样，这些公理系统当中没有一个能足以解决所有这些困难. 所有这些尝试的结果就是：今天流行着把集合论分成所谓质扑的（或直觉的）集合论和公理化的集合论，虽然两者之间的界线并非总是很清楚的.

我们的意图不是仅仅向读者陈述质扑集合论. 首先我们觉得，集合论是说明数学中逻辑的，演绎的结构的理想媒介，而这最好是用公理化的方法来完成. 其次，我们觉得数学教师为了讲授集合论及其有关的课题，需要把集合论开展得比以质扑方法开展得更系统. 虽然我们的方法将是公理化的，但应该告诉读者，集合论里面有比在这里能找到的多得多的东西. 也就是说，我们只选择了为完成我们的主要目的所需

要的那些假定．这种选择的结果，使我们的系统将保持相对地小，并且将避开那些微妙的论题，否则将会使我们的进程大大减慢．

作为一个数学系统来说，集合论和其它数学系统一样，有一些基本特征，它具有一些不可定义项或原始概念有叫做定义的可定义项，有假设的关系或公理（有时亦称为公设），还有通常叫做定理的推理关系．多年以来，几何学曾经是用来对大多数中学生在他们上大学之前，向他们介绍数学演绎结构的唯一数学学科．然而后来，越来越多的代数和分析方面的教科书，也用说明这些学科的逻辑的和演绎的性质的观点来写了．如果说研究数学的目的之一是为了理解数学的演绎性质的话，那么，一般说来，由于集合论比上面提到过的三个系统[1]具有较少的原始项和公理，所以它为达到这个目的提供了更为经济的方法．

我们把推理关系或定理作为数学系统的一部分进行了叙述．我们希望读者从我们所采用的表达方法中得到一些益处：能有一套对于在所有数学领域中导出各种关系都有用的技巧和工具．因为不能任意地推导关系，所以必须对这些推理详细地指定某些规则．为了讨论这些规则我们转向数理逻辑领域．在过去四十年间，象波斯特（Post），哥德尔（Gödel），丘吉（Church），图灵（Turing）和克林（Kleene）这些人取得了关于数学证明方面的有意义的结果．数学中的逻辑研究的这种更新，是紧随着希尔伯特的著作和其他自康托的质扑集合论的第一个矛盾出现之后而来的，许多关心任一数学系统协调性的人的著作也接踵而至．这样提恐怕是适当的．为了指出数学证明的突出的特点，并且为了在本书使用了这一证

1）指几何、代数和数学分析。——译注

明方法之后使推理更清楚，我们在本章余下的各节中把注意力转向这些方面[1]是适当的。

1.3 逻辑语句和变元

我们不打算非常详尽地考查各种逻辑原理，如果读者由于这里给出的简短的处理而对某些方面觉得不满足，希望有更详细地了解，那末，我们极力推荐文献中列出的伯特里克·舒卜斯(Patrick Suppes)在他最近发表的文章中所给出的很好的处理。

初学数学公理处理的学生遇到的困难之一就是数学证明问题。困难的产生大部分是因为：我们必须用一种不精确的，含糊的日常语言，以不含糊的方式去描述精确的数学概念。而且，我们必须能够通过从已知到未知进行论证来导出其中的关系。而这样的论证往往又是用日常语言来进行的.所以，我们的第一个任务就是对某些单词和短语的意思达成某种一致，尽我们的所能去消除我们语言上原有的那么多的含糊性，而且在考察一个被假定为证明的论证时，我们必须决定它可被接受的标准。

当我们用给定的日常的语言说话时，开始，我们使用含有一个名词和一个谓语的简单句子。当然，随着熟练程度的增加，我们就使用复合句或由几个简单句组成的句子。在我们的数学语言中，让我们约定**语句**或者是简单句，或者是由几句简单句组成的复合句。我们将用字母 p，q，r，s，等等来表示任意语句，并在这种意义下来使用：例如 p，只是一个可以被语句取代的占位者而已。在这里和在本书的其他地方，对于用来作为某一特定种类的事物的占位者的任何字母

1）指数理逻辑领域.——译注